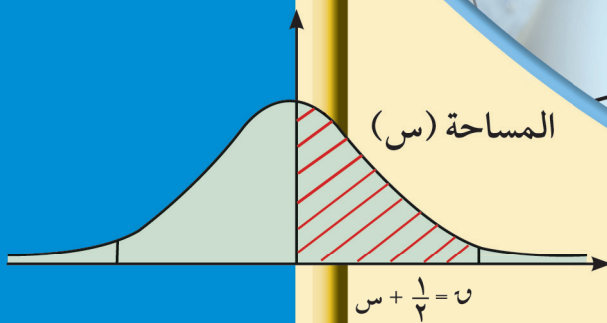




وزارة التربية

الرياضيات

كتاب المعلم



١٢

الصف الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الثانية



وزارة التربية

الرياضيات

الصف الثاني عشر أدبي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب المعلم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيساً)

أ. فتحية محمود أبو زور

أ. حصة يونس محمد علي

الطبعة الثانية

١٤٣٧ - ١٤٣٨ هـ

٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر أدبي
أ. فتحي محمد عبد الفتاح (رئيسًا)

أ. محمود عبد الغني محمد أ. سعيد أحمد علي خلف

أ. يسرى شمالان أحمد البحر أ. عيدة خلف عواد الشمري

أ. هنادي حباس غنيم المجول

دار التَّربويّون House of Education ش.م.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤م

© جميع الحقوق محفوظة : لا يجوز نشر أيّ جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله
بأيّ وسيلة دون مُوافقة خطيّة مِنَ النّاشِر.

الطبعة الأولى ٢٠١٤م

الطبعة الثانية ٢٠١٦م



صاحب السمو الشيخ أحمد بن إبراهيم السعيد
أمير دولة الكويت



سَيِّدُ الشَّيْخِ نَوَافُ بْنُ فَهْدٍ الْجَبَرُ السَّبَّاحُ

وَلِيَّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

مقدمة من كتاب المعلم

توجيهات عامة للمعلم

- هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضية وربطها بالواقع الحياتي من خلال:
- ١ - الأنشطة العملية في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس الطالب بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام عدّة طرائق مختلفة:
العمل في فريق.
عمل مجالات رياضية.
استخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.
التعبير الشفهي (التواصل) - التفكير الناقد.
 - ٢ - الاعتماد على المصوّرات، وذلك من خلال التمثيل البياني للمعلومات وقراءة البيانات الممثلة بيانياً.
 - ٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتية وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضية في حلّ المسائل الحياتية.
 - ٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

- وجود ملفّين لكلّ تلميذ بحيث يُخصّص أحدهما للأنشطة الصفّية واللاصفّية، أمّا الآخر فيُخصّص للاختبارات والملحوظات الميدانية على أداء الطالب، ويُدوّن فيها المعلم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونة بتواريخ المتابعة.
- يُنوّع المعلم في طرائق التدريس، وخاصّة التي تشمل الاستكشاف وحلّ المشكلات.

نماذج المعلم لتقييم الطلاب تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاوني.
- التقييم الفردي في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العام للطلاب.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الاسم التاريخ

تقييم الأداء في حلّ المسائل

① ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقّة أداء الطالب .

إفهم

- يقرأ المسألة بتأنّ.
- يقرأ أيّ جدول أو أيّ تمثيل بياني .
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة .
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة .
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه .

خطّط

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة .
- يقدر الإجابة الصحيحة .

حلّ

- يعمل وفقاً لمنهجية معيّنة .
- يعرض الحلّ بطريقة منظّمة وسليمة .
- يحسب بطريقة صحيحة .
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات .

راجع ولا حظّ

- يُلاحظُ معقولية الإجابة .
- يجربُ طرقاً أخرى لحلّ المسألة .

② إتبع المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب :

- مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١-١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهماً عميقاً للمسألة ويفسّرُها بشكل موجز وواضح ويكون قادراً على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه .
- مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨-١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظّمة وواضحة .
- مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤-٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهماً إجمالياً للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة .
- مستوى ١ (يتقن الطالب ٠-٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلّا فهماً سطحيّاً أو جزئياً للمسألة وهو ليس قادراً على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلّاً ولا تجاوباً مناسباً أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما .

التقييم المستمر: حلّ المسائل

التاريخ

قَدِّر كَلِّ بِنْد بـ:	+	✓	-	غ.ت
إذا كان ممتازاً	إذا كان مقبولاً	بحاجة للتطوير	غير قابل للتطبيق	
١.				
٢.				
٣.				
٤.				
٥.				
٦.				
٧.				
٨.				
٩.				
١٠.				
١١.				
١٢.				
١٣.				
١٤.				
١٥.				
١٦.				
١٧.				
١٨.				
١٩.				
٢٠.				
٢١.				
٢٢.				
٢٣.				
٢٤.				
٢٥.				
٢٦.				
٢٧.				
٢٨.				

التقييم المستمر: الملاحظة

التاريخ

قَدِّر كلَّ بند بـ:	+	إذا كان ممتازًا
✓	إذا كان مقبولًا	
-	بحاجة للتطوير	
غ.ت	غير قابل للتطبيق	
١.		
٢.		
٣.		
٤.		
٥.		
٦.		
٧.		
٨.		
٩.		
١٠.		
١١.		
١٢.		
١٣.		
١٤.		
١٥.		
١٦.		
١٧.		
١٨.		
١٩.		
٢٠.		
٢١.		
٢٢.		
٢٣.		
٢٤.		
٢٥.		
٢٦.		
٢٧.		
٢٨.		

التقييم المستمر: التعلم التعاوني

التاريخ

[illegible]

المحتويات

الوحدة الرابعة: المتغيرات العشوائية وتوزيعها ١٣

الوحدة الخامسة: المتباينات والبرمجة الخطية ٤٥

الوحدة الرابعة: المتغيرات العشوائية وتوزيعها

Random Variables and Their Distribution

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٤ - ١ : المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية.

(٤ - ١ - ٢) : المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة).

(٤ - ١ - ب) : المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

مقدمة الوحدة

الوحدة الرابعة

المتغيرات العشوائية وتوزيعها Random Variables and Their Distribution

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة

- 1 مقدمة المشروع: في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تسع ٢١٣ راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من ٢١٣ بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلّفون عن الرحلة.
- 2 الهدف: تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي ٢١٣ مقعدًا، لأنه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سينتقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.
- 3 اللوازم: آلة حاسبة - حاسوب.
- 4 أسئلة حول التطبيق:
 - 1 بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو ٠,٠٩٧٥.
 - 2 أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون ٢٣٦ بطاقة حتى يتأمن وجود ٢١٣ راكبًا عند انطلاق الرحلة.
 - 3 إذا باعت الشركة ٢٤٠ بطاقة أي ٤ بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين ٢١٣ راكبًا.
 - 4 أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.
 - 5 إذا كانت الشركة تدفع ٢٠٠ دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة، فأوجد احتمال أن تدفع الشركة ١٠٠٠ دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت ٢٤٦ بطاقة.
 - 6 التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع وأعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذها.

دروس الوحدة

١-٤ المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

(١-٤) المتغيرات العشوائية المنقطعة (المنفصلة)

(١-٤ ب) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

١٠

تؤدي الكثير من العمليات إلى نتائج تتركز بقسم كبير منها أو كليًا على الصدفة. ولكن من الضروري اتخاذ قرارات حتى وإن لم تكن متأكدين من النتائج.

يأخذ علم الاحتمال أهمية متزايدة في عالمنا الحاضر وعلى جميع الأصعدة: الهندسة، الأحياء، الاقتصاد...

يستخدم مربو الأسهم في الأحوال علم الاحتمال لمعرفة عدد الأسهم في الحوض كونهم لا يستطيعون عدّها بطريقة مباشرة. تقوم إحدى هذه الطرق على أخذ ألف سمكة مثلاً من الحوض ووضع علامة تسمح بالتعرف عليها، ثم إعادتها إلى الحوض. بعد مدة من الزمن تؤخذ من جديد ألف سمكة من الحوض وتعد السمكات الموسومة ولنقل أن عددها مئة. وهذا يسمح بتقدير عدد الأسهم: احتمال أخذ مئة سمكة من ألف يعني أن عدد الأسهم في الحوض هو عشرة آلاف. هذه الطريقة تعطي فكرة غير دقيقة عن عدد الأسهم ولكنها كافية. ويمكن التأكيد بأن عدد الأسهم في الحوض يتخطى بكثير الخمسة آلاف سمكة.

هذه الطريقة مستخدمة أيضًا في مجال اختبار الجودة. تخيلوا معملًا لصنع الأسهم النارية يريد التحقق من أن ٩٥٪ من منتجاته صالحة. الطريقة التي عرضت أعلاه تصلح لهذا الاختبار.

ماذا يحدث عند تكرار تجربة عشوائية عددًا كبيرًا من المرات؟ هل يمكن استخلاص معلومة؟

يقول قانون الأعداد الكبيرة بأن احتمال حصول حدث عشوائي يقترب أكثر فأكثر من احتمال النظري مع ازدياد مرات إعادة التجربة العشوائية.

من الأفكار التي ينبغي مناقشتها: الفرق بين الاحتمالات النظرية والاحتمالات التطبيقية.

تستخدم المحاكاة لنمذجة الاحتمالات التطبيقية والقوانين لإيجاد الاحتمالات النظرية. وتسمح كلتا الطريقتين بوضع توقعات أو باتخاذ قرارات حول أحداث في المستقبل.

إن عمر قطعة إلكترونية أو مصباح كهربائي أو درجة حرارة مياه بحيرة هي متغيرات عشوائية تأخذ عددًا لا نهائيًا من القيم على فترة ما. يُسمّى هذا المتغير متغيرًا متصلًا. لا يمكن في هذه الحالة التكلم عن احتمال حدث بل نتخطى ذلك ونأخذ قيمة المتغير على فترة ونتكلم عن كثافة احتمال. ونربط هنا بين أن الاحتمال هو عدد من الصفر إلى الواحد و $\frac{1}{s}$ من جهة وبين مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $D(s)$ ومحور السينات والتي تساوي أيضًا ١.

مشروع الوحدة

يعالج مشروع الوحدة مشكلة حجز بطاقات السفر مع شركات الطيران وكيفية التوفيق بين الربح الأقصى (امتلاء كل مقاعد الطائرة) وبين الخسارة الأقل (دفع تعويض للذين لم يجدوا مقعداً لهم على الطائرة).

تقوم شركات الطيران بحجز مقاعد أكثر من عدد مقاعد الطائرة لأن عدداً من الركاب سيتخلف عن السفر في آخر لحظة.

اسأل الطلاب: كيف يتم حجز المقاعد في الطائرات؟ وكيف تطوّر ليصبح إلكترونيًا عبر شبكة الإنترنت؟

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) إذا كان س عدد البطاقات المباعة فإن:

$$س = ٢٣٦ \therefore (١ - ٠,٩٧٥) \times س = ٢١٣$$

$$(ب) ل(س=١) = ١ \times (١ - ٠,٩٧٥) \times (٠,٩٧٥) = ٠,٠٠٣٣٤٦ \approx$$

(ج) إذا دفعت الشركة ١٠٠٠ دينار كويتي فهذا يعني أن

$$٥ = \frac{١٠٠٠}{٢٠٠}$$

٥ ركاب إضافيين لم يجدوا لهم مقعداً على الطائرة من أصل ١٠ إضافيين.

$$ل(ص=٥) = ٥ \times (١ - ٠,٩٧٥) \times (٠,٩٧٥) = ٠,٠٠١٣٣ \approx$$

التقرير

اكتب تقريراً مفصلاً شارحاً ما قمت به من حسابات مبيّناً استخدام خصائص الاحتمال في عملك واعرض ملاحظاتك حول حجز المقاعد في الطائرات واقتراحاتك.

الوحدة الرابعة

Departures

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- استخدمت مبدأ العد والتباديل والتوافيق لعد الطرق الممكنة لإجراء عملية ما.
- تعرفت التجربة العشوائية وقضاء العينة.
- عُيِّنَت احتمالات بعض الأحداث والأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف التغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع.
- تعرف دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل.

المصطلحات الأساسية

المتغير العشوائي المتقطع - التوزيع الاحتمالي - توزيع ذات الحدين - تجربة برنولي - توقع التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع التراكمي - التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل - دالة كثافة الاحتمال - التوزيع الاحتمالي المنتظم - التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

أضف إلى معلوماتك

عمل كل من مؤسسي حساب الاحتمالات (كاردانو Cardano، باسكال Pascal، فيرما Fermat، برنولي Bernoulli) على تطوير هذا الحساب وذلك من خلال تجارب نواتجها قابلة للعد.

وبعد ذلك تركز الاهتمام على متغيرات عشوائية يمكن أن تأخذ عدداً لا نهائياً من القيم أو كل القيم على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية.

سلم التقييم

٤	الحسابات كلها صحيحة - استخدام القوانين دقيق - التفسير واضح وكامل - أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة - التوصيات صريحة ومعبرة.
٣	الحسابات في معظمها صحيحة - بعض الأخطاء في استخدام القوانين - التفسير واضح - أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة - التوصيات معقولة.
٢	الحسابات تحتوي على أخطاء متعددة - استخدام القوانين غير واضح - أفكار التقرير غير مترابطة - التوصيات غير دقيقة.
١	معظم عناصر المشروع ناقصة أو غير موجودة.

٤-١: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

١ الأهداف

- يتعرّف المتغير العشوائي المتقطع ودالة التوزيع الاحتمالي وشروطها.
- يحسب التوقع والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة.
- يتعرّف دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع وخواصها.
- يرسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع.
- يستخدم توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي لحلّ مسائل متنوعة.
- يحسب التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.
- يتعرّف المتغير العشوائي المتصل.
- يتعرف خواص دالة كثافة الاحتمال.
- يتعرّف التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل.
- يتعرّف التوزيع الاحتمالي الطبيعي ويحسب احتمالاته.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

المتغير العشوائي - عدد الصور - المتغير العشوائي المتقطع - دالة التوزيع الاحتمالي - توقع التوزيع الاحتمالي - تباين التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع التراكمي - تجربة ذات الحدين - محاولة برنولي - توزيع ذات الحدين - المتغير العشوائي المتصل - التوزيع الاحتمالي المتصل - دالة كثافة الاحتمال - التوزيع الاحتمالي الطبيعي - التوزيع الطبيعي المعياري.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show) - جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين.

١-٤

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Discrete Random Variables and Probability Distributions

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجر نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.
الحجر الأول مرقم كما يلي: وجهان مرقمان ٠٠، وجهان مرقمان ١، وجهان مرقمان ٢.
الحجر الثاني مرقم كما يلي: ثلاثة أوجه مرقمة ٠، ثلاثة أوجه مرقمة ١.
نهتم بمجموع العددين الظاهريين على الوجه العلوي ولكن م هذا المجموع.
١ بين أن النتائج الممكنة هي: ٠، ١، ٢، ٣
٢ أوجد احتمال كل من النتائج التالية:
ل(٠ = ٠)
ل(١ = ٠)
ل(٢ = ٠)
٣ استنتج احتمال ل(٣ = ٠)
٤ إذا كنا نهتم بنتائج ضرب العددين الظاهريين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟
٥ أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

سوف نتعلم

- المتغير العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- توقع التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.
- تباين التوزيع الاحتمالي.
- المتغير العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

مقدمة

Introduction

في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العينة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالباً ما تكون صفات أو سميات يصعب التعامل معها رياضياً. لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمُتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية. فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي: ف = {(ص،ص)، (ص،ك)، (ك،ص)، (ك،ك)}.

١٢

فمثلاً إذا اقتصرنا دراستنا على عدد الصور التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة ف والتي هي كالتالي: ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٥، ٧٦، ٧٧، ٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١، ٨٢، ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٦، ٨٧، ٨٨، ٨٩، ٩٠، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٦، ١٠٧، ١٠٨، ١٠٩، ١١٠، ١١١، ١١٢، ١١٣، ١١٤، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١١٩، ١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٣، ١٢٤، ١٢٥، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨، ١٢٩، ١٣٠، ١٣١، ١٣٢، ١٣٣، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٧، ١٣٨، ١٣٩، ١٤٠، ١٤١، ١٤٢، ١٤٣، ١٤٤، ١٤٥، ١٤٦، ١٤٧، ١٤٨، ١٤٩، ١٥٠، ١٥١، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٥، ١٥٦، ١٥٧، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦١، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٠، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٦، ١٧٧، ١٧٨، ١٧٩، ١٨٠، ١٨١، ١٨٢، ١٨٣، ١٨٤، ١٨٥، ١٨٦، ١٨٧، ١٨٨، ١٨٩، ١٩٠، ١٩١، ١٩٢، ١٩٣، ١٩٤، ١٩٥، ١٩٦، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٢، ٢٠٣، ٢٠٤، ٢٠٥، ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢٠٩، ٢١٠، ٢١١، ٢١٢، ٢١٣، ٢١٤، ٢١٥، ٢١٦، ٢١٧، ٢١٨، ٢١٩، ٢٢٠، ٢٢١، ٢٢٢، ٢٢٣، ٢٢٤، ٢٢٥، ٢٢٦، ٢٢٧، ٢٢٨، ٢٢٩، ٢٣٠، ٢٣١، ٢٣٢، ٢٣٣، ٢٣٤، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٣٧، ٢٣٨، ٢٣٩، ٢٤٠، ٢٤١، ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٤، ٢٤٥، ٢٤٦، ٢٤٧، ٢٤٨، ٢٤٩، ٢٥٠، ٢٥١، ٢٥٢، ٢٥٣، ٢٥٤، ٢٥٥، ٢٥٦، ٢٥٧، ٢٥٨، ٢٥٩، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧٢، ٢٧٣، ٢٧٤، ٢٧٥، ٢٧٦، ٢٧٧، ٢٧٨، ٢٧٩، ٢٨٠، ٢٨١، ٢٨٢، ٢٨٣، ٢٨٤، ٢٨٥، ٢٨٦، ٢٨٧، ٢٨٨، ٢٨٩، ٢٩٠، ٢٩١، ٢٩٢، ٢٩٣، ٢٩٤، ٢٩٥، ٢٩٦، ٢٩٧، ٢٩٨، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٣، ٣٠٤، ٣٠٥، ٣٠٦، ٣٠٧، ٣٠٨، ٣٠٩، ٣١٠، ٣١١، ٣١٢، ٣١٣، ٣١٤، ٣١٥، ٣١٦، ٣١٧، ٣١٨، ٣١٩، ٣٢٠، ٣٢١، ٣٢٢، ٣٢٣، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٢٨، ٣٢٩، ٣٣٠، ٣٣١، ٣٣٢، ٣٣٣، ٣٣٤، ٣٣٥، ٣٣٦، ٣٣٧، ٣٣٨، ٣٣٩، ٣٤٠، ٣٤١، ٣٤٢، ٣٤٣، ٣٤٤، ٣٤٥، ٣٤٦، ٣٤٧، ٣٤٨، ٣٤٩، ٣٥٠، ٣٥١، ٣٥٢، ٣٥٣، ٣٥٤، ٣٥٥، ٣٥٦، ٣٥٧، ٣٥٨، ٣٥٩، ٣٦٠، ٣٦١، ٣٦٢، ٣٦٣، ٣٦٤، ٣٦٥، ٣٦٦، ٣٦٧، ٣٦٨، ٣٦٩، ٣٧٠، ٣٧١، ٣٧٢، ٣٧٣، ٣٧٤، ٣٧٥، ٣٧٦، ٣٧٧، ٣٧٨، ٣٧٩، ٣٨٠، ٣٨١، ٣٨٢، ٣٨٣، ٣٨٤، ٣٨٥، ٣٨٦، ٣٨٧، ٣٨٨، ٣٨٩، ٣٩٠، ٣٩١، ٣٩٢، ٣٩٣، ٣٩٤، ٣٩٥، ٣٩٦، ٣٩٧، ٣٩٨، ٣٩٩، ٤٠٠، ٤٠١، ٤٠٢، ٤٠٣، ٤٠٤، ٤٠٥، ٤٠٦، ٤٠٧، ٤٠٨، ٤٠٩، ٤١٠، ٤١١، ٤١٢، ٤١٣، ٤١٤، ٤١٥، ٤١٦، ٤١٧، ٤١٨، ٤١٩، ٤٢٠، ٤٢١، ٤٢٢، ٤٢٣، ٤٢٤، ٤٢٥، ٤٢٦، ٤٢٧، ٤٢٨، ٤٢٩، ٤٣٠، ٤٣١، ٤٣٢، ٤٣٣، ٤٣٤، ٤٣٥، ٤٣٦، ٤٣٧، ٤٣٨، ٤٣٩، ٤٤٠، ٤٤١، ٤٤٢، ٤٤٣، ٤٤٤، ٤٤٥، ٤٤٦، ٤٤٧، ٤٤٨، ٤٤٩، ٤٥٠، ٤٥١، ٤٥٢، ٤٥٣، ٤٥٤، ٤٥٥، ٤٥٦، ٤٥٧، ٤٥٨، ٤٥٩، ٤٦٠، ٤٦١، ٤٦٢، ٤٦٣، ٤٦٤، ٤٦٥، ٤٦٦، ٤٦٧، ٤٦٨، ٤٦٩، ٤٧٠، ٤٧١، ٤٧٢، ٤٧٣، ٤٧٤، ٤٧٥، ٤٧٦، ٤٧٧، ٤٧٨، ٤٧٩، ٤٨٠، ٤٨١، ٤٨٢، ٤٨٣، ٤٨٤، ٤٨٥، ٤٨٦، ٤٨٧، ٤٨٨، ٤٨٩، ٤٩٠، ٤٩١، ٤٩٢، ٤٩٣، ٤٩٤، ٤٩٥، ٤٩٦، ٤٩٧، ٤٩٨، ٤٩٩، ٥٠٠، ٥٠١، ٥٠٢، ٥٠٣، ٥٠٤، ٥٠٥، ٥٠٦، ٥٠٧، ٥٠٨، ٥٠٩، ٥١٠، ٥١١، ٥١٢، ٥١٣، ٥١٤، ٥١٥، ٥١٦، ٥١٧، ٥١٨، ٥١٩، ٥٢٠، ٥٢١، ٥٢٢، ٥٢٣، ٥٢٤، ٥٢٥، ٥٢٦، ٥٢٧، ٥٢٨، ٥٢٩، ٥٣٠، ٥٣١، ٥٣٢، ٥٣٣، ٥٣٤، ٥٣٥، ٥٣٦، ٥٣٧، ٥٣٨، ٥٣٩، ٥٤٠، ٥٤١، ٥٤٢، ٥٤٣، ٥٤٤، ٥٤٥، ٥٤٦، ٥٤٧، ٥٤٨، ٥٤٩، ٥٥٠، ٥٥١، ٥٥٢، ٥٥٣، ٥٥٤، ٥٥٥، ٥٥٦، ٥٥٧، ٥٥٨، ٥٥٩، ٥٦٠، ٥٦١، ٥٦٢، ٥٦٣، ٥٦٤، ٥٦٥، ٥٦٦، ٥٦٧، ٥٦٨، ٥٦٩، ٥٧٠، ٥٧١، ٥٧٢، ٥٧٣، ٥٧٤، ٥٧٥، ٥٧٦، ٥٧٧، ٥٧٨، ٥٧٩، ٥٨٠، ٥٨١، ٥٨٢، ٥٨٣، ٥٨٤، ٥٨٥، ٥٨٦، ٥٨٧، ٥٨٨، ٥٨٩، ٥٩٠، ٥٩١، ٥٩٢، ٥٩٣، ٥٩٤، ٥٩٥، ٥٩٦، ٥٩٧، ٥٩٨، ٥٩٩، ٦٠٠، ٦٠١، ٦٠٢، ٦٠٣، ٦٠٤، ٦٠٥، ٦٠٦، ٦٠٧، ٦٠٨، ٦٠٩، ٦١٠، ٦١١، ٦١٢، ٦١٣، ٦١٤، ٦١٥، ٦١٦، ٦١٧، ٦١٨، ٦١٩، ٦٢٠، ٦٢١، ٦٢٢، ٦٢٣، ٦٢٤، ٦٢٥، ٦٢٦، ٦٢٧، ٦٢٨، ٦٢٩، ٦٣٠، ٦٣١، ٦٣٢، ٦٣٣، ٦٣٤، ٦٣٥، ٦٣٦، ٦٣٧، ٦٣٨، ٦٣٩، ٦٤٠، ٦٤١، ٦٤٢، ٦٤٣، ٦٤٤، ٦٤٥، ٦٤٦، ٦٤٧، ٦٤٨، ٦٤٩، ٦٥٠، ٦٥١، ٦٥٢، ٦٥٣، ٦٥٤، ٦٥٥، ٦٥٦، ٦٥٧، ٦٥٨، ٦٥٩، ٦٦٠، ٦٦١، ٦٦٢، ٦٦٣، ٦٦٤، ٦٦٥، ٦٦٦، ٦٦٧، ٦٦٨، ٦٦٩، ٦٧٠، ٦٧١، ٦٧٢، ٦٧٣، ٦٧٤، ٦٧٥، ٦٧٦، ٦٧٧، ٦٧٨، ٦٧٩، ٦٨٠، ٦٨١، ٦٨٢، ٦٨٣، ٦٨٤، ٦٨٥، ٦٨٦، ٦٨٧، ٦٨٨، ٦٨٩، ٦٩٠، ٦٩١، ٦٩٢، ٦٩٣، ٦٩٤، ٦٩٥، ٦٩٦، ٦٩٧، ٦٩٨، ٦٩٩، ٧٠٠، ٧٠١، ٧٠٢، ٧٠٣، ٧٠٤، ٧٠٥، ٧٠٦، ٧٠٧، ٧٠٨، ٧٠٩، ٧١٠، ٧١١، ٧١٢، ٧١٣، ٧١٤، ٧١٥، ٧١٦، ٧١٧، ٧١٨، ٧١٩، ٧٢٠، ٧٢١، ٧٢٢، ٧٢٣، ٧٢٤، ٧٢٥، ٧٢٦، ٧٢٧، ٧٢٨، ٧٢٩، ٧٣٠، ٧٣١، ٧٣٢، ٧٣٣، ٧٣٤، ٧٣٥، ٧٣٦، ٧٣٧، ٧٣٨، ٧٣٩، ٧٤٠، ٧٤١، ٧٤٢، ٧٤٣، ٧٤٤، ٧٤٥، ٧٤٦، ٧٤٧، ٧٤٨، ٧٤٩، ٧٥٠، ٧٥١، ٧٥٢، ٧٥٣، ٧٥٤، ٧٥٥، ٧٥٦، ٧٥٧، ٧٥٨، ٧٥٩، ٧٦٠، ٧٦١، ٧٦٢، ٧٦٣، ٧٦٤، ٧٦٥، ٧٦٦، ٧٦٧، ٧٦٨، ٧٦٩، ٧٧٠، ٧٧١، ٧٧٢، ٧٧٣، ٧٧٤، ٧٧٥، ٧٧٦، ٧٧٧، ٧٧٨، ٧٧٩، ٧٨٠، ٧٨١، ٧٨٢، ٧٨٣، ٧٨٤، ٧٨٥، ٧٨٦، ٧٨٧، ٧٨٨، ٧٨٩، ٧٩٠، ٧٩١، ٧٩٢، ٧٩٣، ٧٩٤، ٧٩٥، ٧٩٦، ٧٩٧، ٧٩٨، ٧٩٩، ٨٠٠، ٨٠١، ٨٠٢، ٨٠٣، ٨٠٤، ٨٠٥، ٨٠٦، ٨٠٧، ٨٠٨، ٨٠٩، ٨١٠، ٨١١، ٨١٢، ٨١٣، ٨١٤، ٨١٥، ٨١٦، ٨١٧، ٨١٨، ٨١٩، ٨٢٠، ٨٢١، ٨٢٢، ٨٢٣، ٨٢٤، ٨٢٥، ٨٢٦، ٨٢٧، ٨٢٨، ٨٢٩، ٨٣٠، ٨٣١، ٨٣٢، ٨٣٣، ٨٣٤، ٨٣٥، ٨٣٦، ٨٣٧، ٨٣٨، ٨٣٩، ٨٤٠، ٨٤١، ٨٤٢، ٨٤٣، ٨٤٤، ٨٤٥، ٨٤٦، ٨٤٧، ٨٤٨، ٨٤٩، ٨٥٠، ٨٥١، ٨٥٢، ٨٥٣، ٨٥٤، ٨٥٥، ٨٥٦، ٨٥٧، ٨٥٨، ٨٥٩، ٨٦٠، ٨٦١، ٨٦٢، ٨٦٣، ٨٦٤، ٨٦٥، ٨٦٦، ٨٦٧، ٨٦٨، ٨٦٩، ٨٧٠، ٨٧١، ٨٧٢، ٨٧٣، ٨٧٤، ٨٧٥، ٨٧٦، ٨٧٧، ٨٧٨، ٨٧٩، ٨٨٠، ٨٨١، ٨٨٢، ٨٨٣، ٨٨٤، ٨٨٥، ٨٨٦، ٨٨٧، ٨٨٨، ٨٨٩، ٨٩٠، ٨٩١، ٨٩٢، ٨٩٣، ٨٩٤، ٨٩٥، ٨٩٦، ٨٩٧، ٨٩٨، ٨٩٩، ٩٠٠، ٩٠١، ٩٠٢، ٩٠٣، ٩٠٤، ٩٠٥، ٩٠٦، ٩٠٧، ٩٠٨، ٩٠٩، ٩١٠، ٩١١، ٩١٢، ٩١٣، ٩١٤، ٩١٥، ٩١٦، ٩١٧، ٩١٨، ٩١٩، ٩٢٠، ٩٢١، ٩٢٢، ٩٢٣، ٩٢٤، ٩٢٥، ٩٢٦، ٩٢٧، ٩٢٨، ٩٢٩، ٩٣٠، ٩٣١، ٩٣٢، ٩٣٣، ٩٣٤، ٩٣٥، ٩٣٦، ٩٣٧، ٩٣٨، ٩٣٩، ٩٤٠، ٩٤١، ٩٤٢، ٩٤٣، ٩٤٤، ٩٤٥، ٩٤٦، ٩٤٧، ٩٤٨، ٩٤٩، ٩٥٠، ٩٥١، ٩٥٢، ٩٥٣، ٩٥٤، ٩٥٥، ٩٥٦، ٩٥٧، ٩٥٨، ٩٥٩، ٩٦٠، ٩٦١، ٩٦٢، ٩٦٣، ٩٦٤، ٩٦٥، ٩٦٦، ٩٦٧، ٩٦٨، ٩٦٩، ٩٧٠، ٩٧١، ٩٧٢، ٩٧٣، ٩٧٤، ٩٧٥، ٩٧٦، ٩٧٧، ٩٧٨، ٩٧٩، ٩٨٠، ٩٨١، ٩٨٢، ٩٨٣، ٩٨٤، ٩٨٥، ٩٨٦، ٩٨٧، ٩٨٨، ٩٨٩، ٩٩٠، ٩٩١، ٩٩٢، ٩٩٣، ٩٩٤، ٩٩٥، ٩٩٦، ٩٩٧، ٩٩٨، ٩٩٩، ١٠٠٠، ١٠٠١، ١٠٠٢، ١٠٠٣، ١٠٠٤، ١٠٠٥، ١٠٠٦، ١٠٠٧، ١٠٠٨، ١٠٠٩، ١٠١٠، ١٠١١، ١٠١٢، ١٠١٣، ١٠١٤، ١٠١٥، ١٠١٦، ١٠١٧، ١٠١٨، ١٠١٩، ١٠٢٠، ١٠٢١، ١٠٢٢، ١٠٢٣، ١٠٢٤، ١٠٢٥، ١٠٢٦، ١٠٢٧، ١٠٢٨، ١٠٢٩، ١٠٣٠، ١٠٣١، ١٠٣٢، ١٠٣٣، ١٠٣٤، ١٠٣٥، ١٠٣٦، ١٠٣٧، ١٠٣٨، ١٠٣٩، ١٠٤٠، ١٠٤١، ١٠٤٢، ١٠٤٣، ١٠٤٤، ١٠٤٥، ١٠٤٦، ١٠٤٧، ١٠٤٨، ١٠٤٩، ١٠٥٠، ١٠٥١، ١٠٥٢، ١٠٥٣، ١٠٥٤، ١٠٥٥، ١٠٥٦، ١٠٥٧، ١٠٥٨، ١٠٥٩، ١٠٦٠، ١٠٦١، ١٠٦٢، ١٠٦٣، ١٠٦٤، ١٠٦٥، ١٠٦٦، ١٠٦٧، ١٠٦٨، ١٠٦٩، ١٠٧٠، ١٠٧١، ١٠٧٢، ١٠٧٣، ١٠٧٤، ١٠٧٥، ١٠٧٦، ١٠٧٧، ١٠٧٨، ١٠٧٩، ١٠٨٠، ١٠٨١، ١٠٨٢، ١٠٨٣، ١٠٨٤، ١٠٨٥، ١٠٨٦، ١٠٨٧، ١٠٨٨، ١٠٨٩، ١٠٩٠، ١٠٩١، ١٠٩٢، ١٠٩٣، ١٠٩٤، ١٠٩٥، ١٠٩٦، ١٠٩٧، ١٠٩٨، ١٠٩٩، ١١٠٠، ١١٠١، ١١٠٢، ١١٠٣، ١١٠٤، ١١٠٥، ١١٠٦، ١١٠٧، ١١٠٨، ١١٠٩، ١١١٠، ١١١١، ١١١٢، ١١١٣، ١١١٤، ١١١٥، ١١١٦، ١١١٧، ١١١٨، ١١١٩، ١١٢٠، ١١٢١، ١١٢٢، ١١٢٣، ١١٢٤، ١١٢٥، ١١٢٦، ١١٢٧، ١١٢٨، ١١٢٩، ١١٣٠، ١١٣١، ١١٣٢، ١١٣٣، ١١٣٤، ١١٣٥، ١١٣٦، ١١٣٧، ١١٣٨، ١١٣٩، ١١٤٠، ١١٤١، ١١٤٢، ١١٤٣، ١١٤٤، ١١٤٥، ١١٤٦، ١١٤٧، ١١٤٨، ١١٤٩، ١١٥٠، ١١٥١، ١١٥٢، ١١٥٣، ١١٥٤، ١١٥٥، ١١٥٦، ١١٥٧، ١١٥٨، ١١٥٩، ١١٦٠، ١١٦١، ١١٦٢، ١١٦٣، ١١٦٤، ١١٦٥، ١١٦٦، ١١٦٧، ١١٦٨، ١١٦٩، ١١٧٠، ١١٧١، ١١٧٢، ١١٧٣، ١١٧٤، ١١٧٥، ١١٧٦، ١١٧٧، ١١٧٨، ١١٧٩، ١١٨٠، ١١٨١، ١١٨٢، ١١٨٣، ١١٨٤، ١١٨٥، ١١٨٦، ١١٨٧، ١١٨٨، ١١٨٩، ١١٩٠، ١١٩١، ١١٩٢، ١١٩٣، ١١٩٤، ١١٩٥، ١١٩٦، ١١٩٧، ١١٩٨، ١١٩٩، ١٢٠٠، ١٢٠١، ١٢٠٢، ١٢٠٣، ١٢٠٤، ١٢٠٥، ١٢٠٦، ١٢٠٧، ١٢٠٨، ١٢٠٩، ١٢١٠، ١٢١١، ١٢١٢، ١٢١٣، ١٢١٤، ١٢١٥، ١٢١٦، ١٢١٧، ١٢١٨، ١٢١٩، ١٢٢٠، ١٢٢١، ١٢٢٢، ١٢٢٣، ١٢٢٤، ١٢٢٥، ١٢٢٦، ١٢٢٧، ١٢٢٨، ١٢٢٩، ١٢٣٠، ١٢٣١، ١٢٣٢، ١٢٣٣، ١٢٣٤، ١٢٣٥، ١٢٣٦، ١٢٣٧، ١٢٣٨، ١٢٣٩، ١٢٤٠، ١٢٤١، ١٢٤٢، ١٢٤٣، ١٢٤٤، ١٢٤٥، ١٢٤٦، ١٢٤٧، ١٢٤٨، ١٢٤٩، ١٢٥٠، ١٢٥١، ١٢٥٢، ١٢٥٣، ١٢٥٤، ١٢٥٥، ١٢٥٦، ١٢٥٧، ١٢٥٨، ١٢٥٩، ١٢٦٠، ١٢٦١، ١٢٦٢، ١٢٦٣، ١٢٦٤، ١٢٦٥، ١٢٦٦، ١٢٦٧، ١٢٦٨، ١٢٦٩، ١٢٧٠، ١٢٧١، ١٢٧٢، ١٢٧٣، ١٢٧٤، ١٢٧٥، ١٢٧٦، ١٢٧٧، ١٢٧٨، ١٢٧٩، ١٢٨٠، ١٢٨١، ١٢٨٢، ١٢٨٣، ١٢٨٤، ١٢٨٥، ١٢٨٦، ١٢٨٧، ١٢٨٨، ١٢٨٩،

٤ التمهيد

اطلب من الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (أ) ما احتمال أن تسحب عشوائياً كرة حمراء، من وعاء يحوي ٣ كرات حمراء و ٣ كرات خضراء؟
- (ب) ما احتمال أن تسحب الكرة نفسها مرتين إذا اعتبرنا أن السحب يجري مع إعادة من وعاء يحوي ٦ كرات مرقّمة من ١ إلى ٦؟
- (ج) ليكن S المتغير العشوائي الذي يمثل الحرارة القصوى في منطقة معينة. هل يمكن تعداد جميع قيم S ؟
- (د) أعط مثلاً آخر عن متغير يستحيل تعداد جميع قيمه.

٥ التدريس

المتغير العشوائي هو عدد تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية، نرسم له بالحرف X .

يكون متغيراً عشوائياً متقطعاً، عندما يأخذ قيماً قابلة للعد باستخدام أعداد صحيحة موجبة أو عندما يمكن تمثيله بنقاط منفصلة على خط الأعداد. ويكون متغيراً عشوائياً متصلًا عندما يأخذ أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو على مجموعة جزئية منها.

في المثال (١)

وضّح للطلاب كيف نوجد فضاء العينة: عند إلقاء قطعتي نقود نحصل على صفر مرة كتابة ومرة واحدة أو مرتين. ومنه نوجد مدى المتغير العشوائي X ونوعه.

في المثال (٢)

يعتبر هذا المثال تطبيق مباشر لما تعلمه الطالب حول مفهوم المتغير العشوائي ومجموعة قيمه ونوع هذا المتغير: متقطع أم لا. وضّح للطلاب أنه في تجربة ما يتغير المتغير العشوائي وفقاً لما هو مطلوب.

أشر إلى أن صنع الجدول يساعد على فهم المسألة ويسهل الحل.

(٤-١) المتغيرات العشوائية المنقطعة (المنفصلة) Discrete Random Variables

تعريف: المتغير العشوائي المنقطع يكون المتغير العشوائي X متغيراً عشوائياً متقطعاً إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) S_X (ف): هي مجموعة منقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

مثال (١)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، ليكن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الكتابات. أوجد ما يلي:

١ فضاء العينة S_X .

٢ مدى المتغير العشوائي X .

٣ نوع المتغير العشوائي X .

الحل:

١ فضاء العينة (ف) $S_X = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$

عناصر فضاء العينة S_X	عناصر مدى المتغير العشوائي X
(ص، ص)	٠
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٢

٢. مدى المتغير العشوائي $X = \{٠، ١، ٢\}$

٣. نوع المتغير العشوائي X : متقطع

حاول أن تحل

١ من تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية وليكن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الصور. أوجد ما يلي:

١ فضاء العينة.

٢ مدى المتغير العشوائي X .

٣ نوع المتغير العشوائي X .

١٤

مثال (٢)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

١ المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.

٢ المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.

٣ المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحة منه عدد الكتابات.

الحل:

١ فضاء العينة (ف) $S_X = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$

عناصر فضاء العينة S_X	عناصر مدى المتغير العشوائي X
(ص، ص)	٢
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٠

٢. مدى المتغير العشوائي $Y = \{٠، ١، ٢، ٤\}$

نوع المتغير العشوائي Y : متقطع

عناصر فضاء العينة S_X	عناصر مدى المتغير العشوائي Y
(ص، ص)	$4 = 2^2$
(ص، ك)	$1 = 1^2$
(ك، ص)	$1 = 1^2$
(ك، ك)	$0 = 0^2$

٣. مدى المتغير العشوائي $Z = \{٠، ١، ٤\}$

نوع المتغير العشوائي Z : متقطع

١٥

في المثالين (٣) و (٤)

يوضح هذان المثالان مفهوم المتغير العشوائي نظراً لأهميته وأيضاً مفهوم مدى المتغير العشوائي. كما يساعدان الطلاب على معرفة كيفية إيجاد احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة وكيفية توضيح الاحتمالات في جدول يسمى بدالة التوزيع الاحتمالي د. أشر إلى أن مجموع قيم د(س) = ١ كما هو مبين في المثالين.

في المثال (٥)

يتناول هذا المثال الفكرة التالية: مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح. شدّد على أهميتها واطلب إلى الطلاب التحقق لاحقاً في كل التمارين من أن مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي تساوي الواحد الصحيح.

في المثال (٦)

نظراً لأهمية فكرة أن مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي تساوي الواحد الصحيح وللتشديد أكثر والتركيز على هذا المفهوم أعيدت صياغة الفكرة في هذا المثال الذي يشكّل مقارنة ثانية بعد مثال (٥) للفكرة نفسها. يجب على الطالب كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للتحقق من صحة عمله.

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة (س، ر) د(س، ر) تسمى دالة التوزيع الاحتمالي.

مثال (٣)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن عدد الصور، فأوجد:

- فضاء العينة (ف).
- مدى المتغير العشوائي س.
- احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س، د(س، ر) = ل(س، ر).
- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل:

١ فضاء العينة (ف) = {ص، ك}

٢ عدد عناصر فضاء العينة: ن(ف) = ٢

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي س
ص	١
ك	٠

∴ مدى المتغير العشوائي س = {١، ٠}

∴ د(س، ر) = ل(س، ر)

∴ د(٠) = ل(٠) = ١/٢

∴ د(١) = ل(١) = ١/٢

٣ دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	د(س)
١	١/٢
٠	١/٢

لاحظ أن ل(٠) + ل(١) = ١/٢ + ١/٢ = ١

حاول أن تحل

٤ عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين وبفرض أن المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الكتابات». أوجد دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

تذكر: ل(١) = عدد عناصر فضاء العينة

١٧

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية Discrete Random Variables and Probability Distributions

(١-٤) المتغيرات العشوائية المنقطعة (المفصلة)

Discrete Random Variables

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية منقطعة أم لا:

- المتغير العشوائي س الذي يمثل عدد الكتابات.
- المتغير العشوائي س الذي يمثل ربع عدد الكتابات.
- المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مضافاً له ١.
- المتغير العشوائي ل الذي يمثل ضعف عدد الكتابات.

(٢) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن عدد الصور فأوجد:

- فضاء العينة (ف).
- مدى المتغير العشوائي س.
- احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف) د(س، ر) = ل(س، ر).
- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

(٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	د(س)
١	٠.٣
٠	٠.٢
١	٠.٣
٢	٠.٢
٣	٠.٣

فأوجد قيمة ل.

(٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مده هو: {١، ٢، ٣، ٤} وكان د(١) = ٠.١، د(٣) = ٠.٤، د(٤) = ٠.٢.

فأوجد د(٢)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

٨

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي ع
(ص، ص)	٢ = ٠ + ٢
(ص، ك)	١ = ٠ + ١
(ك، ص)	١ = ١ + ٠
(ك، ك)	٠ = ١ + ٠

∴ مدى المتغير العشوائي ع = {٢، ١، ٠}

نوع المتغير العشوائي ع: منقطع

حاول أن تحل

١ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية منقطعة أم لا:

- المتغير العشوائي س الذي يمثل عدد الكتابات.
- المتغير العشوائي س الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.
- المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مطروحاً منه ٢.

دالة التوزيع الاحتمالي

Probability Distribution Function

تعلمنا سابقاً أن المتغير العشوائي المنقطع هو دالة مدها مجموعة جزئية من ح قابلة للعد. ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مده {س، س، س، س، ...}، فإن دالة التوزيع الاحتمالي د تعرف كالتالي:

د(س، ر) = احتمال (س = ر)

أي أن د(س، ر) = ل(س، ر) لكل س، ر = ١، ٢، ٣، ...

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

س	د(س، ر)
س	د(س، ر)
س	د(س، ر)
س	د(س، ر)

١٦

في المثال (٧)

في هذا المثال قم بمراجعة مفهومي التباديل والتوافيق قبل عرضه. أشر إلى أن ترتيب العناصر غير مهم لذلك تم اعتماد التوافيق.

أشر أيضًا إلى أنه يمكن اختيار من صفر إلى ٣ كرات حمراء وليس ٤ لأن العدد الكلي للكرات الحمراء هو ٣.

ألفت انتباه الطلاب إلى إمكانية استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذا المثال، واطلب إليهم التحقق من أن مجموع قيم $D(S) = 1$.

ثم ذكّرهم بأهمية التوقع والتباين والانحراف المعياري وأن التوقع هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع بينما يقيس التباين والانحراف المعياري تشتت القيم عن القيمة المتوسطة.

أشر إلى ضرورة حفظ التعريفات للتطبيقات المباشرة في التمارين.

ل (س) = ٣ = $\frac{1}{8}$

ل (س) = ٢ = $\frac{3}{8}$

ل (س) = ١ = $\frac{3}{8}$

ل (س) = ٠ = $\frac{1}{8}$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حاول أن تحل

- ٤ عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبر عن «عدد الكتابات»، فأوجد ما يلي:
- فضاء العينة ف.
 - مدى المتغير العشوائي سـ.
 - احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.
 - دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

ملاحظة:

- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ تحقق الشرطين:
- $0 \leq D(S) \leq 1$
 - مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي تساوي الواحد الصحيح، أي أن $D(S) + D(S) + \dots + D(S) = 1$

(٥) صندوق يحوي ١٠ كرات متماثلة منها ٦ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت ٥ كرات عشوائيًا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي س يمثل عدد الكرات البيضاء، فأوجد ما يلي:

- عدد عناصر فضاء العينة (ن(ف)).
- مدى المتغير العشوائي سـ.
- احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.
- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.
- إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$

فأوجد التوقع للمتغير العشوائي سـ.

(٧) ٤ بطاقات متماثلة مرقمة بالأرقام ١، ٢، ٣، ٤، وضعت في كيس، سحبت بطاقة عشوائيًا فإذا كان سـ هو «الرقم المدون على البطاقة المسحوبة من الكيس» فأوجد:

- فضاء العينة (ف).
- مدى المتغير العشوائي سـ.
- احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.
- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.
- التوقع للمتغير العشوائي سـ.
- الجدول التالي بين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع سـ.

س	٧	٨	٩	١٠
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد:

- التوقع (μ).
- التباين (σ²).
- الانحراف المعياري (σ).

مثال (٤)

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

- فضاء العينة (ف).
- مدى المتغير العشوائي سـ.
- احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.
- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

- فضاء العينة (ف) = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ك، ك، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ك)}.

عناصر فضاء العينة ف	عدد الصور في كل عنصر
(ص، ص، ص)	٣
(ص، ص، ك)	٢
(ص، ك، ص)	٢
(ك، ص، ص)	٢
(ص، ك، ك)	١
(ك، ص، ك)	١
(ك، ك، ص)	١
(ك، ك، ك)	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٠، ١، ٢، ٣}

في المثال (١٢)

يشير هذا المثال إلى العلاقة بين دالة التوزيع التراكمي T للمتغير العشوائي المتقطع عند قيمة p واحتمال وقوع المتغير s بحيث يكون $s \leq p$ أصغر من أو يساوي p .

$$T(p) = L(s \geq p)$$

اشرح للطلاب مفهوم التراكم في الرياضيات مع إعطاء بعض الأمثلة.

في المثال (١٣)

يبيّن المثال كيفية إيجاد بعض الاحتمالات بمعلومية بعض قيم دالة التوزيع التراكمي T للمتغير العشوائي s .

في المثال (١٤)

يبيّن المثال كيفية رسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي، وهي تتكوّن من نقاط في المستوى الإحداثي. بينما دالة التوزيع التراكمي هي دالة مداها $[0, 1]$ وبيانها عبارة عن شعاعين وبعض القطع المستقيمة.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة Expectation and Variance for Discrete Random Variables

نعلم أن التوقع (الوسط) هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، والتباين هو القيمة التي تقاس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولاً: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع

Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان s متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي D ،

مدى $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

فإن التوقع للمتغير العشوائي s (يرمز له بـ $E(s)$) يكون:

التوقع $E(s) = \sum_{i=1}^n s_i \cdot D(s_i)$

أي أن: $E(s) = s_1 \cdot D(s_1) + s_2 \cdot D(s_2) + \dots + s_n \cdot D(s_n)$

مثال (٨)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي D للمتغير العشوائي المتقطع s هي:

s	١	٢	٣	٤	٥
$D(s)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

فأوجد التوقع $E(s)$ للمتغير العشوائي s .

الحل:

التوقع $E(s) = \sum_{i=1}^n s_i \cdot D(s_i)$

$$E(s) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} + \frac{8}{7} + \frac{5}{7} = \frac{27}{7}$$

حاول أن تحل

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي D للمتغير العشوائي المتقطع s هي:

s	١	٢	٣
$D(s)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

فأوجد التوقع $E(s)$ للمتغير العشوائي s .

(١٣) إذا كان s متغيراً عشوائياً ذو حدين ومعلمتيه هما $n = 10$ ، $p = 0.5$ ،

فأوجد:

(أ) $L(s = 0)$ (ب) $L(s = 4)$.

(ب) $L(s = 2) > L(s = 4)$.

(١٤) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ١٠ مرات متتالية، احسب احتمال ظهور كتابة ٤ مرات.

(١٥) عند إلقاء حجر نرد منتظم ٧ مرات متتالية، أوجد:

(أ) احتمال ظهور العدد ٢ خمس مرات.

(ب) احتمال ظهور العدد ٢ مرة واحدة على الأقل.

(ج) احتمال ظهور العدد ٢ مرة واحدة على الأكثر.

(١٦) ينتج مصنع ١٠٠ وحدة يومياً، إذا كانت نسبة إنتاج الوحدات المعيبة ٠.٣، أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة.

(١٧) إذا رمينا قطعة نقود معدنية متماثلة ١٢ مرة،

(أ) احسب احتمال الحصول على صورة ٧ مرّات.

(ب) أوجد التوقع والتباين.

(١٨) في أحد مصانع الإطارات تبين أن ٥٪ من الإطارات غير صالحة للاستعمال. إذا سحبنا ١٠ إطارات، فأوجد التوقع والتباين للإطارات غير الصالحة.

(١٩) ينتج مصنع ألعاب ٢٥٠٠ لعبة يومياً فإذا كانت نسبة إنتاج ألعاب الفاسدة ٠.٥، أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد ألعاب الفاسدة في أحد الأيام.

(٢٠) نسبة الطلاب الذين يشاركون في المسابقات العلمية في إحدى المدارس ٢٠٪. إذا تم اختيار ١٥ طالباً عشوائياً من طلاب المدرسة فأوجد احتمال أن يكون منهم ٥ طلاب يشاركون في المسابقات العلمية.

(٢١) رميت قطعة نقود متماثلة ١٦ مرة. أوجد كلاً من:

التوقع، التباين، الانحراف المعياري لعدد مرات ظهور الصورة.

عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا ٤ حالات:

• أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

• عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر ← $s = 0$

• أن تكون الكرات المسحوبة منها ٣ كرات بيضاء وواحدة حمراء ← $s = 1$

• أن تكون الكرات المسحوبة منها ٢ كرة بيضاء و٢ كرة حمراء ← $s = 2$

• أن تكون الكرات المسحوبة منها ١ كرة بيضاء و٣ كرات حمراء ← $s = 3$

• مدى المتغير العشوائي $s = \{0, 1, 2, 3\}$

$$L(s=0) = \frac{C(3,0) \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3}{C(3,0) \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C(3,1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C(3,2) \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C(3,3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0} = \frac{27}{64}$$

$$L(s=1) = \frac{C(3,1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2}{C(3,0) \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C(3,1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C(3,2) \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C(3,3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0} = \frac{27}{64}$$

$$L(s=2) = \frac{C(3,2) \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1}{C(3,0) \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C(3,1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C(3,2) \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C(3,3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0} = \frac{27}{64}$$

$$L(s=3) = \frac{C(3,3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0}{C(3,0) \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C(3,1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C(3,2) \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C(3,3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0} = \frac{27}{64}$$

دالة التوزيع الاحتمالي D للمتغير العشوائي s :

s	٠	١	٢	٣	المجموع
$D(s)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	١

حاول أن تحل

صندوق يحتوي على ١٠ كرات متماثلة منها ٧ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. سحبنا عشوائياً ٣ كرات متتالياً من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي s يمثل عدد الكرات البيضاء، فأوجد ما يلي:

١ عدد عناصر فضاء العينة (ف).

٢ مدى المتغير العشوائي s .

٣ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي s .

٤ دالة التوزيع الاحتمالي D للمتغير العشوائي s .

في المثال (١٥)

ويعتبر هذا المثال تطبيق مباشر لتجربة ذات الحدين حيث يشار إلى حساب احتمال النجاح في س من المحاولات باستخدام العلاقة: $نق س ل س (ل - ١) س - ن$ أو باستخدام جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين.

في المثالين (١٦) و (١٧)

يبين هذان المثالان كيفية إيجاد احتمال النجاح في عدد من المحاولات باستخدام العلاقة. يشكّل المثال (١٧) تطوراً حيث نوجد احتمال النجاح مرة واحدة على الأقل أو مرة على الأكثر. يمكن للمعلم إعطاء أمثلة لتركيز هذين المفهومين.

ثانياً: التباين للمتغير العشوائي المنقطع Variance for Discrete Random Variable

تعريف:
إذا كان س متغيراً عشوائياً منقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي د فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:
التباين $(\sigma^2) = \sum (س - \mu)^2 د(س)$ حيث μ هو التوقع.
الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2}$ التباين

مثال (١٥)

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,١	٠,٦	٠,٢	٠,١

أوجد:

١ التوقع (μ) .

٢ التباين (σ^2) .

٣ الانحراف المعياري (σ) .

الحل:

١ التوقع $(\mu) = \sum س د(س)$

$$= ٠,١ \times ٤ + ٠,٢ \times ٣ + ٠,٦ \times ٢ + ٠,١ \times ١ = ٠,٤ + ٠,٦ + ١,٢ + ٠,١ = ٢,٣$$

٢ التباين $(\sigma^2) = \sum (س - \mu)^2 د(س)$

$$= (٢,٣ - ٠,١)^2 \times ٠,١ + (٢,٣ - ٠,٢)^2 \times ٠,٢ + (٢,٣ - ٠,٦)^2 \times ٠,٦ + (٢,٣ - ٠,١)^2 \times ٠,١ = ٠,٦١$$

٣ الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2}$ التباين

$$= \sqrt{٠,٦١} = ٠,٧٨١٠ \approx$$

٢٥

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيها إذا كانت متغيرات عشوائية منقطعة أم لا:

(أ) المتغير العشوائي سـ الذي يمثل عدد الصور.

(ب) المتغير العشوائي سـ الذي يمثل ثلاثة أمثال عدد الصور.

(ج) المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مطروحة منه ١.

(٢) كيس به ثلاث بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣، سحب عشوائياً بطاقتان الواحدة تلو الأخرى مع الإرجاع إذا كان المتغير العشوائي سـ هو «مجموع العددين على البطاقتين». فأوجد:

(أ) فضاء العينة (ف).

(ب) مدى المتغير العشوائي (سـ).

(ج) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف): $د(س ر) = (س - س) = ر$.

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (سـ).

(٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هي:

س	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,٤

فأوجد قيمة كـ.

(٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً منقطعاً مداه هو: $\{١, ٢, ٣, ٤\}$ وكان $د(١) = ٠,١$ ، $د(٢) = ٠,٢$ ، $د(٣) = ٠,٤$

أوجد $د(٤)$ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

(٥) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ هي:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

أوجد التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

١٢

مثال (٩)

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبر عن عدد الصور، فأوجد:

١ فضاء العينة (ف).

٢ مدى المتغير العشوائي سـ.

٣ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي المنقطع سـ.

٤ دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع سـ.

٥ التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

١ فضاء العينة (ف) = $\{(ص, ص), (ص, ك), (ك, ص), (ك, ك)\}$.

٢ مدى المتغير العشوائي سـ = $\{٠, ١, ٢\}$

٣ $د(٢) = \frac{١}{٤}$ ، $د(١) = \frac{١}{٢}$ ، $د(٠) = \frac{١}{٤}$

٤ دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع سـ.

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

٥ التوقع $\mu = \sum س د(س)$

$$= \frac{١}{٤} \times ٠ + \frac{١}{٢} \times ١ + \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$$

حاول أن تحل

١ إذا كان فضاء العينة لأربع أسر لديها طفلان كالتالي:

ف = $\{(ولد, ولد), (ولد, بنت), (بنت, ولد), (بنت, بنت)\}$

فأوجد:

١ مدى المتغير العشوائي المنقطع سـ الذي يعبر عن عدد الأولاد.

٢ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

٣ دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع سـ.

٤ التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

ملاحظة:
لاحظ أن:
 $ل(س = ٢) = د(٢)$

٢٤

في المثالين (١٨) و (١٩)

يبيّن هذان المثالان كيفية حساب التوقع μ والتباين σ^2 والانحراف المعياري σ لتوزيع ذات الحدين.

في المثال (٢٠)

إذا كانت ١٪ من السيارات غير صالحة للسير فهذا يعني أن ٩٩٪ من سيارات هذا المصنع صالحة للسير.

$$L = 1 - 0.01 = 0.99$$

أشر إلى أن التوقع ٧,٩٢ يعني أنه من المتوقع أن تكون ٧,٩٢ من أصل ٨ سيارات صالحة للسير. وأن هذا العدد يصبح أكثر تعبيراً عن الواقع عند سحب عدد كبير من السيارات.

في المثال (٢١)

يهدف هذا المثال إلى تركيز مفهوم المتغير العشوائي المتصل وبيّن للطالب الفرق بينه وبين المتغير العشوائي المتقطع.

$$\sqrt{1.1396} = \sqrt{\text{التباين}} = \sigma$$

$$1.0675 \approx \sigma$$

حاول أن تحل

١١ بيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١	٠,٣

أوجد:

١ التوقع (μ).

٢ التباين (σ^2).

٣ الانحراف المعياري (σ).

دالة التوزيع التراكمي للمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

وبينا أن دالة التوزيع الاحتمالي تحقق الشرطين:

$$1 \geq d(s) \geq 0$$

$$\sum d(s) = 1$$

وتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع سـ وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة t هي احتمال وقوع المتغير العشوائي سـ بحيث يكون سـ أصغر من أو يساوي t أي أن: $F(t) = P(S \leq t)$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي ت هو x وأن المجال المقابل = المدى $[1, 0]$.

(٦) صندوق يحوي ٨ كرات متأللة منها ٦ كرات حمراء وكرتان بيضاء. سحبت عشوائياً ٣ كرات معاً من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي سـ يمثل عدد الكرات الحمراء. فأوجد ما يلي:

(١) عدد عناصر فضاء العينة (ن).

(ب) مدى المتغير العشوائي سـ.

(ج) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

(٧) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ هي:

س	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٣

أوجد التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

(٨) ٤ بطاقات متأللة مرقمة بالأرقام ٢, ٤, ٦, وضعت في كيس، سحبت بطاقة عشوائياً، إذا كان سـ هو الرقم المدون على البطاقة المسحوبة من الكيس فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي سـ.

(٩) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير عشوائي متقطع سـ.

س	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد:

(١) التوقع (μ).

(ب) التباين (σ^2).

(ج) الانحراف المعياري (σ).

(١٠) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣
د(س)	٠,١	٠,٢	٠,٣

أوجد: ت: (١-), ت: (٠), ت: (٠, ٥), ت: (١), ت: (١, ٥), حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ.

حاول أن تحل

١٠ الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير عشوائي متقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,١	٠,٣	٠,٥	٠,٥	٠,١

أوجد:

١ التوقع (μ).

٢ التباين (σ^2).

٣ الانحراف المعياري (σ).

مثال (١١)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

أوجد:

١ التوقع (μ).

٢ التباين (σ^2).

٣ الانحراف المعياري (σ).

الحل:

١ التوقع (μ) = $\sum s \cdot d(s)$

$$= 1 \times 0.43 + 2 \times 0.29 + 3 \times 0.17 + 4 \times 0.09 + 5 \times 0.02$$

$$= 1.98$$

٢ التباين (σ^2) = $\sum s^2 \cdot d(s) - \mu^2$

$$= 1 \times 0.43 + 4 \times 0.29 + 9 \times 0.17 + 16 \times 0.09 + 25 \times 0.02 - (1.98)^2$$

$$= 3.92 - 3.9216 = 0.0084$$

$$= 1.1396$$

في المثالين (٢٢) و (٢٣)

يتم في هذان المثالان كيفية استخدام دالة كثافة الاحتمال لحساب بعض الاحتمالات بإيجاد مساحة المناطق المظللة. أرشد الطلاب إلى أن المساحة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.

في المثال (٢٤)

يتم في هذا المثال استخدام دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل لإيجاد بعض الاحتمالات. ذكر الطلاب بأن مساحة المثلث القائم تساوي $\frac{1}{2} \times$ طولي ضلعي الزاوية القائمة.

في المثالين (٢٥) و (٢٦)

يعتبر هذان المثالان تطبيق مباشر يهدف إلى تركيز مفهوم التوزيع الاحتمالي المنتظم وشروطه وكيفية حساب التوقع والتباين لدالة كثافة الاحتمال. ذكر الطلاب بأن المساحة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات تساوي ١.

حاول أن تحل

١٢ الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع -س-.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

أوجد: ت(١)، ت(٣، ٥)، ت(٤)، ت(٥)

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي -س-:

$$١ \text{ ل } (١ > -س \geq ٠) = \text{ت}(٠) - \text{ت}(١)$$

$$٢ \text{ ل } (١ < -س) = ١ - \text{ت}(١)$$

$$٣ \text{ ل } -س = ١ - \text{ت}(١)$$

مثال (١٣)

الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المنقطع -س-.

س	١	٢	٣	٤	٥
ت(س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٢٦	١	١

أوجد:

$$١ \text{ ل } (١ > -س \geq ٣)$$

$$٢ \text{ ل } (٢ > -س \geq ٥)$$

$$٣ \text{ ل } (-س < ٢)$$

الحل:

$$١ \text{ ل } (١ > -س \geq ٣) = \text{ت}(٣) - \text{ت}(١)$$

$$= ٠,٢٦ - ٠,١٥$$

$$= ٠,١١$$

(١١) الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المنقطع -س-.

س	٢-	٠	٢	٤
ت(س)	٠,١٥	٠,٣٠	٠,٧٥	١

أوجد:

$$(١) \text{ ل } (٢ > -س \geq ٤)$$

$$(ب) \text{ ل } (٠ > -س \geq ٤)$$

$$(ج) \text{ ل } (-س < ٠)$$

(١٢) لتكن دهي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي -س- كما في الجدول التالي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي -س-.

(١٣) إذا كان -س- متغيراً عشوائياً ذو حدين ومعلمته هما: ن = ٨، ل = ١، ٠

فأوجد:

$$(١) \text{ ل } (-س = \text{صفر})$$

$$(ب) \text{ ل } (١ > -س \geq ٤)$$

(١٤) عند لقاء قطعة نقود معدنية متائلة ثلاث مرات متتالية وملاحظة الوجه العلوي ليكن -س- المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور كتابة.

(أ) أوجد فضاء العينة (ف).

(ب) أوجد مدى المتغير العشوائي (-س).

(ج) أوجد احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف).

(د) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي -س-.

(هـ) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي -س-.

(و) أوجد دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي -س-.

تذكر:

نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز د. ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز ت.

مثال (١٢)

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المنقطع -س-.

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥

أوجد: ت(٢)، ت(٣)، ت(٤)، ت(٥)، ت(٥)، ت(٧)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي -س-.

الحل:

$$\text{ت}(٢) = \text{ل}(-س \geq ٢)$$

$$= \text{ل}(-س > ٢) + \text{ل}(-س = ٢)$$

$$= \text{صفر} + \text{صفر}$$

$$\text{ت}(٣) = \text{ل}(-س \geq ٣) = \text{ل}(-س > ٣) + \text{ل}(-س = ٣)$$

$$= \text{ل}(-س = ٣) + \text{ل}(-س = ٤)$$

$$= ٠,٣ + ٠,٤$$

$$= ٠,٧$$

$$\text{ت}(٤) = \text{ل}(-س \geq ٤) = \text{ل}(-س = ٤) + \text{ل}(-س = ٥)$$

$$= \text{ل}(-س = ٤) + \text{ل}(-س = ٥)$$

$$= ٠,٤ + ٠,٥$$

$$= ٠,٩$$

$$\text{ت}(٥) = \text{ل}(-س \geq ٥) = \text{ل}(-س = ٥) + \text{ل}(-س = ٦) + \text{ل}(-س = ٧)$$

$$= ٠,٥ + ٠,٣ + ٠,٢$$

$$= ٠,٩$$

$$\text{ت}(٥) = \text{ل}(-س \geq ٥) = ١ - \text{ل}(-س < ٥)$$

$$= ١ - (\text{ل}(-س = ٢) + \text{ل}(-س = ٣) + \text{ل}(-س = ٤) + \text{ل}(-س = ٥))$$

$$= ١ - (٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٤ + ٠,٥)$$

$$= ١ - ١,٤$$

$$= ٠$$

في المثال (٢٧)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (٤)، لإيجاد بعض الاحتمالات. ذكر الطلاب بأننا نستخدم الجدول رقم (٤)، لأن $z \leq 2$ صفر. تحقق من أن الطلاب يجيدون استخدام هذا الجدول.

في المثال (٢٨)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (٥) لإيجاد بعض الاحتمالات. أشر إلى أن قيم z سالبة. ناقش مع الطلاب البند (ج) من السؤال لأنه يتوجب علينا في هذه الحالة استخدام كل من الجدولين رقم (٤) ورقم (٥) نظرًا لأن قيم z هي بين -٣، ١ (عدد سالب) و ٢٨، ٠ (عدد موجب).

في المثال (٢٩)

يوضح هذا المثال كيفية حساب احتمالات تتعلق بالمتغير x ، إذا كان لهذا المتغير التوزيع الطبيعي μ و σ ، أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 ويوضح أيضًا كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في آخر الوحدة.

مثال (١٤)

لكن دهي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٤	٠,٣

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x .

الحل:

رسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي:

تمثل قيم x على المحور السيني وقيم الدالة $D(x)$ على المحور الصادي.

بيان دالة التوزيع الاحتمالي

حاول أن تحل

لكن دهي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,١	٠,٢	٠,١٥	٠,٠٥

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x .

- (١٥) عند إلقاء حجر نرد منتظم ٥ مرات متتالية، أوجد:
- احتمال ظهور العدد ٤ ثلاث مرات.
 - احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأقل.
 - احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأكثر.
- (١٦) عند إلقاء قطعة نقود معدنية متتالية ثلاث مرات متتالية، أوجد احتمال ظهور «صورتين فقط».
- (١٧) أسرة تضم ستة أطفال، إذا كان احتمال أن يكون أي طفل ذكر هو ٠,٥.
- أوجد:
 - احتمال أن يكون بينهم ثلاثة ذكور فقط.
 - احتمال أن يكون عدد الذكور أقل من عدد الإناث.
- (١٨) ينتج مصنع أجهزة حاسوب ٢٥٠ جهازًا يوميًا. إذا كانت نسبة إنتاج الأجهزة المعيبة ٠,٠٢ فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الأجهزة المعيبة في أحد الأيام.
- (١٩) ينتج مصنع أجهزة تلفاز وكانت نسبة الأجهزة التي عوّي عيبًا في الإنتاج تساوي ٠,٠١. إذا تمّ عشوائيًا سحب ١٥ وحدة من إنتاج المصنع، فأوجد التوقع والتباين للأجهزة الصالحة للاستعمال.

ل (٢) $x \geq 2$ $= 1 - P(x < 2) = 1 - 0,8 = 0,2$

ل (٣) $x < 2$ $= 1 - P(x \geq 2) = 1 - 0,2 = 0,8$

حاول أن تحل

بيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي T للمتغير العشوائي المنقطع x .

س	١	٢	٣	٤
ت(س)	٠,٢٥	٠,٤٠	٠,٦٥	١

أوجد:

ل (١) $x \geq 4$

ل (٢) $x < 3$

بيان دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنقطع x .

Graph of Probability Distribution Function and Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable x .

أولاً: بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع x .

نعلم أن دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة $(x, P(x))$ ، وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي هو عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي.

٦ الربط

توفر معظم الأمثلة فرصة للتعرف على كيفية استخدام المتغيرات العشوائية في مواقف حياتية، كما وتبين الأمثلة ١، ٢، ٣، ٤، ٧، ٩، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢٩ أحد المجالات المتعددة التي يمكن فيها استخدام المتغيرات العشوائية المتصلة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد قيم المتغير واحتساب $L(S = S)$. ذكّرهم دائماً أن $L(S = S)$ ل (س = س) = ١، وأن الطريقة المتبعة لإيجاد الاحتمال نستخدم فيها التوافق فقط. أعط الأمثلة التالية:

أوجد احتمال سحب كرتين خضراوين في الوقت نفسه من علبة تحتوي على ٣ كرات خضراء و ٢ صفراء.

شدّد للطلاب على أنه عند احتساب القيمة المعيارية المناظرة

لقيمة u باستخدام العلاقة: $u = \frac{S - \mu}{\sigma}$ ، يجب الانتباه إلى الترتيب $S - \mu$ وليس $\mu - S$ وقم بالتحقق من دقة استخدامهم للجدولين (٤) و (٥).

٨ التقييم

من المهم جداً متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على حل الأسئلة وفهمها وإيجاد الاحتمالات المناسبة.

اختبار سريع

١ لدينا الجدول التالي:

س	٣	٥	٧	٩
د(س)	٠,١	ك	٠,٤	٠,٢

(أ) أوجدك. $ك = ٠,٣$

(ب) أوجد التوقع والاحتمال.

$$\mu = ٦,٤ \quad \sigma^2 = ٣,٢٤$$

Binomial Distribution

توزيع ذات الحدين

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتوياً على عنصرين فقط:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختباراً في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى بتجربة ذات الحدين.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

- تتكون التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة والمتماثلة.
- (المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).
- كل محاولة يكون لها ناتجان فقط (نجاح أو فشل).
- احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتاً من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز p . وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة **Bernoulli**.

فمثلاً إذا أجريت تجربة برنولي عدد n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان q هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في n من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$L(S = s) = \text{د(س)} = \text{ق(س)} \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s} \quad \text{حيث:}$$

- n - عدد المحاولات.
 - مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
 - s - عدد مرات النجاح من n في المحاولات
 - L - احتمال النجاح
- (١ - L) - احتمال الفشل
- يسمى توزيع المتغير العشوائي S **بتوزيع ذات الحدين** للمتغيرين L ، n .

٣٢

مثال (١٥)

إذا كان S متغيراً عشوائياً ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = ٧$ ، $L = ٠,١$ ، فأوجد:

١ ل (س = ٠) (صفر)

٢ ل (١ > س ≥ ٣)

الحل:

$$\text{١: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢: ل (١ > س ≥ ٣) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٣: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٤: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٥: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٦: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٧: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٨: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٩: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٠: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١١: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٢: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٣: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٤: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٥: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٦: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٧: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٨: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{١٩: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢٠: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢١: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢٢: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢٣: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢٤: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

$$\text{٢٥: ل (س = ٠) = د(س) = ق(س) \cdot L^{s-1} \cdot (1-L)^{n-s}$$

٣٣

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ تحقق من إجابات الطلاب (يمكن تكوين جدول).

٢ (أ) ل (م = ٠) = $\frac{1}{4} = \frac{6}{36}$

ل (م = ١) = $\frac{1}{3} = \frac{12}{36}$

ل (م = ٢) = $\frac{1}{3} = \frac{12}{36}$

(ب) ل (م = ٣) = ١ - [ل (م = ٠) + ل (م = ١) + ل (م = ٢)]

= $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

٣ (أ) النتائج الممكنة: ٠، ١، ٢

(ب) ل (م = ٠) = $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$

ل (م = ١) = $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

ل (م = ٢) = $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 1 - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} &= 1 - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \times 5 &= 2, 5 = \frac{5}{2} \\ \text{التباين } \sigma^2 &= \frac{1}{4} \times 5 = 1, 25 \\ \text{الانحراف المعياري } \sigma &= \sqrt{1, 25} = 1, 1180 \approx \end{aligned}$$

حاول أن تحل

١٩ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

مثال (٢٠)

في أحد مصانع السيارات تبين أن ١٪ من السيارات غير صالحة للسير. إذا سجننا ٨ سيارات، فأوجد التوقع والتباين والتباين للصالحات للسير.

الحل:

$$\begin{aligned} \therefore A = 0, 01 \quad \therefore \text{نسبة السيارات الصالحة للسير: } 0, 99 = 1 - 0, 01 \\ \therefore \text{التوقع } \mu = 8 \times 0, 99 = 7, 92 \\ \text{التباين } \sigma^2 = 8 \times (1 - 0, 01) \times 0, 99 = 7, 92 \times 0, 99 = 7, 8412 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٢٠ من بين ١٠٠ زبون، أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري.

تمارين موضوعية

- في التمارين (١١-١)، عبارات، ظلّل (١) إذا كانت العبارة صحيحة، (٢) إذا كانت العبارة خاطئة.
- (١) التوقع هو القيمة التي تقاس تشتت قيم المتغير العشوائي المنقطع عن قيمته المتوسطة. (١)
 - (٢) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المنقطع. (١)
 - (٣) دالة التوزيع التراكمي T للمتغير العشوائي المنقطع عند القيمة k هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون $X \leq k$ أو يساوي k . (١)
 - (٤) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X : (١)

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠, ١	٠, ٠٥	٠, ٤	٠, ٤

(٥) قيمة k التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي ١ لدالة التوزيع الاحتمالي د

س	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	صفر

هي صفر.

- (٦) لدالة توزيع تراكمي T للمتغير العشوائي X يكون: (١)
- ل (٦) $T(x) = P(X \leq x)$ (١)
- (٧) لدالة توزيع تراكمي T للمتغير العشوائي X يكون: (١)
- ل (٦) $T(x) = 1 - P(X > x)$ (١)

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

هو:

- (٩) مدرسة فيها عدد الطلبة ٣٠٠ فإذا كانت نسبة النجاح ٦٠، فإن التوقع لعدد الطلبة الناجحين هو ١٨٠. (١)
- (١٠) عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات على التوالي فإن Z (ف) = ٦. (١)
- (١١) من تجربة إلقاء حجري ترد متباينين معاً مرة واحدة فإن احتمال ظهور عددين مجموعهما ٨ هو $\frac{1}{36}$. (١)

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المنقطع والآن نتعرض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

أولاً: التوقع $\mu = n \times p$
ثانياً: التباين $\sigma^2 = n \times p \times (1 - p)$
ثالثاً: الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$

مثال (١٨)

ينتج مصنع سيارات ٢٠٠ سيارة يومياً، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠, ٠١، فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

$$\begin{aligned} \therefore n = 200, p = 0, 01 \quad \therefore \text{عدد السيارات المعيبة في اليوم الواحد،} \\ \text{ل = نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد} = 0, 01 \\ \therefore 1 - p = 1 - 0, 01 = 0, 99 \\ \therefore \text{التوقع } \mu = n \times p = 200 \times 0, 01 = 2 \\ \text{التباين } \sigma^2 = n \times p \times (1 - p) = 200 \times 0, 01 \times 0, 99 = 1, 98 \\ \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{1, 98} \approx 1, 4071 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

١٨ ينتج مصنع سيارات ٣٥٠ سيارة يومياً، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠, ٠٢، فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

مثال (١٩)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٥ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

الحل:

$$\therefore n = 5, p = 0, 5 \quad \therefore \text{ظهور الصورة} \\ \text{ل هو احتمال ظهور صورة}$$

«حاول أن تحل»

١ (أ) فضاء العينة (ف) = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}

(ب) مدى المتغير العشوائي س = {٠، ١، ٢، ٣}

(ج) نوع المتغير العشوائي س: متقطع

٢ (أ) فضاء العينة: {(ك، ك)، (ك، ص)، (ص، ك)، (ص، ص)}

المدى: {٠، ١، ٢}

نوع المتغير: متقطع

(ب) المدى: {٠، ١، ٨}

نوع المتغير: متقطع

(ج) المدى: {٠، ١ - ٢}

نوع المتغير: متقطع

مثال (٢١)

حدّد ما إذا كانت المتغيرات التالية هي متغيرات عشوائية متصلة أو متغيرات عشوائية متقطعة:

- ١ عدد الأهداف في مباراة كرة القدم.
- ٢ الحرارة القصوى في منطقة معينة.
- ٣ طول الطلاب في الصف الثاني عشر في مدرستك.
- ٤ عدد الأخطاء في صفحة كتاب ما.

الحل:

- ١ متغير عشوائي متقطع.
- ٢ متغير عشوائي متصل.
- ٣ متغير عشوائي متصل.
- ٤ متغير عشوائي متقطع.

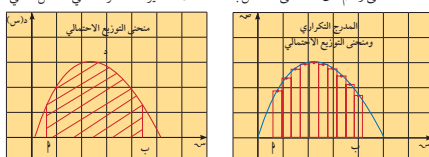
حاول أن تحل

١ أعط مثالين آخرين عن متغيرات عشوائية متصلة ومثالين عن متغيرات عشوائية متقطعة.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر)

Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:



والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل، ولذلك فإن هذه المساحة تساوي الواحد الصحيح. نسمي الدالة (د) بدالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

٣٩

في التمارين (١٢-٣٤)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(١٢) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هي:

س	١ -	٠	١	٢
د(س)	٠,٢	ك	٠,٤	٠,٢

فإن قيمة ك هي:

- ١ ٠,٣ () ٢ ٠,٤ () ٣ ٠ () ٤ ٠,٢ ()

(١٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هي:

س	١	٢	٣
د(س)	ك	ك٢	٢

فإن قيمة ك تساوي:

- ١ ٠,٥ () ٢ ٠,٢ () ٣ ١ () ٤ ٠,٤ ()

في التمارين (١٤-١٦)، استخدم الجدول التالي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

حيث د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

- (١٤) ت (١) ٠,٢ () ٢ ٠,٦ () ٣ ٠,٤ () ٤ ٠ ()
- (١٥) ت (١) ٠,٥ () ٢ ٠,٢ () ٣ ٠ () ٤ ٠,٦ ()
- (١٦) ت (٤) ٠,٢ () ٢ ٠,١ () ٣ ٠,٤ () ٤ ١ ()

١٧

(١-٤) (ب) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

Introduction

مقدمة

في كل التجارب العشوائية التي تمت دراستها حتى الآن أخذ المتغير العشوائي س عدداً محدداً ومتيناً من القيم: س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...، س، س، س، ...}.

ولكن في بعض التجارب العشوائية يأخذ المتغير العشوائي س كل القيم التي تنتمي إلى فترة محددة من مجموعة الأعداد الحقيقية -∞ مثلاً:

الزمن المستغرق للحضور من المنزل إلى المدرسة أو كمية السكر في الدم.

في هذه الحالة لم يعد ممكناً وضع جدول التوزيع الاحتمالي لكل حدث س = {س، س، س، ...}، لأن عددها لا نهائي إذ تأخذ س قيمها على الفترة المذكورة وأصبح من الضروري اعتماد مقاربة جديدة.

في ما سبق درسنا المتغير العشوائي المتقطع (المتصل) س وبيّنا أن مجموعة القيم الممكنة له هي مجموعة متقطعة قابلة للعد (متناهية أو غير متناهية).

وتكون على صورة مدى س = {س، س، س، ...}.

والآن لدينا نوعاً آخر من المتغيرات العشوائية وهو المتغير العشوائي المتصل (المستمر).

تعريف: المتغير العشوائي المتصل

هو المتغير الذي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل س = {س، س، س، ...} وهي مجموعة غير قابلة للعد.

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- وزن مجموعة من الطلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (١٥ - ٢٠) سنة هو: س = {س، س، س، ...} > ٣٥ > ٧٠
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم بالتر

س = {س، صفر > س > ٤٠}

٣٨

٣

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
(ص، ص)	٠
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٢

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

٤ (أ) فضاء العينة: $\{(ك، ك)، (ك، ص)، (ص، ك)، (ص، ص)\}$

(ك، ص، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)

(ص، ك، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ص، ص)

{(ص، ص، ص)}

(ب) المدى: $\{0, 1, 2, 3\}$ (ج) ل(س = 3) = $\frac{1}{8}$ ل(س = 2) = $\frac{3}{8}$ ل(س = 1) = $\frac{3}{8}$ ل(س = 0) = $\frac{1}{8}$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

٥ ك = $1 = (0, 2) + (0, 1) + (0, 15) + (0, 35) = 0, 2$ ٦ د(3) = $0, 15$

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$0, 1$	$0, 6$	$0, 15$	$0, 15$

٧ (أ) عناصر فضاء العينة: $10^3 = 120$ (ب) المدى: $\{0, 1, 2, 3\}$ (ج) ل(س = 0) = $\frac{10^0 \times 10^3}{120} = \frac{1}{120}$ ل(س = 1) = $\frac{10^1 \times 2 \times 10^3}{120} = \frac{21}{120}$ ل(س = 2) = $\frac{2 \times 10^1 \times 10^3}{120} = \frac{63}{120}$

خواص دالة كثافة الاحتمال د(س):

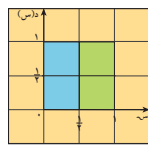
- د(س) هي دالة متصلة على مجالها.
- د(س) ≥ 0 لكل قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.
- قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
- يمكن إيجاد الاحتمال ل(س) > 0 بحساب المساحة تحت المنحنى ل بين القيمة ١، ب من الشكل السابق.
- تتعد المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان ٢ = ب أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن ل(س = ٢) = صفر

مثال (٢٢)

إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) = $\begin{cases} 1 & \text{عندما } 0 \leq س \leq 1 \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أوجد:

١ ل(س $\geq \frac{1}{2}$)٢ ل(س $\geq \frac{1}{2}$) = مساحة المنطقة المظللة بالأخضر $\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} =$ ٣ ل(س $\geq \frac{1}{2}$) = مساحة المنطقة المظللة بالأزرق $\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} =$

حاول أن تحل

٤ إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) = $\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{عندما } 0 \leq س \leq 2 \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أوجد:

١ ل(س $\geq \frac{3}{2}$)٢ ل(س $\leq \frac{3}{2}$)

٤٠

(١٧) إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيع الاحتمال د هي:

س	٠	١	٢
د(س)	$0, 25$	$0, 50$	$0, 25$

فإن التوقع له يساوي:

١ ١ ٢ ٣ ٤

٢ ١ ٢ ٣ ٤

٣ ١ ٢ ٣ ٤

٤ ١ ٢ ٣ ٤

٥ ١ ٢ ٣ ٤

٦ ١ ٢ ٣ ٤

٧ ١ ٢ ٣ ٤

٨ ١ ٢ ٣ ٤

٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٠ ١ ٢ ٣ ٤

١١ ١ ٢ ٣ ٤

١٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٩ ١ ٢ ٣ ٤

٢٠ ١ ٢ ٣ ٤

٢١ ١ ٢ ٣ ٤

٢٢ ١ ٢ ٣ ٤

٢٣ ١ ٢ ٣ ٤

٢٤ ١ ٢ ٣ ٤

٢٥ ١ ٢ ٣ ٤

٢٦ ١ ٢ ٣ ٤

٢٧ ١ ٢ ٣ ٤

٢٨ ١ ٢ ٣ ٤

٢٩ ١ ٢ ٣ ٤

٣٠ ١ ٢ ٣ ٤

٣١ ١ ٢ ٣ ٤

٣٢ ١ ٢ ٣ ٤

٣٣ ١ ٢ ٣ ٤

٣٤ ١ ٢ ٣ ٤

٣٥ ١ ٢ ٣ ٤

٣٦ ١ ٢ ٣ ٤

٣٧ ١ ٢ ٣ ٤

٣٨ ١ ٢ ٣ ٤

٣٩ ١ ٢ ٣ ٤

٤٠ ١ ٢ ٣ ٤

٤١ ١ ٢ ٣ ٤

٤٢ ١ ٢ ٣ ٤

٤٣ ١ ٢ ٣ ٤

٤٤ ١ ٢ ٣ ٤

٤٥ ١ ٢ ٣ ٤

٤٦ ١ ٢ ٣ ٤

٤٧ ١ ٢ ٣ ٤

٤٨ ١ ٢ ٣ ٤

٤٩ ١ ٢ ٣ ٤

٥٠ ١ ٢ ٣ ٤

٥١ ١ ٢ ٣ ٤

٥٢ ١ ٢ ٣ ٤

٥٣ ١ ٢ ٣ ٤

٥٤ ١ ٢ ٣ ٤

٥٥ ١ ٢ ٣ ٤

٥٦ ١ ٢ ٣ ٤

٥٧ ١ ٢ ٣ ٤

٥٨ ١ ٢ ٣ ٤

٥٩ ١ ٢ ٣ ٤

٦٠ ١ ٢ ٣ ٤

٦١ ١ ٢ ٣ ٤

٦٢ ١ ٢ ٣ ٤

٦٣ ١ ٢ ٣ ٤

٦٤ ١ ٢ ٣ ٤

٦٥ ١ ٢ ٣ ٤

٦٦ ١ ٢ ٣ ٤

٦٧ ١ ٢ ٣ ٤

٦٨ ١ ٢ ٣ ٤

٦٩ ١ ٢ ٣ ٤

٧٠ ١ ٢ ٣ ٤

٧١ ١ ٢ ٣ ٤

٧٢ ١ ٢ ٣ ٤

٧٣ ١ ٢ ٣ ٤

٧٤ ١ ٢ ٣ ٤

٧٥ ١ ٢ ٣ ٤

٧٦ ١ ٢ ٣ ٤

٧٧ ١ ٢ ٣ ٤

٧٨ ١ ٢ ٣ ٤

٧٩ ١ ٢ ٣ ٤

٨٠ ١ ٢ ٣ ٤

٨١ ١ ٢ ٣ ٤

٨٢ ١ ٢ ٣ ٤

٨٣ ١ ٢ ٣ ٤

٨٤ ١ ٢ ٣ ٤

٨٥ ١ ٢ ٣ ٤

٨٦ ١ ٢ ٣ ٤

٨٧ ١ ٢ ٣ ٤

٨٨ ١ ٢ ٣ ٤

٨٩ ١ ٢ ٣ ٤

٩٠ ١ ٢ ٣ ٤

٩١ ١ ٢ ٣ ٤

٩٢ ١ ٢ ٣ ٤

٩٣ ١ ٢ ٣ ٤

٩٤ ١ ٢ ٣ ٤

٩٥ ١ ٢ ٣ ٤

٩٦ ١ ٢ ٣ ٤

٩٧ ١ ٢ ٣ ٤

٩٨ ١ ٢ ٣ ٤

٩٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٠١ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٠٩ ١ ٢ ٣ ٤

١١٠ ١ ٢ ٣ ٤

١١١ ١ ٢ ٣ ٤

١١٢ ١ ٢ ٣ ٤

١١٣ ١ ٢ ٣ ٤

١١٤ ١ ٢ ٣ ٤

١١٥ ١ ٢ ٣ ٤

١١٦ ١ ٢ ٣ ٤

١١٧ ١ ٢ ٣ ٤

١١٨ ١ ٢ ٣ ٤

١١٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٢١ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٢٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٣١ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٣٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٤١ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٤٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٥١ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٥٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٦١ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٦٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٧١ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٧٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٨١ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٨٩ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٠ ١ ٢ ٣ ٤

١٩١ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٢ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٣ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٤ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٥ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٦ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٧ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٨ ١ ٢ ٣ ٤

١٩٩ ١ ٢ ٣ ٤

٢٠٠ ١ ٢ ٣ ٤

٢٠١ ١ ٢ ٣ ٤

٢٠٢ ١ ٢ ٣ ٤

$$L(س = 3) = \frac{35}{120} = \frac{35}{120}$$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

$$\mu = 0 \times \frac{1}{120} + 1 \times \frac{21}{120} + 2 \times \frac{63}{120} + 3 \times \frac{35}{120} = \frac{7}{3}$$

(أ) المدى $\{0, 1, 2, 3\}$

$$L(س = 2) = \frac{2}{4}, L(س = 1) = \frac{1}{4}, L(س = 0) = \frac{1}{4}$$

$$L(س = 0) = \frac{1}{4}$$

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\mu = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

(٢٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المقطع س هي:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي س يساوي:

١ (أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{4}{9}$ (د) صفر

(٢٤) عند القاء قطعة نقود منتظمة أربع مرات متتالية فإن التباين σ^2 للمتغير العشوائي س «ظهر صورة» يساوي:

٢ (أ) ١ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{9}$ (د) ٤

(٢٥) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم $-1, 0, 1, 2$ وكان $L(س = -1) = 0,6$ ، $L(س = 1) = 0,3$ فإن $L(س = 0) =$

٠,٦ (أ) ٠,٩ (ب) ٠,٤ (ج) ٠,٧ (د) ٠,٣

(٢٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً يأخذ القيم $2, 3, 4$ وكان $L(س = 2) = 0,2$ ، $L(س = 3) = 0,7$ فإن $L(س = 4) =$

٠,٣ (أ) ٠,٢ (ب) ٠,٧ (ج) ٠,٩ (د) ليس أياً مما سبق

في التمرين (٢٨، ٢٧)، أسرة تضم ٨ أطفال، إذا كان احتمال أن يكون أي طفل ذكر هو ٠,٥ فإن:

(٢٧) احتمال أن يكون بينهم ٣ ذكور فقط هو:

٠,٢١٣ (أ) ٠,٢٧٣ (ب) ٠,٣٦٣ (ج) ٠,٢١٩ (د) ٠,٣٦٩

(٢٨) احتمال أن يكون عدد الإناث يساوي عدد الذكور هو:

٠,٢١٣ (أ) ٠,٢٧٣ (ب) ٠,٣٦٣ (ج) ٠,٢١٩ (د) ٠,٣٦٩

(٢٩) ينتج مصنع سيارات ٢٠٠ سيارة في الشهر. إذا كانت نسبة السيارات المعيبة ٠,٠٢ فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في الشهر يساوي:

٢ (أ) ٤ (ب) ٢٠ (ج) ٤٠ (د) ٢٠٠

(٣٠) التوزيع الذي يمثل «توزيع احتمالي لمتغير عشوائي س» هو:

س	٠	١	٣
د(س)	٠,١١	٠,٣٢	٠,٣

(أ)

س	٢	٤	٦	٨
د(س)	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,١	٠,٠١

(ب)

س	١	٢	٣
د(س)	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,١

(ج)

س	١	٢	٣
د(س)	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٢

(د)

مثال (٢٣)

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

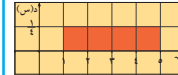
$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{عندما } 1 \leq س \leq 3 \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

١) $L(س > 1)$ ٢) $L(س > 3)$ ٣) $L(س \leq 1)$ ٤) $L(س = 2)$

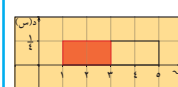
الحل:

١) نرسم بيان الدالة د(س)



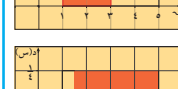
٢) $L(س > 1) = P(س \geq 2) =$ مساحة المنطقة المظلمة (المنطقة المستطيلة)

$$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



٣) $L(س > 3) = P(س \geq 4) =$ مساحة المنطقة المظلمة

$$\frac{1}{4} \times (1 - 3) = \frac{1}{4} \times (-2) = -\frac{1}{2}$$



٤) $L(س \leq 1) = P(س \leq 1) =$ مساحة المنطقة المظلمة

$$\frac{1}{4} \times (1 - 0) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

٥) $L(س = 2) =$ صفر

حاول أن تحل

٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{عندما } 3 \leq س \leq 4 \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

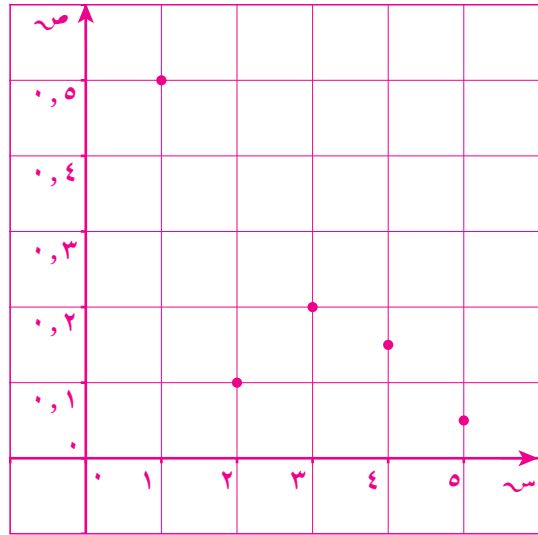
أوجد:

١) $L(س > 2)$ ٢) $L(س > 1)$ ٣) $L(س = 3)$

١٣ (أ) ل (٤ > س > ٥) = ت (٥) - ت (٤) = ٠

(ب) ل (س < ٣) = ١ - ل (س ≥ ٣) = ٠,٣٥

١٤



الحل:

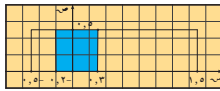
١ دهي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١

مساحة المنطقة كلها تساوي (١, ٥) - (٠, ٥) × ٠,٥ = ١

∴ دهي دالة كثافة احتمال

٢ ل (٢- > س ≥ ٠,٣) = مساحة المنطقة المظللة بالأزرق

$$= ٠,٥ \times ((٠,٣ - ٠) - (٢ - ٠,٣)) = ٠,٢٥$$



$$\frac{1}{4} = \frac{(٠,٥ - ٠) + ١,٥}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$$

$$\frac{٧((٠,٥ - ٠) - ١,٥)}{١٢} = \frac{٧(٢ - ٠)}{١٢} = ٢٥$$

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

حاول أن تحل

٣ الدالة دتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم:

$$\text{د(س)} = \frac{1}{b-a} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

١ أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة.

٢ أوجد ل (١ ≥ س ≥ ٢).

٣ أوجد التوقع والتباين.

٤٥

(٥) لتكن الدالة د:

$$\text{د(س)} = \frac{1}{3} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

(أ) أثبت أن الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

(ب) أثبت أن الدالة دتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(ج) أوجد ل (س ≥ ٤).

(د) أوجد ل (٣ ≥ س ≥ ٤).

(هـ) أوجد التوقع والتباين للدالة د.

(٦) لتكن الدالة د:

$$\text{د(س)} = \frac{1}{8} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

(أ) أثبت أن الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

(ب) أوجد ل (٠,٥ ≥ س ≥ ١).

(ج) أوجد التوقع والتباين للدالة د.

(٧) الدالة دتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرفة كما يلي:

$$\text{د(س)} = \frac{1}{7} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

(أ) أثبت أن الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

(ب) أوجد ل (٠ ≥ س ≥ ٧).

(ج) أوجد التوقع والتباين للدالة د.

(٨) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \frac{2}{3} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

فأوجد:

(أ) ل (٠ ≥ س ≥ ٣) (ب) ل (س > ١) (ج) ل (س ≤ ١)

٢٢

$$\text{د(س)} = \frac{1}{4} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

١ أثبت أن الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

٢ أوجد ل (١- > س ≥ ٢).

٣ أوجد التوقع والتباين للدالة د.



$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{وحدة مساحة} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{التوقع} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{التباين} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

حاول أن تحل

$$\text{د(س)} = \frac{1}{6} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

١ أثبت أن الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

٢ أوجد ل (١- > س ≥ ٢).

٣ أوجد التوقع والتباين للدالة د.

مثال (٢٦)

الدالة دتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرفة كما يلي:

$$\text{د(س)} = \frac{1}{3} \quad \text{في ما عدا ذلك صفر}$$

١ أثبت أن الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

٢ أوجد ل (٠,٣ ≥ س ≥ ١).

٣ أوجد التوقع والتباين للدالة د.

٤٤

$$١٥ \text{ ل (س=٢) } = ٠.٨ \times ٠.٢ \times ٠.٨ \times ٠.٢ = ٠.٢٩٣٦ \approx$$

$$\text{ل (٢} \leq \text{س} < ٤) = \text{ل (س=٢)} + \text{ل (س=٣)} \\ \approx ٠.٢٩٣٦ + ٠.١٤٦٨ = ٠.٤٤٠٤ \approx$$

$$١٦ \text{ ل (س=١٠) } = ٠.٨ \times ٠.٢ \times ٠.٨ \times ٠.٢ = ٠.٢٤٦١ \approx$$

$$١٧ \text{ (أ) ل (س=١٠) } = ٠.٨ \times ٠.٢ \times ٠.٨ \times ٠.٢ = ٠.١٦٠٧٥ \approx$$

$$\text{(ب) ل (س=١٠) } = ٠.٨ \times ٠.٢ = ٠.١٦$$

$$\text{(ج) ل (س=١٠) } = ٠.٨ \times ٠.٢ = ٠.١٦$$

(٩) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٨ - \text{س} & : ٠ \leq \text{س} \leq ٨ \\ ٠ & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

$$\text{(أ) ل (٠} \leq \text{س} < ٨) \quad \text{(ب) ل (س=٨)} \quad \text{(ج) ل (س=٠)}$$

(١٠) إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

$$\text{(أ) ل (٢} \leq \text{ن} < ١٦) \quad \text{(ب) ل (٢} \leq \text{ن} < ٥١) \quad \text{(ج) ل (٢} \leq \text{ن} < ١٠٥)$$

(١١) إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

$$\text{(أ) ل (٠} \leq \text{ن} < ٦٤) \quad \text{(ب) ل (٢} \leq \text{ن} < ٥٨) \quad \text{(ج) ل (٢} \leq \text{ن} < ١٠٢٣)$$

(١٢) يمثل المتغير العشوائي س درجات الطلاب في إحدى المواد الدراسية، إذا كان توزيع درجاته يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = ٥٠$ وانحرافه المعياري $\sigma = ١٠$ فأوجد:

$$\text{(أ) ل (٤٠} < \text{س} < ٧٦) \quad \text{(ب) ل (س=٥٥)}$$

(١٣) متغير عشوائي متصل س يتبع توزيعاً طبيعياً، التوقع $\mu = ٣٧$ ، وتباينه $\sigma^2 = ١٦$ ، أوجد:

$$\text{(أ) ل (٣٠} < \text{س} < ٣٥)$$

$$\text{(ب) ل (٣٥} < \text{س} < ٤٠)$$

$$\text{(ج) ل (س=٣٠)}$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٣ - \text{س} & : ٠ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٠ & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

$$\text{(أ) ل (٠} \leq \text{س} < ٣) \quad \text{(ب) ل (س=٣)} \quad \text{(ج) ل (س=٠)}$$

$$\text{(٢) لتكن الدالة د: د(س) = } \begin{cases} ٢ - \text{س} & : ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٠ & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(أ) ارسم الدالة د.

(ب) أثبت أن د هي دالة كثافة احتمال.

(ج) أثبت أن د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(د) أوجد: ل (س=١) ، ل (س=٢) ، ل (س=٣).

(هـ) احسب توقع والتباين المناسبين بعد تحديد التوزيع الذي تتبعه هذه الدالة.

(٣) متغير عشوائي س يتبع توزيعاً طبيعياً حيث إن التوقع $\mu = ٨٨$ والتباين $\sigma^2 = ٢٥$ ، أوجد:

$$\text{(أ) ل (س=٨٣)} \quad \text{(ب) ل (س=٧٠)} \quad \text{(ج) ل (٨٧} \leq \text{س} \leq ٩٠)$$

(٤) يمثل المتغير س الزمن الذي يستغرقه أحد الطلاب للوصول إلى المدرسة وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي توقعه $\mu = ١٥$ والتباين $\sigma^2 = ٩$. احسب احتمال وصوله بـ:

$$\text{(أ) أقل من ١٨ دقيقة} \quad \text{(ب) أكثر من ١٨ دقيقة} \quad \text{(ج) أكثر من ١٢ دقيقة وأقل من ١٥ دقيقة.}$$

التوزيع الاحتمالي الطبيعي (μ, σ^2) Natural Probability Distribution

يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:

- المتوسط الحسابي = المتوسط = المتوسط.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (س = μ).
- يمتد المنحنى من طرفه إلى $-\infty$ وإلى $+\infty$ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

التوزيع الطبيعي المعياري $(١, ٠)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = ٠$ والانحراف المعياري $\sigma = ١$ يسمى التوزيع الطبيعي بالتوزيع الطبيعي المعياري. الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين σ^2 ونظراً لاختلاف قيم μ من توزيع لآخر فنحن نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $٠ = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

وتم وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي (μ, σ^2) .

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي (μ, σ^2)

إذا كان للمتغير العشوائي س التوزيع الطبيعي (μ, σ^2) أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير س فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد ل (أ > س > ب):

- 1 نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة أ بالتعويض في العلاقة $٠ = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$ والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة ب: $٠ = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$
- 2 نستخدم العلاقة: ل (أ > س > ب) = ل (أ > ٠) - ل (ب > ٠)
- 3 نستخدم جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي جدول (٤) وجدول (٥) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

$$\mu = \sigma \cdot \sqrt{2} = 0,02 \times 350 = 7$$

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = 4,95$$

$$\approx 6,86$$

$$\sigma = \frac{6,86}{\sqrt{2}} = 4,88$$

$$\approx 2,6192$$

$$\mu = \sigma \cdot \sqrt{2} = 1 \times 8 = 8$$

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5,66$$

$$\sigma = \frac{1,4142}{\sqrt{2}} = 1,00$$

$$\mu = \sigma \cdot \sqrt{2} = 0,70 \times 100 = 70$$

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \frac{70}{\sqrt{2}} = 49,5$$

$$\sigma = \frac{21}{\sqrt{2}} = 14,85$$

$$\approx 4,0826$$

مثال (٢٨)

إذا كان U هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$$1. P(U \geq 0,55)$$

$$2. P(U \geq 2,2 - 1,6)$$

$$3. P(U \geq 1,3 - 0,28)$$

الحل:

$$1. P(U \geq 0,55) = 1 - P(U < 0,55)$$

$$= 1 - 0,7088$$

\therefore نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري U رقم (٥)

$$\therefore P(U \geq 0,55) = 1 - 0,7088$$

$$2. P(U \geq 2,2 - 1,6) = P(U \geq 0,6) = 1 - P(U < 0,6)$$

$$= 1 - 0,7257$$

$$= 0,2743$$

$$3. P(U \geq 1,3 - 0,28) = P(U \geq 1,02) = 1 - P(U < 1,02)$$

$$= 1 - 0,7967$$

$$= 0,2033$$

$$\therefore$$
 نستخدم جدول U رقم (٥)

$$\therefore P(U \geq 1,02) = 1 - 0,7967$$

$$= 0,2033$$

$$\therefore P(U \geq 1,3 - 0,28) = 0,2033$$

حاول أن تحل

٢٨. إذا كان U هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$$1. P(U \geq 0,12)$$

$$2. P(U \leq 0,25)$$

$$3. P(U \geq 3,2 - 0,1)$$

$$4. P(U \geq 0,26 - 0,69)$$

٤٨

تمارين موضوعية

في التمارين (١-٦)، عبارات، ظلّل (١) إذا كانت العبارة صحيحة، (٢) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل.

(٢) إذا كانت الدالة دالة معرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{إذا } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا } x < 0 \end{cases}$$

فإن الدالة دالة كثافة احتمال.

(٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{إذا } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا } x < 0 \end{cases}$$

فإن $P(X \leq 2) = 1$.

(٤) إذا كانت الدالة دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{إذا } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا } x < 0 \end{cases}$$

فإن التباين للدالة دالة هو $\frac{3}{4}$.

(٥) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول μ .

(٦) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد.

في التمارين (٧-٩)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{إذا } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا } x < 0 \end{cases}$$

فإن $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

١ () ٢ () ٣ () ٤ ()

٢٥

لحساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري U :

• إذا كانت $U \geq 0$ أو $U \leq 0$ ، حيث U صفر نستخدم جدول رقم (٤).

• إذا كانت $U \geq 0$ أو $U \leq 0$ ، حيث U صفر نستخدم جدول رقم (٥).

مثال (٢٧)

إذا كان U هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$$1. P(U \geq 1,8)$$

$$2. P(U \leq 1,8)$$

$$3. P(U \geq 1,8 - 0,43)$$

الحل:

$$1. P(U \geq 1,8) = 1 - P(U < 1,8)$$

$$= 1 - 0,9641$$

$$= 0,0359$$

\therefore نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري U رقم (٤) الموجود في نهاية الوحدة.

$$2. P(U \leq 1,8) = P(U \leq 1,8)$$

$$= 0,9641$$

$$3. P(U \geq 1,8 - 0,43) = P(U \geq 1,37)$$

$$= 1 - P(U < 1,37)$$

$$= 1 - 0,9142$$

$$= 0,0858$$

حاول أن تحل

٢٧. إذا كان U هو التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

$$1. P(U \geq 0,95)$$

$$2. P(U < 0,71)$$

$$3. P(U \geq 1,26 - 0,3)$$

٤٧

٢١ تنوع الإجابات. راجع عمل الطلاب.

أمثلة: متغير عشوائي متصل:

• طول طريق

• سرعة الرياح في فترة زمنية.

متغير عشوائي متقطع:

• عدد الحافلات التي تنقل الطلاب إلى إحدى المدارس.

• عدد ساعات العمل الأسبوعي في شركة ما.

$$٢٢ (أ) ل(س \geq \frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$(ب) ل(س \leq \frac{3}{4}) = 1 - ل(س > \frac{3}{4}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$٢٣ (أ) ل(س > 2) = \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}$$

$$(ب) ل(1 < س < 2) = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

$$(ج) ل(س = صفر) = صفر$$

$$٢٤ (أ) ل(س > 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{16}$$

$$(ب) ل(س \leq 1) = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$(ج) ل(س = 1) = صفر$$

$$٢٥ (أ) المساحة = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \therefore دالة كثافة احتمال$$

$$(ب) ب = 3, 3 = 2 - ب \Rightarrow ب = 1, 5 = 1 - ب$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{1 - ب} \therefore دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.$$

$$(ج) ل(1 - س \geq 2) = \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$$

$$(د) التوقع \mu = \frac{ب + 2}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{(ب - 1)^2}{12} = \frac{25}{12}$$

مثال (٢٩)

المتغير س يمثل درجات الطلاب في مادة ما وهو يتبع التوزيع الطبيعي وتوقعه $\mu = 16$ وتباينه $\sigma^2 = 16$. أوجد:

$$١ ل(14 < س < 18)$$

$$٢ ل(11 < س < 13)$$

الحل:

$$١ \sigma = 4, 16 = \mu, 16 = \mu$$

$$\text{بوضع س} = 14 \Rightarrow \frac{14 - 16}{4} = \frac{س - \mu}{\sigma} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{س} = 18 \Rightarrow \frac{18 - 16}{4} = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$ل(14 < س < 18) = ل(-\frac{1}{2} < \frac{س - \mu}{\sigma} < \frac{1}{2})$$

$$ل(\frac{1}{2} < \frac{س - \mu}{\sigma} < \frac{3}{2}) = 0.69146 \text{ من جدول (٤)}$$

$$ل(\frac{1}{2} < \frac{س - \mu}{\sigma} < \frac{3}{2}) = 0.30854 \text{ من جدول (٥)}$$

$$ل(14 < س < 18) = 0.30854 - 0.69146 = 0.38292$$

$$٢ \sigma = 4, 16 = \mu, 16 = \mu$$

$$\text{س} = 11 \Rightarrow \frac{11 - 16}{4} = \frac{س - \mu}{\sigma} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$\text{س} = 13 \Rightarrow \frac{13 - 16}{4} = \frac{س - \mu}{\sigma} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

$$ل(11 < س < 13) = ل(-1.25 < \frac{س - \mu}{\sigma} < -0.75)$$

$$\therefore ل(\frac{3}{4} < \frac{س - \mu}{\sigma} < \frac{5}{4}) = 0.22663 - 0.10605 = 0.12058$$

$$\therefore ل(11 < س < 13) = 0.12058$$

حاول أن تحل

٢٦ يمثل المتغير العشوائي س الزمن الذي يستغرقه أحد الطلاب للوصول إلى المدرسة، وهو متغير يتبع التوزيع الطبيعي وتوقعه $\mu = 16$ دقيقة وتباينه $\sigma^2 = 4$ ، احسب احتمال أنه في يوم ما سيستغرقه الطالب للوصول إلى المدرسة.

١ أقل من ٢١ دقيقة.

٢ أكثر من ١٢ دقيقة وأقل من ٢١ دقيقة.

$$٢٦ (أ) المساحة = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \therefore دالة كثافة احتمال.$$

$$(ب) ل(1 \leq س \leq 2) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$(ج) التوقع \mu = \frac{ب + ٠}{2} = \frac{3 + ٠}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{٢(٠ - 3)^2}{12} = \frac{9}{12}$$

$$٢٧ (أ) ل(٠, 95 \leq س) = 0.82894$$

$$(ب) ل(٠, 71 < س) = 1 - ل(٠, 71 \geq س) = 0.71$$

$$٠, ٢٣٨٨٥ = ٠, ٧٦١١٥ - ١ =$$

$$(ج) ل(١, ٤٥ \geq س \geq ٣, ٢٦) =$$

$$ل(٣, ٢٦ \geq س) - ل(١, ٤٥ \geq س) =$$

$$٠, ٩٩٩٤٤ - ٠, ٩٢٦٤٧ =$$

$$٠, ٠٧٢٩٧ =$$

٢٨ (أ) $L(0, 12 - \geq u) = 0,45224$

(ب) $L(0, 25 \leq u) - 1 = L(0, 25 \geq u) - 1$

$= 0,59871 - 1 =$

$0,40129 =$

(ج) $L(0, 1 - \geq u \geq 3, 2 -) =$

$L(0, 1 - \geq u) - L(3, 2 - \geq u) =$

$= 0,46017 - 0,0069 = 0,45327 =$

(د) $L(0, 69 \geq u \geq 1, 26 -) =$

$L(0, 69 \geq u) - L(1, 26 - \geq u) =$

$= 0,75490 - 0,10383 = 0,65107 =$

٢٩ (أ) $2 = \sigma$

بوضع $s_1 = 21 \leq u = \frac{s_1 - \mu}{\sigma} = \frac{21 - 21}{2} =$

$2,5 =$

$L(s_1 > 21) = L(u > 2,5) = 0,99379 =$

(ب) بوضع $s_2 = 12 \leq u = \frac{s_2 - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 21}{2} =$

$\frac{12 - 21}{2} =$

$2 - =$

$L(12 > s_2 > 21) = L(u > 2,5) - L(u > 2 -) =$

$= 0,99379 - 0,2275 =$

$0,76629 =$

(٨) إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

(دس) $= \begin{cases} \frac{1}{5} & : 2 \leq s \leq 3 \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

فإن لـ (سـ $\geq 2, 5 -$) =

(د) $\frac{1}{10}$

(ج) $\frac{1}{5}$

(ب) ١

(أ) صفر

(٩) إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

(دس) $= \begin{cases} 2s & : 0 \leq s \leq 1 \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

فإن لـ (سـ $< \frac{1}{3}$) =

(د) $\frac{1}{3}$

(ج) $\frac{1}{4}$

(ب) $\frac{3}{4}$

(أ) ١

في التمارين (١٠-١٦)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:

(١٠) الدالة التي تعبر عن الرسم البياني التالي هي:

(دس) $= \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < s < \frac{3}{4} \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(دس) $= \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < s < \frac{4}{3} \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(دس) $= \begin{cases} \frac{4}{3} & : 0 < s < \frac{4}{3} \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(دس) $= \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < s < 4 \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(١١) الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي:

(د) المنتظم

(ج) الطبيعي المعياري

(ب) ذات الحدين

(١٢) التوقع هو:

(د) $\frac{3}{4}$

(ج) $\frac{4}{3}$

(ب) $\frac{2}{3}$

(أ) $\frac{5}{6}$

٢٦

(١٣) التباين هو:

(د) $\frac{108}{16}$

(ج) $\frac{16}{108}$

(ب) $\frac{16}{9}$

(أ) $\frac{4}{27}$

(١٤) $L(s_1 > \frac{4}{3}) =$

(د) $\frac{1}{3}$

(ج) $\frac{1}{6}$

(ب) $\frac{1}{4}$

(أ) $\frac{1}{3}$

(١٥) $L(s_1 < \frac{4}{12}) =$

(د) ١

(ج) $\frac{3}{4}$

(ب) $\frac{7}{8}$

(أ) $\frac{2}{3}$

(١٦) $L(1 > s_2 > 0) =$

(د) $\frac{3}{4}$

(ج) ١

(ب) $\frac{1}{3}$

(أ) $\frac{4}{9}$

(١٧) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د، والمحور السيني تساوي:

(د) ٢

(ج) $\frac{4}{3}$

(ب) ١

(أ) $\frac{4}{3}$

(١٨) إذا كان ت يتبع التوزيع الطبيعي فإن $L(0 \leq u \leq 2, 35) = \dots =$

(د) ٠,٢١٨

(ج) ٠,٤٩٠٦

(ب) ٠,٥

(أ) ٠,٩٩٠٦

(١٩) إذا كان ت متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فإن $L(P < 1)$ لا يساوي:

(ب) $1 - L(P > 1)$

(أ) $L(P \leq 1)$

(د) $1 - L(P \geq 1)$

(ج) $L(P \geq 1)$

٢٧

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

$$(أ) \mu = 20 ; \sigma^2 = 4$$

$$(ب) L(س \geq 19,5) = L(ص \geq 20,5) = 0,25$$

$$= 0,4013$$

$$(ج) L(20 \leq س \leq 22) = L(0 \leq ص \leq 2) =$$

$$L(ص \geq 0) - L(ص \geq 2) =$$

$$= 0,5000 - 0,84134 =$$

$$= 0,34134$$

المرشد لحل المسائل

يبيع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي ط(٤٠٠٠٠٠,٥٠٠٠٠) أوجد التوقع والتباين.

ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقل من ٤٠٠٠٠ دينار كويتي؟

ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين ٤٥٠٠٠ و ٦٥٠٠٠ دينار كويتي؟

ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من ٧٠٠٠٠ دينار كويتي؟

الحل:

١ التوزيع الطبيعي ط(٤٠٠٠٠٠,٥٠٠٠٠) توقعه $\mu = 40000$

تباينه $\sigma^2 = 4000000$

٢ ل(س > ٤٠٠٠٠) = ل(ص > ٥) = $\frac{50000 - 40000}{\sqrt{4000000}} = \frac{10000}{2000} = 5$

باستخدام الجدول (٥):

ل(ص > ٥) = ٠,٣٠٨٥٤

∴ ل(س > ٤٠٠٠٠) = ٠,٣٠٨٥٤

ل(٤٥٠٠٠ < س < ٦٥٠٠٠) = ل(٥ < ص < ٢٥) =

ل(٥ < ص < ٢٥) = ل(٥ < ص < ٢٥) = ٠,٣٧٢٠٦ - ٠,٧٧٣٣٥ =

٠,٣٧٢٠٦ - ٠,٧٧٣٣٥ = ٠,٤٠١٢٩

∴ ٣٧,٢١٪ من الموظفين رواتبهم بين ٤٥٠٠٠ و ٦٥٠٠٠ دينار كويتي.

٣ ل(س < ٧٠٠٠٠) = ١ - ل(س > ٧٠٠٠٠) =

١ - ٠,٨٤١٣٤ = ٠,١٥٨٦٦

∴ ١٥,٨٧٪ من الموظفين رواتبهم أكثر من ٧٠٠٠٠ دينار كويتي.

مسألة إضافية

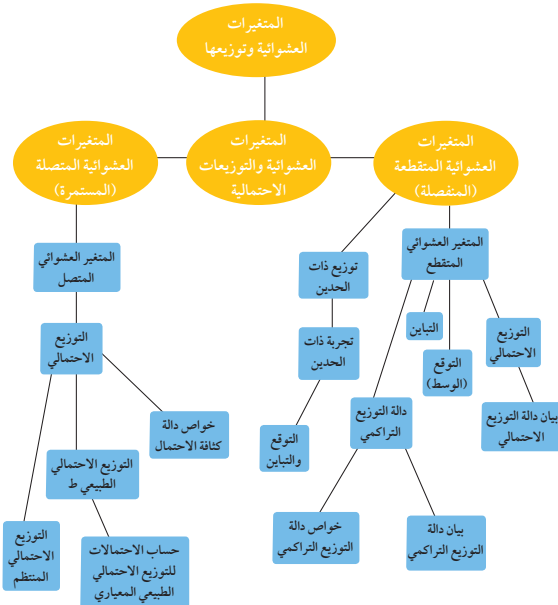
الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يبيع التوزيع الطبيعي ط(٤,٢٠) أوجد التوقع والتباين.

ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من ١٩,٥ ساعة؟

ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين ٢٠ و ٢٢ ساعة؟

٥٠

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

[illegible]

جدول (۲)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ل										ن	س
٢٠٩٥	٢٠٩٦	٢٠٩٧	٢٠٩٨	٢٠٩٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤	٢٠١٥	٢٠١٦
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	١١
				٢٠١٠١	٢٠١٠٥	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	١
			٢٠١٠١	٢٠١٠٥	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٢٠١١٦	٢
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٣
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٤
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٥
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٦
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٧
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٨
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	٩
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	١٠
			٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠١	٢٠١٠٧	٢٠١٠٨	٢٠١١٣	٢٠١١٤	٢٠١١٥	١١
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	١٢
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	١
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٢
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٣
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٤
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٥
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٦
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٧
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٨
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	٩
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	١٠
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	١١
						٢٠١٠٤	٢٠١٠٦	٢٠١٠٧	٢٠١٠٩	٢٠١١٠	١٢

جدول (۳)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

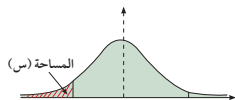
ل											ن	س
٢٠٥٠	٢٠٠٩	٢٠٠٨	٢٠٠٧	٢٠٠٦	٢٠٠٥	٢٠٠٤	٢٠٠٣	٢٠٠٢	٢٠٠١	٢٠٠٠		
						٢٠٠١	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	١٣	
						٢٠٠٢	٢٠٠١	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	١	
						٢٠٠٣	٢٠٠٢	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢	
						٢٠٠٤	٢٠٠٣	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٣	
						٢٠٠٥	٢٠٠٤	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٤	
						٢٠٠٦	٢٠٠٥	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٥	
						٢٠٠٧	٢٠٠٦	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٦	
						٢٠٠٨	٢٠٠٧	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٧	
						٢٠٠٩	٢٠٠٨	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٨	
						٢٠١٠	٢٠٠٩	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٩	
٢٠٠١٣	٢٠٠٠٨	٢٠٠٠٧	٢٠٠٠٦	٢٠٠٠٥	٢٠٠٠٤	٢٠٠٠٣	٢٠٠٠٢	٢٠٠٠١			١٠	
٢٠١١١	٢٠١٠٥	٢٠١٠٤	٢٠١٠٣	٢٠١٠٢	٢٠١٠١	٢٠١٠٠					١١	
٢٠٢٥١	٢٠٢٣٧	٢٠١٩٨	٢٠١٥١	٢٠١٠٢							١٢	
٢٠٥١٣	٢٠٢٥١	٢٠٢٠٥	٢٠١٠١								١٣	
						٢٠٠١	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	١٤	
						٢٠٠٢	٢٠٠١	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	١	
						٢٠٠٣	٢٠٠٢	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢	
						٢٠٠٤	٢٠٠٣	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٣	
						٢٠٠٥	٢٠٠٤	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٤	
						٢٠٠٦	٢٠٠٥	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٥	
						٢٠٠٧	٢٠٠٦	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٦	
						٢٠٠٨	٢٠٠٧	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٧	
						٢٠٠٩	٢٠٠٨	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٨	
						٢٠١٠	٢٠٠٩	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٩	
٢٠٠٠٤	٢٠٠٠٣	٢٠٠٠٢	٢٠٠٠١	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	١٠	
٢٠٠٢٦	٢٠٠١١	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	١١	
٢٠١٣٣	٢٠٠١٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	١٢	
٢٠٢٥٩	٢٠٢٥١	٢٠١٥١	٢٠١٠١								١٣	
٢٠٤٨٨	٢٢٤٠٤	٢٠١٠٠									١٤	

تابع - جدول (۳)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

س		٢٠١٥	٢٠١٦	٢٠١٧	٢٠١٨	٢٠١٩	٢٠٢٠	٢٠٢١	٢٠٢٢	٢٠٢٣	٢٠٢٤	٢٠٢٥	٢٠٢٦	٢٠٢٧	٢٠٢٨	٢٠٢٩	٢٠٣٠	٢٠٣١	٢٠٣٢	٢٠٣٣	٢٠٣٤	٢٠٣٥	٢٠٣٦	٢٠٣٧	٢٠٣٨	٢٠٣٩	٢٠٤٠	٢٠٤١	٢٠٤٢	٢٠٤٣	٢٠٤٤	٢٠٤٥	٢٠٤٦	٢٠٤٧	٢٠٤٨	٢٠٤٩	٢٠٥٠	٢٠٥١	٢٠٥٢	٢٠٥٣	٢٠٥٤	٢٠٥٥	٢٠٥٦	٢٠٥٧	٢٠٥٨	٢٠٥٩	٢٠٦٠	٢٠٦١	٢٠٦٢	٢٠٦٣	٢٠٦٤	٢٠٦٥	٢٠٦٦	٢٠٦٧	٢٠٦٨	٢٠٦٩	٢٠٧٠	٢٠٧١	٢٠٧٢	٢٠٧٣	٢٠٧٤	٢٠٧٥	٢٠٧٦	٢٠٧٧	٢٠٧٨	٢٠٧٩	٢٠٨٠	٢٠٨١	٢٠٨٢	٢٠٨٣	٢٠٨٤	٢٠٨٥	٢٠٨٦	٢٠٨٧	٢٠٨٨	٢٠٨٩	٢٠٩٠	٢٠٩١	٢٠٩٢	٢٠٩٣	٢٠٩٤	٢٠٩٥	٢٠٩٦	٢٠٩٧	٢٠٩٨	٢٠٩٩	٢١٠٠	٢١٠١	٢١٠٢	٢١٠٣	٢١٠٤	٢١٠٥	٢١٠٦	٢١٠٧	٢١٠٨	٢١٠٩	٢١١٠	٢١١١	٢١١٢	٢١١٣	٢١١٤	٢١١٥	٢١١٦	٢١١٧	٢١١٨	٢١١٩	٢١٢٠	٢١٢١	٢١٢٢	٢١٢٣	٢١٢٤	٢١٢٥	٢١٢٦	٢١٢٧	٢١٢٨	٢١٢٩	٢١٣٠	٢١٣١	٢١٣٢	٢١٣٣	٢١٣٤	٢١٣٥	٢١٣٦	٢١٣٧	٢١٣٨	٢١٣٩	٢١٤٠	٢١٤١	٢١٤٢	٢١٤٣	٢١٤٤	٢١٤٥	٢١٤٦	٢١٤٧	٢١٤٨	٢١٤٩	٢١٥٠	٢١٥١	٢١٥٢	٢١٥٣	٢١٥٤	٢١٥٥	٢١٥٦	٢١٥٧	٢١٥٨	٢١٥٩	٢١٦٠	٢١٦١	٢١٦٢	٢١٦٣	٢١٦٤	٢١٦٥	٢١٦٦	٢١٦٧	٢١٦٨	٢١٦٩	٢١٧٠	٢١٧١	٢١٧٢	٢١٧٣	٢١٧٤	٢١٧٥	٢١٧٦	٢١٧٧	٢١٧٨	٢١٧٩	٢١٨٠	٢١٨١	٢١٨٢	٢١٨٣	٢١٨٤	٢١٨٥	٢١٨٦	٢١٨٧	٢١٨٨	٢١٨٩	٢١٩٠	٢١٩١	٢١٩٢	٢١٩٣	٢١٩٤	٢١٩٥	٢١٩٦	٢١٩٧	٢١٩٨	٢١٩٩	٢٢٠٠	٢٢٠١	٢٢٠٢	٢٢٠٣	٢٢٠٤	٢٢٠٥	٢٢٠٦	٢٢٠٧	٢٢٠٨	٢٢٠٩	٢٢١٠	٢٢١١	٢٢١٢	٢٢١٣	٢٢١٤	٢٢١٥	٢٢١٦	٢٢١٧	٢٢١٨	٢٢١٩	٢٢٢٠	٢٢٢١	٢٢٢٢	٢٢٢٣	٢٢٢٤	٢٢٢٥	٢٢٢٦	٢٢٢٧	٢٢٢٨	٢٢٢٩	٢٢٣٠	٢٢٣١	٢٢٣٢	٢٢٣٣	٢٢٣٤	٢٢٣٥	٢٢٣٦	٢٢٣٧	٢٢٣٨	٢٢٣٩	٢٢٤٠	٢٢٤١	٢٢٤٢	٢٢٤٣	٢٢٤٤	٢٢٤٥	٢٢٤٦	٢٢٤٧	٢٢٤٨	٢٢٤٩	٢٢٥٠	٢٢٥١	٢٢٥٢	٢٢٥٣	٢٢٥٤	٢٢٥٥	٢٢٥٦	٢٢٥٧	٢٢٥٨	٢٢٥٩	٢٢٦٠	٢٢٦١	٢٢٦٢	٢٢٦٣	٢٢٦٤	٢٢٦٥	٢٢٦٦	٢٢٦٧	٢٢٦٨	٢٢٦٩	٢٢٧٠	٢٢٧١	٢٢٧٢	٢٢٧٣	٢٢٧٤	٢٢٧٥	٢٢٧٦	٢٢٧٧	٢٢٧٨	٢٢٧٩	٢٢٨٠	٢٢٨١	٢٢٨٢	٢٢٨٣	٢٢٨٤	٢٢٨٥	٢٢٨٦	٢٢٨٧	٢٢٨٨	٢٢٨٩	٢٢٩٠	٢٢٩١	٢٢٩٢	٢٢٩٣	٢٢٩٤	٢٢٩٥	٢٢٩٦	٢٢٩٧	٢٢٩٨	٢٢٩٩	٢٣٠٠	٢٣٠١	٢٣٠٢	٢٣٠٣	٢٣٠٤	٢٣٠٥	٢٣٠٦	٢٣٠٧	٢٣٠٨	٢٣٠٩	٢٣١٠	٢٣١١	٢٣١٢	٢٣١٣	٢٣١٤	٢٣١٥	٢٣١٦	٢٣١٧	٢٣١٨	٢٣١٩	٢٣٢٠	٢٣٢١	٢٣٢٢	٢٣٢٣	٢٣٢٤	٢٣٢٥	٢٣٢٦	٢٣٢٧	٢٣٢٨	٢٣٢٩	٢٣٣٠	٢٣٣١	٢٣٣٢	٢٣٣٣	٢٣٣٤	٢٣٣٥	٢٣٣٦	٢٣٣٧	٢٣٣٨	٢٣٣٩	٢٣٤٠	٢٣٤١	٢٣٤٢	٢٣٤٣	٢٣٤٤	٢٣٤٥	٢٣٤٦	٢٣٤٧	٢٣٤٨	٢٣٤٩	٢٣٥٠	٢٣٥١	٢٣٥٢	٢٣٥٣	٢٣٥٤	٢٣٥٥	٢٣٥٦	٢٣٥٧	٢٣٥٨	٢٣٥٩	٢٣٦٠	٢٣٦١	٢٣٦٢	٢٣٦٣	٢٣٦٤	٢٣٦٥	٢٣٦٦	٢٣٦٧	٢٣٦٨	٢٣٦٩	٢٣٧٠	٢٣٧١	٢٣٧٢	٢٣٧٣	٢٣٧٤	٢٣٧٥	٢٣٧٦	٢٣٧٧	٢٣٧٨	٢٣٧٩	٢٣٨٠	٢٣٨١	٢٣٨٢	٢٣٨٣	٢٣٨٤	٢٣٨٥	٢٣٨٦	٢٣٨٧	٢٣٨٨	٢٣٨٩	٢٣٩٠	٢٣٩١	٢٣٩٢	٢٣٩٣	٢٣٩٤	٢٣٩٥	٢٣٩٦	٢٣٩٧	٢٣٩٨	٢٣٩٩	٢٤٠٠	٢٤٠١	٢٤٠٢	٢٤٠٣	٢٤٠٤	٢٤٠٥	٢٤٠٦	٢٤٠٧	٢٤٠٨	٢٤٠٩	٢٤١٠	٢٤١١	٢٤١٢	٢٤١٣	٢٤١٤	٢٤١٥	٢٤١٦	٢٤١٧	٢٤١٨	٢٤١٩	٢٤٢٠	٢٤٢١	٢٤٢٢	٢٤٢٣	٢٤٢٤	٢٤٢٥	٢٤٢٦	٢٤٢٧	٢٤٢٨	٢٤٢٩	٢٤٣٠	٢٤٣١	٢٤٣٢	٢٤٣٣	٢٤٣٤	٢٤٣٥	٢٤٣٦	٢٤٣٧	٢٤٣٨	٢٤٣٩	٢٤٤٠	٢٤٤١	٢٤٤٢	٢٤٤٣	٢٤٤٤	٢٤٤٥	٢٤٤٦	٢٤٤٧	٢٤٤٨	٢٤٤٩	٢٤٥٠	٢٤٥١	٢٤٥٢	٢٤٥٣	٢٤٥٤	٢٤٥٥	٢٤٥٦	٢٤٥٧	٢٤٥٨	٢٤٥٩	٢٤٦٠	٢٤٦١	٢٤٦٢	٢٤٦٣	٢٤٦٤	٢٤٦٥	٢٤٦٦	٢٤٦٧	٢٤٦٨	٢٤٦٩	٢٤٧٠	٢٤٧١	٢٤٧٢	٢٤٧٣	٢٤٧٤	٢٤٧٥	٢٤٧٦	٢٤٧٧	٢٤٧٨	٢٤٧٩	٢٤٨٠	٢٤٨١	٢٤٨٢	٢٤٨٣	٢٤٨٤	٢٤٨٥	٢٤٨٦	٢٤٨٧	٢٤٨٨	٢٤٨٩	٢٤٩٠	٢٤٩١	٢٤٩٢	٢٤٩٣	٢٤٩٤	٢٤٩٥	٢٤٩٦	٢٤٩٧	٢٤٩٨	٢٤٩٩	٢٥٠٠	٢٥٠١	٢٥٠٢	٢٥٠٣	٢٥٠٤	٢٥٠٥	٢٥٠٦	٢٥٠٧	٢٥٠٨	٢٥٠٩	٢٥١٠	٢٥١١	٢٥١٢	٢٥١٣	٢٥١٤	٢٥١٥	٢٥١٦	٢٥١٧	٢٥١٨	٢٥١٩	٢٥٢٠	٢٥٢١	٢٥٢٢	٢٥٢٣	٢٥٢٤	٢٥٢٥	٢٥٢٦	٢٥٢٧	٢٥٢٨	٢٥٢٩	٢٥٣٠	٢٥٣١	٢٥٣٢	٢٥٣٣	٢٥٣٤	٢٥٣٥	٢٥٣٦	٢٥٣٧	٢٥٣٨	٢٥٣٩	٢٥٤٠	٢٥٤١	٢٥٤٢	٢٥٤٣	٢٥٤٤	٢٥٤٥	٢٥٤٦	٢٥٤٧	٢٥٤٨	٢٥٤٩	٢٥٥٠	٢٥٥١	٢٥٥٢	٢٥٥٣	٢٥٥٤	٢٥٥٥	٢٥٥٦	٢٥٥٧	٢٥٥٨	٢٥٥٩	٢٥٦٠	٢٥٦١	٢٥٦٢	٢٥٦٣	٢٥٦٤	٢٥٦٥	٢٥٦٦	٢٥٦٧	٢٥٦٨	٢٥٦٩	٢٥٧٠	٢٥٧١	٢٥٧٢	٢٥٧٣	٢٥٧٤	٢٥٧٥	٢٥٧٦	٢٥٧٧	٢٥٧٨	٢٥٧٩	٢٥٨٠	٢٥٨١	٢٥٨٢	٢٥٨٣	٢٥٨٤	٢٥٨٥	٢٥٨٦	٢٥٨٧	٢٥٨٨	٢٥٨٩	٢٥٩٠	٢٥٩١	٢٥٩٢	٢٥٩٣	٢٥٩٤	٢٥٩٥	٢٥٩٦	٢٥٩٧	٢٥٩٨	٢٥٩٩	٢٦٠٠	٢٦٠١	٢٦٠٢	٢٦٠٣	٢٦٠٤	٢٦٠٥	٢٦٠٦	٢٦٠٧	٢٦٠٨	٢٦٠٩	٢٦١٠	٢٦١١	٢٦١٢	٢٦١٣	٢٦١٤	٢٦١٥	٢٦١٦	٢٦١٧	٢٦١٨	٢٦١٩	٢٦٢٠	٢٦٢١	٢٦٢٢	٢٦٢٣	٢٦٢٤	٢٦٢٥	٢٦٢٦	٢٦٢٧	٢٦٢٨	٢٦٢٩	٢٦٣٠	٢٦٣١	٢٦٣٢	٢٦٣٣	٢٦٣٤	٢٦٣٥	٢٦٣٦	٢٦٣٧	٢٦٣٨	٢٦٣٩	٢٦٤٠	٢٦٤١	٢٦٤٢	٢٦٤٣	٢٦٤٤	٢٦٤٥	٢٦٤٦	٢٦٤٧	٢٦٤٨	٢٦٤٩	٢٦٥٠	٢٦٥١	٢٦٥٢	٢٦٥٣	٢٦٥٤	٢٦٥٥	٢٦٥٦	٢٦٥٧	٢٦٥٨	٢٦٥٩	٢٦٦٠	٢٦٦١	٢٦٦٢	٢٦٦٣	٢٦٦٤	٢٦٦٥	٢٦٦٦	٢٦٦٧	٢٦٦٨	٢٦٦٩	٢٦٧٠	٢٦٧١	٢٦٧٢	٢٦٧٣	٢٦٧٤	٢٦٧٥	٢٦٧٦	٢٦٧٧	٢٦٧٨	٢٦٧٩	٢٦٨٠	٢٦٨١	٢٦٨٢	٢٦٨٣	٢٦٨٤	٢٦٨٥	٢٦٨٦	٢٦٨٧	٢٦٨٨	٢٦٨٩	٢٦٩٠	٢٦٩١	٢٦٩٢	٢٦٩٣	٢٦٩٤	٢٦٩٥	٢٦٩٦	٢٦٩٧	٢٦٩٨	٢٦٩٩	٢٧٠٠	٢٧٠١	٢٧٠٢	٢٧٠٣	٢٧٠٤	٢٧٠٥	٢٧٠٦	٢٧٠٧	٢٧٠٨	٢٧٠٩	٢٧١٠	٢٧١١	٢٧١٢	٢٧١٣	٢٧١٤	٢٧١٥	٢٧١٦	٢٧١٧	٢٧١٨	٢٧١٩	٢٧٢٠	٢٧٢١	٢٧٢٢	٢٧٢٣	٢٧٢٤	٢٧٢٥	٢٧٢٦	٢٧٢٧	٢٧٢٨	٢٧٢٩	٢٧٣٠	٢٧٣١	٢٧٣٢	٢٧٣٣	٢٧٣٤	٢٧٣٥	٢٧٣٦	٢٧٣٧	٢٧٣٨	٢٧٣٩	٢٧٤٠	٢٧٤١	٢٧٤٢	٢٧٤٣	٢٧٤٤	٢٧٤٥	٢٧٤٦	٢٧٤٧	٢٧٤٨	٢٧٤٩	٢٧٥٠	٢٧٥١	٢٧٥٢	٢٧٥٣	٢٧٥٤	٢٧٥٥	٢٧٥٦	٢٧٥٧	٢٧٥٨	٢٧٥٩	٢٧٦٠	٢٧٦١	٢٧٦٢	٢٧٦٣	٢٧٦٤	٢٧٦٥	٢٧٦٦	٢٧٦٧	٢٧٦٨	٢٧٦٩	٢٧٧٠	٢٧٧١	٢٧٧٢	٢٧٧٣	٢٧٧٤	٢٧٧٥	٢٧٧٦	٢٧٧٧	٢٧٧٨	٢٧٧٩	٢٧٨٠	٢٧٨١	٢٧٨٢	٢٧٨٣	٢٧٨٤	٢٧٨٥	٢٧٨٦	٢٧٨٧	٢٧٨٨	٢٧٨٩	٢٧٩٠	٢٧٩١	٢٧٩٢	٢٧٩٣	٢٧٩٤	٢٧٩٥	٢٧٩٦	٢٧٩٧	٢٧٩٨	٢٧٩٩	٢٨٠٠	٢٨٠١	٢٨٠٢	٢٨٠٣	٢٨٠٤	٢٨٠٥	٢٨٠٦	٢٨٠٧	٢٨٠٨	٢٨٠٩	٢٨١٠	٢٨١١	٢٨١٢	٢٨١٣	٢٨١٤	٢٨١٥	٢٨١٦	٢٨١٧	٢٨١٨	٢٨١٩	٢٨٢٠	٢٨٢١	٢٨٢٢	٢٨٢٣	٢٨٢٤	٢٨٢٥	٢٨٢٦	٢٨٢٧	٢٨٢٨	٢٨٢٩	٢٨٣٠	٢٨٣١	٢٨٣٢	٢٨٣٣	٢٨٣٤	٢٨٣٥	٢٨٣٦	٢٨٣٧	٢٨٣٨	٢٨٣٩	٢٨٤٠	٢٨٤١	٢٨٤٢	٢٨٤٣	٢٨٤٤	٢٨٤٥	٢٨٤٦	٢٨٤٧	٢٨٤٨	٢٨٤٩	٢٨٥٠	٢٨٥١	٢٨٥٢	٢٨٥٣	٢٨٥٤	٢٨٥٥	٢٨٥٦	٢٨٥٧	٢٨٥٨	٢٨٥٩	٢٨٦٠	٢٨٦١	٢٨٦٢	٢٨٦٣	٢٨٦٤	٢٨٦٥	٢٨٦٦	٢٨٦٧	٢٨٦٨	٢٨٦٩	٢٨٧٠	٢٨٧١	٢٨٧٢	٢٨٧٣	٢٨٧٤	٢٨٧٥	٢٨٧٦	٢٨٧٧	٢٨٧٨	٢٨٧٩	٢٨٨٠	٢٨٨١	٢٨٨٢	٢٨٨٣	٢٨٨٤	٢٨٨٥	٢٨٨٦	٢٨٨٧	٢٨٨٨	٢٨٨٩	٢٨٩٠	٢٨٩١	٢٨٩٢	٢٨٩٣	٢٨٩٤	٢٨٩٥	٢٨٩٦	٢٨٩٧	٢٨٩٨	٢٨٩٩	٢٩٠٠	٢٩٠١	٢٩٠٢	٢٩٠٣	٢٩٠٤	٢٩٠٥	٢٩٠٦	٢٩٠٧	٢٩٠٨	٢٩٠٩	٢٩١٠	٢٩١١	٢٩١٢	٢٩١٣	٢٩١٤	٢٩١٥	٢٩١٦	٢٩١٧	٢٩١٨	٢٩١٩	٢٩٢٠	٢٩٢١	٢٩٢٢	٢٩٢٣	٢٩٢٤	٢٩٢٥	٢٩٢٦	٢٩٢٧	٢٩٢٨	٢٩٢٩	٢٩٣٠	٢٩٣١	٢٩٣٢	٢٩٣٣	٢٩٣٤	٢٩٣٥	٢٩٣٦	٢٩٣٧	٢٩٣٨	٢٩٣٩	٢٩٤٠	٢٩٤١	٢٩٤٢	٢٩٤٣	٢٩٤٤	٢٩٤٥	٢٩٤٦	٢٩٤٧	٢٩٤٨	٢٩٤٩	٢٩٥٠	٢٩٥١	٢٩٥٢	٢٩٥٣	٢٩٥٤	٢٩٥٥	٢٩٥٦	٢٩٥٧	٢٩٥٨	٢٩٥٩	٢٩٦٠	٢٩٦١	٢٩٦٢	٢٩٦٣	٢٩٦٤	٢٩٦٥	٢٩٦
---	--	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-----

تابع - جدول (۳)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

[illegible]

جدول (۵)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (v) لحساب قيم المساحات من اليسار

[illegible]

جدول (۴)

اختبار الوحدة الرابعة

أسئلة مقالة

- (١) إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه $\{٢, ٣, ٤, ٥\}$ وكان $٣ = ٠,٣, ٤ = (٣) د, ٢ = ٠,٢, ١ = (٤) د$ فأوجد $٥, (٥)$ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.
- (٢) يحتوي صندوق على ٨ كرات متماثلة منها: ٥ كرات حمراء و ٣ كرات صفراء وسجبت ٤ كرات عشوائياً معاً من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي سـ يمثل عدد الكرات الصفراء، فأوجد ما يلي:
- (أ) عدد عناصر فضاء العينة (ن.ف).
- (ب) مدى المتغير العشوائي سـ.
- (ج) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.
- (د) دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.
- (٣) يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع سـ.

٦	٥	٤	٣	س
$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{11}$	ل(س)

أوجد:

- (أ) التوقع (μ). (ب) التباين (σ^2). (ج) الانحراف المعياري σ .
(٤) يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المقطوع سـ.

٦	٥	٤	٣	٢	س
٠,٢	٠,١٥	٠,٣٥	٠,١٦	٠,١٤	د(س)

أو حد:

- ت (١)، ت (٢)، ت (٣)، ت (٥)، ت (٣)، ت (٤)، ت (٥)، ت (٦)، ت (٧).
- (٥) ينتج مصنع أجان ١٢٥٠ علبه يومياً، إذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة ٠,٠٤ فأوجد ما يلي لمعرفة عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام:
- (أ) التوقع (١١). (ب) التباين: (٩). (ج) الانحراف المعياري: (٥).

تمارين إثرائية

- (١) متغير عشوائي x يتبع توزيعاً طبيعياً توفقه $\mu = 55$ وتباينه $\sigma^2 = 25$ ، أوجد:
- (أ) $P(x < 55)$
- (ب) $P(x > 50)$
- (ج) $P(30 < x < 40)$
- (٢) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هي:

١٢	١٠	٨	٦	٤	٢	س
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	ك	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	(س)

- (أ) أوجدك.
(ب) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي د.
(ج) أوجد دالة التوزيع التراكمي ت.
(د) ارسم دالة التوزيع التراكمي ت.

- (٣) مدفع يتبع مداه توزيعاً طبيعياً متوقعه ١٤ كم وتباينه ١ كم.
- (أ) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة أبعد من ١٥ كم؟
- (ب) ما احتمال أن تصل القذيفة فقط إلى مسافة أقل من ١١ كم؟
- (ج) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة بين ١٣ و ١٥ كم؟

تمارين موضوعية

في التمارين (١-٤)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيحة.

(١) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

س	٢-	١-	٠	١	٢
د(س)	٠,١٦	٠,٢٤	ك	٠,١٥	٠,٢

فإن قيمة ك =

- (أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٢٥ (د) ٠,١

في التمرينين (٣,٢)، استخدم الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٢٤	٠,٣	٠,٢٦	٠,١٥	٠,٠٥

حيث X هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المقطوع X :

فإن:

(٢) ت(٢) =

- (أ) ٠,٢٤ (ب) ٠,٥٤ (ج) ٠,٣ (د) ٠,٢٦

(٣) ت(٤,٥) =

- (أ) ٠,١٥ (ب) ٠,٢٦ (ج) ٠,٨ (د) ٠,٩٥

(٤) ينتج مصنع سيارات ١٥٠ سيارة في الشهر، إذا كانت نسبة السيارات المعيبة ٠,٠٢ فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في شهر واحد هو:

- (أ) ٣ (ب) ٣٠ (ج) ٢ (د) ٦٠

(٦) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - x & \text{for } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ or } x > 2 \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) $P(0 \leq X \leq 3)$ (ب) $P(X \geq 2)$ (ج) $P(X = 2)$ (د) $P(1 \leq X \leq 2)$

(٧) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا. دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - x & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ or } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) $P(0 \leq X \leq \frac{1}{4})$ (ب) $P(X \leq \frac{1}{4})$ (ج) $P(X = \frac{1}{4})$ (د) $P(X \geq \frac{1}{4})$

(٨) الدالة $f(x)$ تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} - x & \text{for } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ or } x > 3 \end{cases}$$

(أ) أثبت أن X هي دالة كثافة احتمال.

(ب) أوجد $P(X \geq 1)$.

(ج) أوجد التوقع والتباين للدالة $f(x)$.

(٩) إذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X ، فأوجد:

(أ) $P(3 \leq X \leq 4)$ (ب) $P(X \leq 1,52)$ (ج) $P(1,4 \leq X \leq 2,6)$

(١٠) يمثل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(أ) $P(30 < X < 60)$ (ب) $P(X \geq 45)$

الوحدة الخامسة: المتباينات والبرمجة الخطية

Inequalities and Linear Programming

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٥ - ١: المتباينات.

(٥ - ١ - ٢): منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً.

٥ - ٢: البرمجة الخطية.

مقدمة الوحدة

الوحدة الخامسة

المتباينات والبرمجة الخطية Inequalities and Linear Programming

مشروع الوحدة: أفضل مردود من الحملة الإعلانية

- 1 مقدمة المشروع: تعتبر البرمجة الخطية من الوسائل المهمة لتحقيق أفضل النتائج عند استخدامها في مواقف حياتية واقعية، مثل كيفية الحصول على أكبر ربح عند بيع أي منتج أو تخفيض كلفة إنتاج سلعة معينة. لذا دخلت البرمجة الخطية كوسيلة أساسية في مجالات العلوم، والصناعة، والتسويق، ...
- 2 الهدف: إيجاد أكبر عدد من الأشخاص استمعوا إلى الإعلان أو شاهدوه وقد تناول الترويج لبيع سلعة معينة عبر أجهزة الإعلام المسموعة (راديو) والمرئية (تلفاز).
- 3 اللوازم: آلة حاسبة مبرمجة - ورق رسم بياني - مسطرة - حاسوب (اختياري).
- 4 أسئلة حول التطبيق:
 - أطلقت إحدى المؤسسات التجارية حملة إعلانية لتسويق سلعة معينة وذلك عبر أجهزة الإعلام المسموعة (الراديو) والمرئية (التلفاز)، حيث توقعت هذه المؤسسة أن يشارك ٦٠ جهازاً مسموعاً ومرتبياً على الأقل. على أن يكون عدد الأجهزة المسموعة المشاركة على الأقل مثل عدد الأجهزة المرئية. إذا كانت كلفة الإعلان المسموع ٦ دنانير كويتية وكلفة الإعلان المرئي ٢٤ ديناراً كويتياً وقد وضعت المؤسسة ميزانية إجمالية للإعلان قيمتها ١٠٨٠ ديناراً كويتياً، وقدرت أن يكون عدد مستمعي كل جهاز مسموع ٢٠٠٠ مشتمع وعدد مشاهدي كل جهاز مرئي ١٥٠٠ مشاهد. فما عدد كل وسيلة إعلانية (مرئية ومسموعة) يتوجب اعتمادها للقيام بهذه المهمة وإيصال هذا الإعلان إلى أكبر عدد ممكن من المستهلكين؟
 - لنأخذ من عدد الأجهزة المسموعة (راديو) المشاركة في الإعلان، ص عدد الأجهزة المرئية (تلفاز) المشاركة في الإعلان. اكتب متباينة خطية تبين توقعات الأجهزة المشاركة في الإعلان.
 - اكتب متباينة خطية تبين العلاقة المتوقعة لعدد بث الإعلانات بين الأجهزة المسموعة والمرئية.
 - اكتب معادلة تبين العلاقة بين عدد المستمعين الإجمالي وعدد المشاهدين الإجمالي.
 - اكتب نظام المتباينات والمعادلات التي حصلت عليها وأضف $x \geq 0$ ، $y \geq 0$.
 - مثل على نظام إحداثي متعامد المتباينات التي حصلت عليها، ثم حدد منطقة الحل.
 - أوجد في منطقة الحل قيمة (س، ص) التي تحقق أكبر عدد من المستمعين والمشاهدين.
- 5 التقرير: اكتب تقريراً منفصلاً يمسك الجهد في عملك، وطريقة حصولك على الإجابة، ويتضمن الحسابات والرسم البياني.

دروس الوحدة

١-٥ المتباينات	٢-٥ البرمجة الخطية
(١-٥) منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً	

٦٢

يهدف حلّ المتباينات إلى إيجاد حلول عن طريق اتباع منهجية محددة باستخدام الجداول، أو الرسوم البيانية، وخط الأعداد في حال كانت المتباينة مؤلفة من متغير واحد ودرجتها تساوي واحد. أما في حال وجود متغيرين ذو درجة واحدة، فإن الحل يكون فقط من خلال رسم الخطوط التي تمثل المعادلات بحيث يكون عبارة عن منطقة في مستوى البيانات.

تستخدم أيضاً هذه التقنية لحل عدة مسائل حياتية وذلك عن طريق ما يعرف بالبرمجة الخطية، بحيث يكون الهدف هو تحديد منطقة الحل أي إيجاد النقطة التي تؤدي إلى الحل الأمثل إن كان من خلال إيجاد الحد الأقصى (الربح الأعلى) أو الحد الأدنى (الكلفة الأقل) على سبيل المثال إذا أخذنا دورة الإنتاج في أحد المصانع، فإن الحل يجب أن يراعي كافة الشروط التي تحددها عملية الإنتاج وعملية التسويق وجني الأرباح.

مشروع الوحدة

إن هذا المشروع يؤدي إلى معرفة العلاقة بين عدد المستمعين والمساهدين لإعلان ما والزيادة في المبيعات مما يؤثر على قيمة الأرباح. وبالتالي تكون الحملة الإعلانية لمنتج ما مفيدة في حال تمّ تغطية تكاليفها ومضاعفة الأرباح.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

$$(أ) \quad 2 \leq \text{ص} , \text{س} + \text{ص} \leq 60.$$

$$(ب) \quad 6 \leq \text{ص} + 24 \leq 1080$$

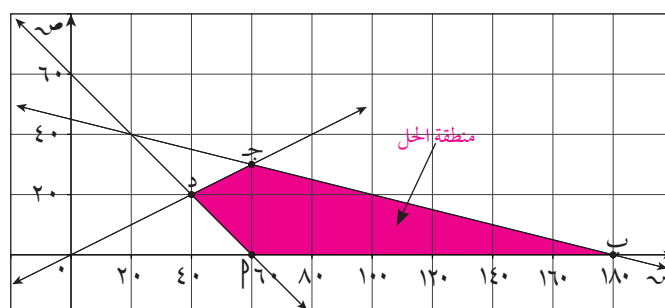
$$(ج) \quad \text{عدد المستمعين} = \frac{4}{3} \times \text{عدد المشاهدين}.$$

$$(د) \quad \left. \begin{array}{l} 2 \leq \text{ص} \\ \text{س} + \text{ص} \leq 60 \\ 6 \leq \text{ص} + 24 \leq 1080 \\ 0 \leq \text{ص} \end{array} \right\}$$

$$\text{دالة الهدف هـ} = 2000 \text{ ص} + 1500 \text{ س}$$

القيمة العظمى هي: ١٦٥٠٠٠ مشاهد ومستمع ويحدث ذلك عند النقطة ج(٦٠، ٣٠) أي أن عدد الأجهزة المسموعة ٦٠ وعدد الأجهزة المرئية ٣٠.

(هـ) - (و)



التقرير

اكتب تقريراً مفصلاً شارحاً ما قمت به من حسابات ومبيّناً استخدام المتباينات لإيجاد الحلول المطلوبة. أعد النظر مع زملائك في النتائج التي توصلت إليها.

الوحدة الخامسة

انصف إلى معلوماتك

إن أهمية حل المتباينات يكمن في حل المسائل وأنظمة البرمجة الخطية، وهي تعتبر مهمة في اتخاذ القرارات في العمليات الاقتصادية، التجارية، الزراعية، الصناعية... بحيث يجب أن تحاكي عدة شروط لتحقيق أفضل النتائج الممكنة.

ففي الزراعة مثلاً، المطلوب زيادة الإنتاج، وخفض التكلفة بأقل مساحة، أما في الصناعة فالمطلوب زيادة الإنتاج، وخفض التكلفة، وتحقيق أعلى نسبة أرباح. وفي التجارة، المطلوب إمكانية المفاضلة بين عرضين أو سلعتين من النوع نفسه بحيث يتمكن المستهلك من اختيار الأفضل.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- حل المعادلات.
- تحديد النقاط في المستوى الإحداثي.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً.
- إيجاد منطقة الحل المشتركة لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً.

المصطلحات الأساسية

المتباينات - منطقة الحل - متغير بياني - برمجة خطية - منطقة الحل المشترك - الشروط (القيود) - متغيرات القرار - دالة الهدف.

سلم التقييم

٤	الحسابات كلها صحيحة - استخدام المتباينات دقيق - التفسير واضح وكامل - أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة - التوصيات صريحة ومعبرة.
٣	الحسابات في معظمها صحيحة - بعض الأخطاء في استخدام المتباينات - التفسير واضح - أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة - التوصيات معقولة.
٢	الحسابات تحتوي على أخطاء متعددة - استخدام المتباينات غير واضح - أفكار التقرير غير مترابطة - التوصيات غير دقيقة.
١	معظم عناصر المشروع ناقصة أو غير موجودة.

٥-١: المتباينات

١ الأهداف

- يحل متباينات من الدرجة الأولى.
- يوجد منطقة الحل المشترك لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

المتباينات - منطقة الحل.

٣ الأدوات والوسائل

حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب من الطلاب رسم المتباينتين التاليتين وتظليل منطقة الحل المشتركة:

$$\begin{cases} \text{س} + 2 \leq 0 \\ \text{س} + 4 \leq 0 \end{cases}$$

لأي قيمة س، تكون قيمة ص هي نفسها؟
حل بيانياً وحسابياً

٥ التدريس

في هذا الدرس، سنحل نظام متباينات باستخدام عدة طرق.

- للحل باستخدام جدول، نكوّن جدولاً لقيم المتغيرات التي تحقق إحدى المتباينات. ثم نطلّل في هذا الجدول القيم التي تحقق المتباينة الثانية أيضاً، فتكون القيم المظللة هي التي تحقق نظام المتباينات.
- نستخدم نظام المتباينات لنمذجة حالات من الواقع الحياتي. تكون غالباً حلول هذه المسائل أعداداً كسرية، لذا بعض النقاط الواقعة في منطقة الحل المشترك تحل المسألة.

المتباينات Inequalities

١-٥

دعنا نفكر ونتناقش

تريد شراء سيارة ثمنها أقل من ٥٦٩٥ ديناراً كويتياً وذلك بعد إضافة ضريبة المبيعات بقيمة ٥٪ على ثمنها. وتريد أن تكون كلفة استهلاكها للوقود أقل من ٥٧٠ ديناراً كويتياً لمسافة ٩٠٠٠ كيلومتر التي من المرتقب أن تقطعها السنة المقبلة.

تقدر أن يكون معدل كلفة الوقود ٠٦٥ دينار كويتي في اللتر الواحد.

أي سيارة تستوفي شروطك بشكل أفضل؟ وضح ذلك.

السيارة	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
ثمن السيارة (بالدينار الكويتي)	٥٦٩٢	٤٦٨٠	٥٤٨٠	٥٢٥٠	٥٤١٠	٦٤٦٥	٥٥٥٠	٥٤٠٥
كمية الوقود المستهلكة (لتر/كم)	١٠,٦	١١,٤	٩,٣	٩	٨	٧,٢	١٢,٣	٦

نعلم أن $٥ < \text{س}$ جملة رياضية تسمى متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد هو س.
وأن $٣ \geq \text{س} + \text{ص}$ جملة رياضية تسمى متباينة من الدرجة الأولى في متغيرين هما س، ص. ولحل هذه المتباينات يلزمنا مراجعة بعض خواص التباين.

خواص التباين

إذا كانت س، ص، ع أعداداً حقيقية وكان س > ص فإن:

- ١ س + ع > ص + ع
- ٢ س - ع > ص - ع
- ٣ س < ع < ص < ع

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية.

$$\text{أ} - ٢ \leq ٣ - ٥$$

$$\text{ب} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ج} - ٣ \geq ٥ - ٧$$

٦٤

الحل:

$$\text{أ} - ٢ \leq ٣ - ٥$$

$$\text{ب} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ج} - ٣ \geq ٥ - ٧$$

$$\text{د} - ٤ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{هـ} - ٤ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{و} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ز} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ح} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ط} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ي} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ك} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ل} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{م} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ن} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{س} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ع} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ف} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ق} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ص} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ط} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ي} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ك} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ل} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{م} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ن} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{س} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ع} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ف} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ق} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ص} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ط} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ي} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ك} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ل} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{م} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ن} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{س} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ع} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

$$\text{ف} - ٧ \geq ٣ - ٥$$

٦٥

في المثال (١)

يوضح هذا المثال حل متباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد هو s . يمثل الحل على خط الأعداد بلون مختلف (أحمر) ويكون الحل شعاعاً أو قطعة مستقيمة. شدد على أنه عند ضرب طرفي المتباينة في عدد سالب نغير \geq إلى \leq كما في (ب).

في المثال (٢)

يوضح هذا المثال متباينات في متغيرين من الدرجة الأولى s و v ويتشكل حلها من مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تحقق هذه المتباينة. للتحقق من نقطة ما تحقق المتباينة، يجب الحصول على متباينة صحيحة عند التعويض عن s ، v بإحداثيا النقطة.

في المثال (٣)

خط الحدود هو خط مستقيم نحصل عليه باستبدال \geq أو $>$ أو \leq أو $<$ برمز المساواة. ويكون الخط المستقيم متصلاً في حالتي \geq أو \leq بينما يكون متقطعاً في حالتي $>$ أو $<$.

في المثال (٤)

المثال (٤) مشابه للمثال (٣) لكن المستقيمتان في هذا المثال هي رأسية على الصورة $s = j$ ، وأفقية على الصورة $v = j$. ويبقى المستقيم متصلاً أو متقطعاً كما في المثال (٣).

في المثالين (٥) و (٦)

في هذين المثالين نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين s ، v . ثم نرسم الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المناظرة باستخدام جدول قيم. ولتحديد جانب منطقة الحل نعوض بنقطة الأصل في المثالين فنحصل على عبارة صحيحة ونظلل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل لأنها منطقة الحل.

أشّر إلى أنه في حالات أخرى لا يعطينا التعويض بنقطة الأصل عبارة صحيحة وفي هذه الحالة نظلل المنطقة التي لا تحتوي على نقطة الأصل وهي منطقة الحل.

(١-٢) منطقة الحل للمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً Graphically Solution Region For First Degree Inequality in Two Variables

نعلم أن المتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين تأخذ أحد الأشكال التالية:

$$s + v > j$$

$$s + v \geq j$$

$$s + v < j$$

$$s + v \leq j$$

حيث j ، s ، v $\in \mathbb{R}$ ، بينما s ، v متغيران من الدرجة الأولى. وتعرف منطقة الحل لأي من المتباينات السابقة بأنها جميع النقاط (s ، v) في المستوى الإحداثي التي تحقق هذه المتباينة.

مثال (٢)

بين أيًا من النقاط التالية: (١، ١)، بـ (١، -١)، جـ (١، -١)، دـ (١، -١) تحقق المتباينة: $s + v \geq ١$

الحل:

بالتعويض بإحداثيا النقطة (s ، v) في الطرف الأيمن من المتباينة يمكن الحصول على النقاط التي تحقق المتباينة

$$١ \leq ١ + ١$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

$$١ \leq ١ + (-١)$$

في المثال (٧)

يوضح هذا المثال كيف يمر المستقيم بنقطة الأصل لذلك نعوض بنقطة غير نقطة الأصل. وعادة ما نختار نقطة يسهل التعويض فيها لتحديد منقطة الحل.

في المثالين (٨) و (٩)

يوضح هذان المثالان كيف أن منطقة الحل هي المنطقة التي تحقق المتباينتين معًا وتكون هذه المنطقة هي التي تمّ تحليلها مرتين (ويستحسن استخدام لونين لتسهيل العمل)، مع المحافظة على المستقيمتين المتصلة أو المتقطعة كما ورد في الأمثلة السابقة.

في المثال (١٠)

هذا المثال هو تطبيق حياتي حيث يشير إلى حل مسألة حياتية باستخدام نظام المتباينات. أشر إلى الطلاب أن الحل لا يتكوّن من نقطة واحدة بل مجموعة نقاط في منطقة محددة وعادة ما نختار الحل الذي يحقق معطيات إضافية أو نقبل بأي حل في المنطقة المظللة.

في المثال (١١)

يشكّل هذا المثال تطورًا إذ يتكوّن من ثلاث متباينات معًا. يجب العمل بدقة في هذه الحالة نظرًا إلى تعدد المتباينات وتعدد الألوان ويجب الانتباه إلى المنطقة المظللة المشتركة.

فيكون على الصورة:

لرسم خط الحدود للمتبانية: $3س + ٢ص < ٦$

١ نوجد المعادلة المناظرة للمتبانية وهي: $٦ = ٣س + ٢ص$

٢ نرسم الخط المستقيم المقطع الذي يمثل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول:

س	ص
٣	٠
٠	٣

فيكون على الصورة:

حاول أن تحل

١ لرسم خط الحدود لكل من:

١ $٦ < ٣س + ٢ص$

٢ $٥س + ٢ص \geq ٢٠$

٦٨

مثال (٤)

ارسم خط الحدود لكل من:

١ $٣ < س$

٢ $٢ \geq ص$

الحل:

١ المعادلة المناظرة هي: $٣ = س$

ويكون الرسم التالي:

المعادلة المناظرة هي: $٢ = ص$

ويكون الرسم التالي:

حاول أن تحل

١ لرسم خط الحدود لكل من:

١ $٣ < س$

٢ $٤ \geq ص$

٦٩

٦ الربط

يبين المثال (١٠) تطبيق المتباينات في حياتنا اليومية لحلّ مسائل حياتية متعدّدة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

عند حل نظام بالرسم البياني، يجب الانتباه إلى منطقة الحل المناسبة لكل من المتباينات. لتجنب الأخطاء اطلب من الطلاب إيجاد منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

(أ) $ص + ٤س < ٣$

(ب) $س - ٣ص < ٢$

ثم تأكد من صحة إجاباتهم.

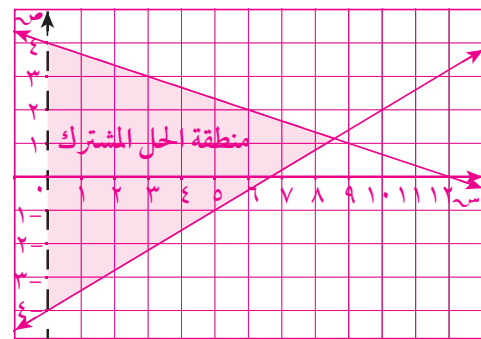
٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحلّ» وأعطهم الوقت اللازم لذلك.

اختبار سريع

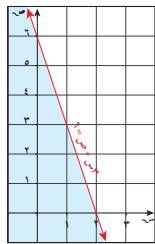
حلّ النظام التالي بالرسم البياني:

$$\left\{ \begin{array}{l} س + ٣ص \geq ١٢ \\ ٦ \leq ص, ٠ - س - ٤ \\ س < ٠ \end{array} \right.$$



خطوات إيجاد منطقة الحل للمتباينة من الدرجة الأولى بيانياً Steps to Find Graphically Solution Region For First Degree Inequality

- ١ ترسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل في حالة (\geq أو \leq) والخط المنقطع في حالة ($>$ أو $<$).
- ٢ تقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة، ولتحديد هذا الجانب نختار أي نقطة من أحد جانبي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة، إذا نتج عن ذلك عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل، لكن إذا نتج عن ذلك عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل.
- ٣ في حالة (\leq أو \geq) تكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على خط الحدود بالإضافة إلى جميع النقاط الواقعة إلى جانب منطقة الحل.
- ٤ وفي حالة ($>$ أو $<$) تكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على جانب منطقة الحل. نظلّل المنطقة التي تمثل منطقة حل المتباينة.



مثال (٥) بيانياً منطقة الحل للمتباينة: $٣س + ٦ص \geq ٦$

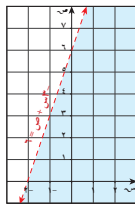
الحل:
نرسم خط الحدود للمتباينة: $٣س + ٦ص \geq ٦$
نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: $٣س + ٦ص = ٦$
نرسم الخط المستقيم المتصل الذي يمثل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٣	٠	٦
ص	٣-	٠	١

عند تحديد جانب منطقة الحل نعوض بنقطة الأصل (٠, ٠) في المتباينة (حيث خط الحدود لا يمر بنقطة الأصل).
 $٦ \geq ٠ + ٠ \times ٣$ عبارة صحيحة
∴ نظلّل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل (٠, ٠).

حاول أن تحلّ

مثال (٦) بيانياً منطقة الحل للمتباينة: $٨ \geq س + ٤ص$



مثال (٦) بيانياً منطقة الحل للمتباينة: $٣س - ٦ص > ٦$

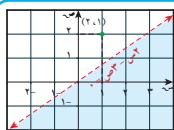
الحل:
نرسم خط الحدود للمتباينة: $٣س - ٦ص > ٦$
نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: $٣س - ٦ص = ٦$
نرسم الخط المستقيم المنقطع الذي يمثل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٣	٠	٦
ص	١-	٠	١

لتحديد جانب منطقة الحل نعوض بنقطة الأصل (٠, ٠) في المتباينة
 $٦ > ٠ + ٠ \times ٣$ عبارة صحيحة
∴ نظلّل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.

حاول أن تحلّ

مثال (٧) بيانياً منطقة الحل للمتباينة: $٤ < س + ٢ص$



مثال (٧) بيانياً منطقة الحل للمتباينة: $٢ - ٣ص < ٠$

الحل:
نرسم خط الحدود للمتباينة: $٢ - ٣ص < ٠$
نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: $٢ - ٣ص = ٠$
نرسم الخط المستقيم المنقطع الذي يمثل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٣	٠	٢
ص	٢	١	٠

لتحديد جانب منطقة الحل نعوض بنقطة غير نقطة الأصل لا يمر بها المستقيم ولكن (٢, ١).

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

السيارات التي ثمنها أقل من ٦٩٥ هـ هي السيارات جميعها ما عدا السيارة و.

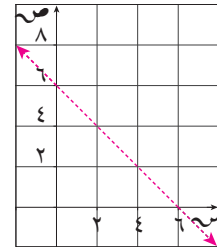
لاحتساب كلفة الاستهلاك، نقسم ٩٠٠٠٠ بقيمة كمية الوقود المستهلكة (كم/ لتر)، ثم نضرب الناتج بـ ٠,٦٥, ٠,١. السيارة التي ثمنها وكلفتها باستهلاك الوقود مناسبة هي السيارات أ، ب، ز. السيارة الأفضل هي السيارة ز.

«حاول أن تحل»

- ١ (أ) $س \leq ١,٥$ صفر - ١,٥ ح
- (ب) $٢,٥ > س \geq ٢$ صفر - ٢,٥ ح
- (ج) $س \leq ٦$ صفر - ٦ ح
- ٢ (ب) فقط.

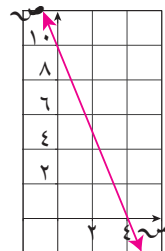
٣ (أ)

٦	٠	س
٠	٦	ص



(ب)

٤	٠	س
٠	١٠	ص



$$٠ < ٢ \times ٣ - ١ \times ٢$$

$$٠ < ٦ - ٢$$

$$٠ < ٤ -$$

وهي عبارة غير صحيحة.

∴ نظلّل الجانب الذي لا يحوي النقطة (٢, ١)

حاول أن تحل

٧ مثل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: س - ٥ ≥ ٠

منطقة الحل المشترك للمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًا

مثال (٨)

مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

$$س + ٦ \leq ٦$$

$$٥ + ٢ \leq ١٠$$

الحل:

١ نرسم خط الحدود للمتباينة: س + ٦ ≤ ٦

من المعادلة المناظرة: س + ٦ = ٦

٦	٣	٠	س
٠	٣	٦	ص

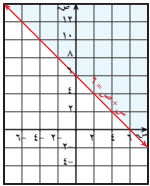
نمؤّض بنقطة الأصل (٠, ٠) في المتباينة فنجد أن:

$$٦ \leq ٠ + ٠$$

$$٦ \leq ٠$$

عبارة غير صحيحة

∴ نظلّل المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل.



٧٢

٢ نرسم خط الحدود للمتباينة: س + ٥ ≥ ١٠

من المعادلة المناظرة: س + ٥ = ١٠

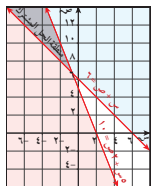
٢	٢	٠	س
١٠	٠	٥	ص

نمؤّض بنقطة الأصل في المتباينة: س + ٥ ≥ ١٠

نجد أن ١٠ ≥ ٠ + ٥ عبارة صحيحة

∴ نظلّل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.

٣ نظلّل منطقة الحل المشترك

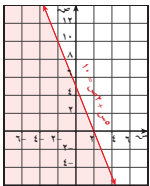


حاول أن تحل

٤ مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

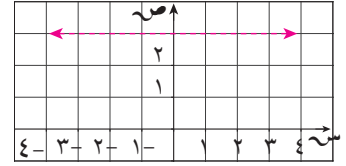
$$س - ٢ < ٢$$

$$٢ + ٣ \geq ٦$$

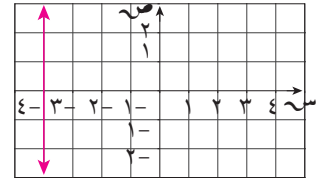


٧٣

٤ (أ)

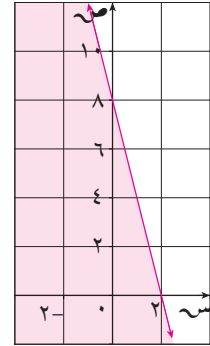


(ب)



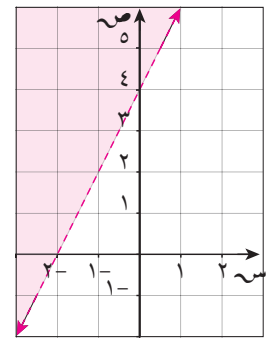
٥

س	٢	٠
ص	٠	٨



٦

س	٢	٠
ص	٠	٤



مثال (٩)

مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتيابنتين:

$$\begin{aligned} 2 - \text{ص} &\leq 3 \\ 2 - \text{ص} &< 1 + \text{س} \end{aligned}$$

الحل:

١ ترسم خط الحدود للمتيابنة: $2 - \text{ص} \leq 3$

س	١	١	١
ص	٣	١	٠

نمّوض بنقطة الأصل (٠,٠) في المتيابنة
فنجد أن $3 - \text{ص} \leq 0$

وهي عبارة صحيحة.

نظّل المنطقة التي تحوي النقطة (٠,٠)

٢ ترسم خط الحدود للمتيابنة: $2 - \text{ص} < 1 + \text{س}$

من المعادلة المناظرة: $2 - \text{ص} = 1 + \text{س}$

س	١	٠	١
ص	٠	١	١

نمّوض بالنقطة (٠,٠) في المتيابنة

نجد $1 < 0$

وهي عبارة غير صحيحة.

∴ نظّل المنطقة التي لا تحوي (٠,٠).

٣ نحدّد منطقة الحل المشترك.

حاول أن تحل

٤ مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتيابنتين:

$$\begin{aligned} 2 + \text{ص} &\geq 4 \\ \text{ص} &\leq 1 - \text{س} \end{aligned}$$

٧٤

استخدام نظام متيابنات

Using System of Inequalities

يمكنك أحيانًا أن تُمذج حالة من الواقع الحياتي باستخدام نظام من المتيابنات الخطية. غالبًا ما تكون حلول هذه المسائل أعدادًا كائنة، لذا فإن بعض النقاط الواقعة في منطقة الحل المشترك ستحل المسألة.

مثال (١٠)

ينظم المركز الثقافي في مدينتك حفلًا ترفيهيًا من أجل جمع على الأقل مبلغ ٣٠٠٠٠ دينار كويتيٍ لقسم الخدمات الاجتماعية.

تبلغ أسعار التذاكر ٢٠ دينارًا كويتيًا للمقاعد الصفوف الخلفية و ٣٠ دينارًا كويتيًا للمقاعد الصفوف الأمامية. إذا كان لدى المركز ٥٠٠ تذكرة للصفوف الأمامية و ١٢٥٠ تذكرة للصفوف الخلفية، فكم تذكرة من كل نوع على المركز أن يبيع؟

الحل:

اربط $20 \times \text{مقعدًا خلفيًا} + 30 \times \text{مقعدًا أماميًا} \leq 30000$

مقعدًا خلفيًا $1250 \geq$

حدّد افترض أن $\text{س} =$ عدد تذاكر المقاعد الخلفية المباعة.

وأن $\text{ص} =$ عدد تذاكر المقاعد الأمامية المباعة.

اكتب $20 + 30 \times \text{ص} \leq 30000$

$500 \geq \text{ص}$

$1250 \geq \text{س}$

لاحظ أن س ، ص هما عدداً كليان لأنهما يمثلان عدد المقاعد (يحددان معاً الربع الأول).

معادلات خط الحدود للمتيابنات الثلاث هي:

$20 + 30 \times \text{ص} = 30000$

$500 = \text{ص}$

$1250 = \text{س}$

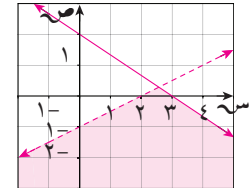
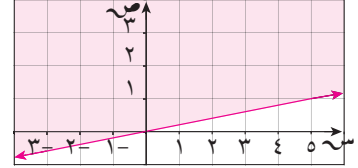
معلومة:

نظّل النقاط الواقعة في منطقة الحل المشترك تذاكر المقاعد الأمامية والخلفية التي تبلغ قيمتها الإجمالية كويتيً أو أكثر.

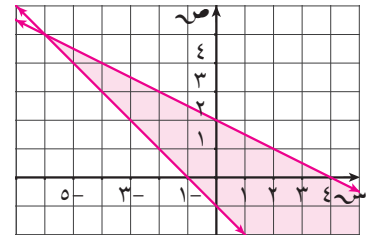
٧٥

س	٥	٠
ص	١	٠

٧



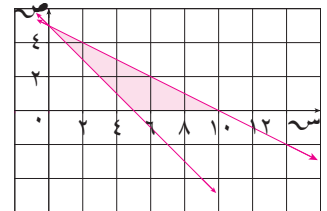
٨



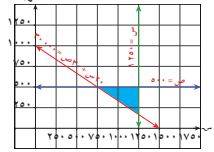
٩

١٠ لتكن: س نوع الخضار
ص نوع اللحوم

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + \text{ص} \leq 5 \\ \text{س} + 2\text{ص} \geq 10 \\ \text{س} \leq 0, \text{ص} \leq 0 \end{array} \right\}$$



مثّل المتباينات بيانيًا (يمكنك استخدام آتلك الحاسبة).



المنطقة المظللة بالأزرق هي منطقة الحل.

تحقق:
إذا باع المركز الثقافي ٩٠٠ تذكرة للمقاعد الخلفية و ٤٥٠ تذكرة للمقاعد الأمامية، فهل سيحقق المركز الثقافي هدفه؟

$$\begin{array}{l} 900 \leq 1250, 450 \leq 500 \\ 30000 \leq (450)30 + (900)20 \\ 30000 \leq 13250 + 18000 \\ 30000 \leq 31250 \end{array}$$

بما أنه يجب أن يكون عدد المقاعد عددًا كليًا، فلا يعتبر حلاً إلا النقاط التي تقع في منطقة الحل المشترك والتي هي أعدادًا كلية.

حاول أن تحل

١٠ يتقاضى مطعم لبيع الفطائر دينارًا كويتيًّا واحدًا عن كل صنف من الخضار يضاف إلى الطبقية العلوية، و ٢ دينار كويتي عن كل صنف من اللحوم يضاف إلى الطبقية العلوية. إذا كنت تريد أن تضيف ٥ أصناف على الأقل إلى الطبقية العلوية من فطيرتك ولديك ١٠ دنانير كويتية لتنفقها على الأصناف المضافة إلى الطبقية العلوية للفطيرة. فعلى كم صنف من كل نوع من الطبقات العلوية يمكنك أن تحصل على الأكثر؟

مثال (١١)

مثّل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

$$\begin{array}{l} \text{س} + \text{ص} \geq 1 \\ \text{س} - \text{ص} < 2 \\ 3\text{س} + 4\text{ص} > 12 \end{array}$$

٧٦

المتباينات Inequalities

المجموعة ١ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية:

$$(1) \text{س} + 3 < 7 \quad (2) 11 - 3\text{س} > 2 \quad (3) 5 - 13\text{س} > 8$$

(٤) بين أيًا من النقاط التالية: (١، ٢)، ب (٠، ٧)، ج (٢، ١)، د (٢، ٥) تحقق المتباينة: $\text{س} + 5 \geq 12$.

في التمارين (٥-٦)، ارسم خط الحدود لكل متباينة:

$$\begin{array}{l} (5) \text{س} + \text{ص} < 5 \quad (ب) 3\text{س} + 2\text{ص} \geq 18 \quad (ج) \text{ص} - 3 \leq 2 \quad (د) \text{س} - \text{ص} > 2 \\ (6) (أ) \text{س} \leq 3 \quad (ب) \text{ص} > 2 \quad (ج) \text{س} - 5 < 0 \quad (د) 2\text{ص} \geq 8 \end{array}$$

في التمارين (٧-١٠)، مثّل بيانيًا منطقة الحل لكل متباينة:

$$(7) \text{س} + \text{ص} < 3 \quad (8) \text{س} - 3\text{ص} > 6 \quad (9) 2\text{س} - 3\text{ص} \geq 0 \quad (10) 2\text{س} + 4\text{ص} \leq 12$$

(١١) مثّل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

$$\text{س} + \text{ص} > 3, \quad \text{س} + 2\text{ص} \leq 10$$

في التمارين (١٢-١٧)، مثّل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

$$(12) \text{س} + 2\text{ص} \leq 4, \quad \text{ص} - \text{س} \geq 1$$

$$(13) \text{ص} < \text{س} + 2, \quad \text{ص} \geq \text{س} + 1$$

$$(14) \text{ص} \geq \text{س} + 3, \quad \text{ص} \leq \text{س} + 2$$

$$(15) \text{س} - 2\text{ص} > 3, \quad 2\text{س} + \text{ص} < 8$$

$$(16) \text{ص} > \text{س} - 3, \quad \text{ص} \leq \text{س} - 4$$

$$(17) -2\text{س} + \text{ص} < 1, \quad \text{ص} < \text{س}$$

(١٨) يحتاج مسؤول المخيم إلى ٣٠ شخصًا كحد أقصى لتنظيم رحلة تخييم، ويحتاج من بينهم إلى ١٠ على الأقل لإعداد الخيم وإلى ٥ آخرين على الأقل لجمع الحطب

(أ) اكتب نظام متباينات لتمثيل المسألة. (ب) مثّل بيانيًا النظام وحله.

في التمارين (١٩-٢١)، مثّل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

$$(19) \text{س} + \text{ص} \geq 2, \quad \text{س} - \text{ص} < 1 + 3\text{ص} > 6$$

$$(20) \text{س} \leq \text{ص} + 2, \quad 2\text{س} + \text{ص} \geq 3 + 1$$

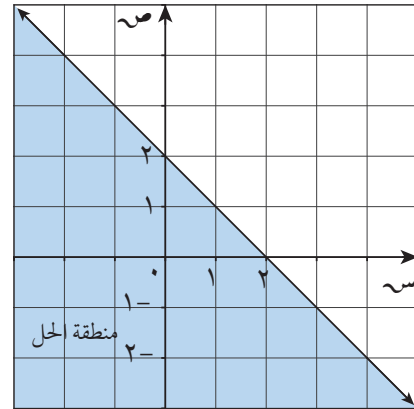
$$(21) \text{س} + \text{ص} \leq 3, \quad \text{س} - \text{ص} \geq 4 + 0$$

٣٢

٥٢

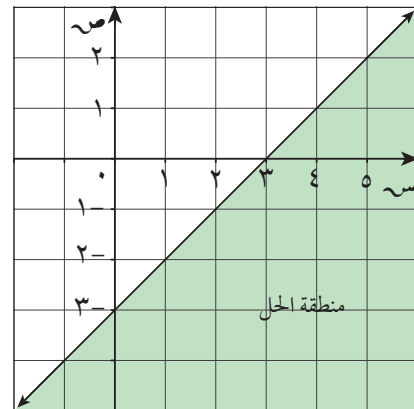
$$س + ص \geq 2$$

(أ)



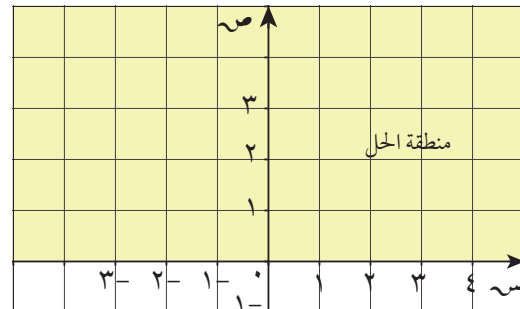
$$س - ص \leq 3$$

(ب)

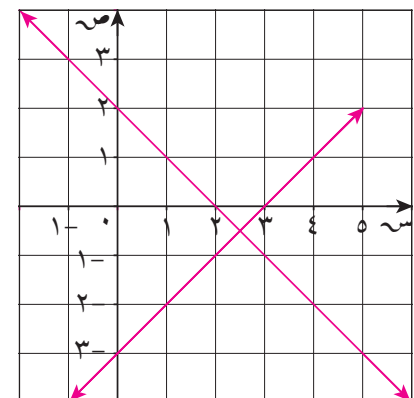


$$ص \leq 0$$

(ج)



(د)



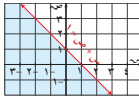
لا توجد منطقة للحلول.

الحل:

١ معادلات خط الحدود للمتيانبات الثلاث هي:

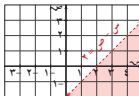
$$س + ص \geq 1 \quad \text{المعادلة المناظرة هي: } س + ص = 1$$

س	١	٠	١
ص	٠	١	٢



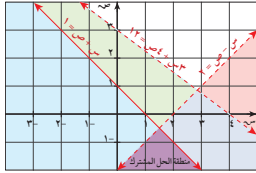
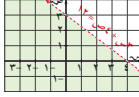
$$س - ص \leq 2 \quad \text{المعادلة المناظرة هي: } س - ص = 2$$

س	٢	١	٠
ص	٠	١	٢



$$٣س + ٤ص \geq ١٢ \quad \text{المعادلة المناظرة هي: } ٣س + ٤ص = ١٢$$

س	٤	٢	٠
ص	٠	١	٣



حاول أن تحل

١ مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتيانبات التالية:

$$س + ص \geq 2$$

$$س - ص \leq 3$$

$$٠ \leq ص$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٦)، أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية:

$$(١) \quad ٥ < ٣ - س$$

$$(٣) \quad ٧ \leq ٢ - س$$

$$(٥) \quad ٨ > ٢ - س$$

$$(٦) \quad ٣ \geq ١ + س$$

$$(٧) \quad \text{بين أيًا من النقاط التالية: } (٠, ٠), (٢, -٨), (٣, ٢), (٥, -١) \text{، تحقق المتباينة: } ١٠ \leq ٣س + ٤ص$$

في التمارين (٨-١١)، مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتيانبات:

$$(٨) \quad \begin{cases} س + ص > ٥ \\ ٣س - ص > ٣ \end{cases}$$

$$(٩) \quad \begin{cases} ٣س + ص > ٣ \\ س + ص > ١ \end{cases}$$

$$(١٠) \quad \begin{cases} س - ص < ٢ \\ ١٥ \geq س + ٢ص \end{cases}$$

$$(١١) \quad \begin{cases} ٤ < س + ٢ص \\ ٦ < س - ٢ص \end{cases}$$

(١٢) لنفرض أنك تريد شراء نوعين من كتب المطالعة. سعر الكتاب باللغة العربية دينارين وسعر الكتاب باللغة الأجنبية ٥ دنانير. يجب أن تشتري ٦ كتب على الأقل ويجب ألا يتخطى سعر الكتب المشتراة ٢٠ دينارًا.

(أ) اكتب نظام متباينات لتمثيل المسألة.

(ب) مثل بيانيًا النظام وحله.

في التمارين (١٣-١٥)، مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتيانبات التالية:

$$(١٣) \quad \begin{cases} س - ص < ١ \\ س + ٢ص \geq ١٢ \\ ص \leq ٣ \end{cases}$$

$$(١٤) \quad \begin{cases} ٤ > س + ٢ص \\ ٢ \geq س - ص \\ ٠ \leq ١ - س \end{cases}$$

$$(١٥) \quad \begin{cases} ٢ - ص < س \\ ص > ٣ \\ ص + س > ٠ \end{cases}$$

في المثال (١)

هذا المثال هو تطبيق للبرمجة الخطية. راجع مع الطلاب خطوات إيجاد الحل السبع في البرمجة الخطية. تحقق من دقة رسم الحدود ومن صحة حساب نقطة تقاطع المستقيمين.

في المثال (٢)

يستخدم هذا المثال البرمجة الخطية لإيجاد منطقة الحل، ثم يوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل ومنها يوجد القيمة التي تجعل دالة الهدف أصغر ما يمكن.

أشِر إلى أن الخطوات هي نفسها في حالتني: دالة الهدف أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن.

في المثالين (٣) و (٤)

تطبيق حياتي للبرمجة الخطية واختيار الحل الأنسب. في هذا المثال، الحل الأنسب هو الذي يؤمن أكبر دخل ممكن. أشِر إلى أنه في المسائل الحياتية نختار القيمة التي تجعل دالة الهدف أصغر ما يمكن عندما نتطرق إلى الكلفة في التصنيع مثلاً.

اشرح للطلاب أنه في مثال (٤) تخسر الشركة في منتج لتربح في منتج آخر وأن هذا شائع في الأعمال التجارية.

١. نضع شرط عدم السلبية أي أن جميع المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أن تساوي الصفر.
٢. نقوم بتحريك دالة الهدف $z = 3x + 5y$ بشكل متوازٍ في اتجاه زيادتها (تباعدياً من نقطة الأصل) وننتوقف عندما نصل إلى قيمة z التي إذا زدنا عنها يكون خط دالة الهدف بالكامل خارج فضاء الحلول الممكنة.

(كلما تغيرت قيمة z حصلنا على خطوط متوازية).

ملاحظات مهمة:

١. الحل الأمثل يكون أحد أركان المضلع (وفي هذه الحالة يكون الحل الأمثل وحيد).
٢. إذا كانت دالة الهدف موازية لأحد أضلاع مضلع فضاء الإمكانات، فإن الحل الأمثل يكون عدد غير منته من النقاط (الحلول).
٣. بعد احتساب دالة الهدف z عند كل ركن من أركان مضلع فضاء الحلول الممكنة، يكون الحل الأمثل عند إحداثيات الركن الذي تكون قيمة z أكبر (أو أصغر) ما يمكن.

ملاحظة:

سنكتفي بالحالة التي يكون فيها الحل الأمثل حلاً وحيداً، وسنكتفي أيضاً بطريقة التعميض في الحل للحصول على الحل الأمثل.

خطوات إيجاد الحل الأمثل في البرمجة الخطية

١. تحديد المتغيرات.
٢. كتابة نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.
٣. تمثيل نظام المتباينات بيانياً.
٤. إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
٥. كتابة دالة الهدف z (الدالة الخطية) التي نريد إيجاد قيمتها الصغرى أو العظمى.
٦. التعميض بإحداثيات الرؤوس في الدالة.
٧. اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وفقاً لما هو مطلوب في المسألة.

٨٠

مثال (١)

أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات التالية:

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 4, 3x + 5y \geq 6$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (x, y) التي تجعل دالة الهدف $z = 3x + 5y$ أكبر ما يمكن.

الحل:

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ يحددان معاً الربع الأول}$$

$$\text{خط الحدود: } x + y = 4$$

$$\text{يمر بالنقطتين } (0, 4), (4, 0)$$

$$\text{خط الحدود: } 3x + 5y = 6$$

$$\text{يمر بالنقطتين } (0, 2), (2, 0)$$

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أدناه، حيث $(0, 2), (0, 4), (3, 1), (4, 0)$ و $(0, 0)$.

دالة الهدف $z = 3x + 5y$

بالتعميض بالنقاط للحصول على المطلوب

$$z = 0 \times 3 + 2 \times 5 = 10$$

$$z = 3 \times 3 + 1 \times 5 = 14$$

$$z = 4 \times 3 + 0 \times 5 = 12$$

$$z = 0 \times 3 + 0 \times 5 = 0 \text{ صفر}$$

دالة الهدف تكون أكبر ما يمكن عند النقطة $B(3, 1)$ وقيمتها $z = 14$.

حاول أن تحل

١. أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات التالية:

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 2, 3x + 5y \geq 12$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (x, y) التي تجعل دالة الهدف $z = 3x + 5y$ أكبر ما يمكن حيث $z = 3x + 5y$.

٨١

٦ الربط

يبين المثالان (٣) و (٤) مجال تطبيق البرمجة الخطية في الحياة اليومية وخاصة في مجال الصناعة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

ألقت انتباه الطلاب إلى اختيار رؤوس المضلع عند حل البرمجة الخطية؛ والتعويض دائماً في دالة الهدف هـ للتأكد من أن الشرط الأساسي استوفي. لتجنب الأخطاء أعط الطلاب مثالين على الأكثر للتأكد من قدرتهم على إيجاد الرؤوس المناسبة.

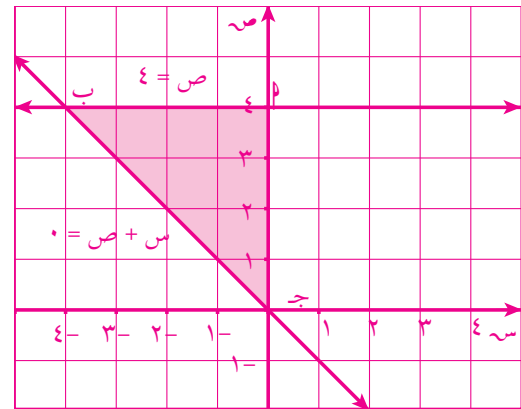
٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» وأعطهم الوقت اللازم لذلك.

اختبار سريع

أي نقطة في منطقة إمكانيات الحل تعطي قيمة هـ العظمى لدالة الهدف هـ = س + ص

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq س + ص \\ س \geq 0 \\ ص \geq 0 \end{array} \right\} \text{الشروط الثابتة:}$$



رؤوس المضلع الناتج عن منطقة الحل المشترك تمثل

النقاط: أ (٤، ٠)؛ ب (٤، ٤)؛ ج (٠، ٠)

القيمة العظمى نحصل عليها عند النقطة أ وهي

$$هـ = ٤$$

مثال (٢)

أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات التالية:

$$س \leq ٠, ص \leq ٠, س + ٢ص \geq ٤, س + ٤ \geq ٣$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن حيث هـ = س + ٥ ص.

الحل:

$$س \leq ٠, ص \leq ٠ \text{ يحددان ممّا الربع الأول}$$

$$هـ: س + ٥ص = ٤$$

س	٠	٤
ص	٠	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٤) ، (٢، ٠)

$$هـ: س + ٥ص = ٣$$

س	٠	٣
ص	٠	٠

يمر بالنقطتين (٣، ٠) ، (٠، ٣)

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د

حيث أ (٠، ٣) ، ب (١، ٢) ، ج (٢، ٠) ، د (٠، ٠)

$$\therefore \text{دالة الهدف هـ} = س + ٥ص$$

بالتعويض بالنقاط للحصول على المطلوب

$$\therefore \text{هـ} = س + ٥ص$$

$$\therefore \text{هـ} = ٠ \times ٤ + ٣ \times ٥ = ١٥$$

$$\text{هـ} = ١ \times ٤ + ٢ \times ٥ = ١٤$$

$$\text{هـ} = ٢ \times ٤ + ٠ \times ٥ = ٨$$

$$\text{هـ} = ٠ \times ٤ + ٠ \times ٥ = ٠$$

\therefore دالة الهدف هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة و (٠، ٠) وقيمتها تساوي صفر.

حاول أن تحل

أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات التالية:

$$س \leq ٠, ص \leq ٠, س + ٢ص \geq ١٢, س + ٣ \geq ١٢$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن حيث هـ = س + ٤ ص.

«دعنا نفكر ونتناقش»

• ليكن s = عدد شتلات البندورة ذات الحبة الكبيرة:

$$s \leq 0$$

ليكن v = عدد شتلات البندورة ذات الحبة الصغيرة:

$$v \leq 0$$

• الإنفاق لا يجب أن يتخطى ٤٠ دينارًا كويتيًّا.

$$2s + 3v \geq 40$$

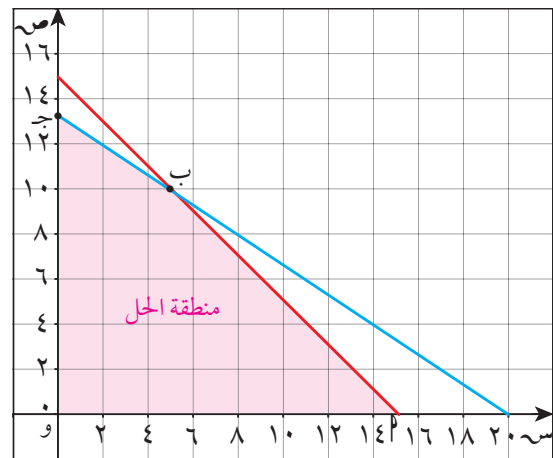
• نريد شراء ١٥ شتلة بندورة كحدّ أقصى

$$s + v \geq 15$$

• نريد أن نزيد كيلو جرامات البندورة التي سنحصل

عليها للحدّ الأقصى، إذا نريد أن تكون قيمة دالة

الهدف $h = 8s + 10v$ ص قيمة عظمى



رؤوس منطقة الحل: $(0, 0)$, $(0, 15)$, $(10, 5)$, $(13.33, 0)$

$$(13.33, 0)$$

عند النقطة $(10, 5)$ تكون دالة الهدف

$$h = 8 \times 10 + 10 \times 5 = 140$$

عليك شراء ٥ شتلات ذات حبة كبيرة، ١٠ شتلات

ذات حبة صغيرة

مثال (٣)

مطحّن لديه ٩٠ كجم من الذرة، ١٢٠ كجم من القمح، ينتج نوعين من الدقيق ويضعهما في أكياس بحيث يلزم الكيس من النوع الأول كيلوجرام واحد من الذرة، ٢ كجم من القمح، يلزم لكيس من النوع الثاني ٣ كجم من الذرة، ٢ كجم من القمح.

أوجد عدد الأكياس من كل نوع التي يجب أن ينتجها المطحّن ليكون دخله أكبر ما يمكن علمًا بأن ثمن الكيس من النوع الأول ٣ دنانير، ومن النوع الثاني ٥ دنانير.

الحل: لتكن s عدد الأكياس من النوع الأول، v عدد الأكياس من النوع الثاني

الكمية المتاحة	النوع الثاني ص	النوع الأول س
ذرة	٣	١
قمح	٢	٢
الثمن	٥	٣

$$s \leq 0, v \leq 0, s + 3v \geq 90, 2s + 2v \geq 120$$

$s \leq 0, v \leq 0$ يحددان الربع الأول

خط الحدود: $s + 3v = 90$

س	ص
٩٠	٠
٠	٣٠

يمر بالنقطتين $(0, 30)$ ، $(90, 0)$

خط الحدود: $2s + 2v = 120$

س	ص
٦٠	٠
٠	٦٠

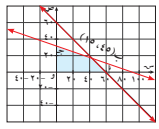
يمر بالنقطتين $(0, 60)$ ، $(60, 0)$

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل

المقابل المضلع أ ب ج د

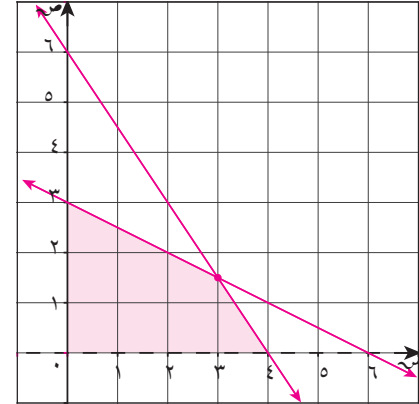
حيث أ $(0, 60)$ ، ب $(15, 45)$ ، ج $(30, 0)$ ، د $(0, 0)$

∴ دالة الهدف $h = 3s + 5v$



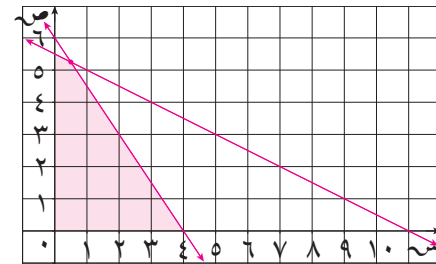
«حاول أن تحل»

١



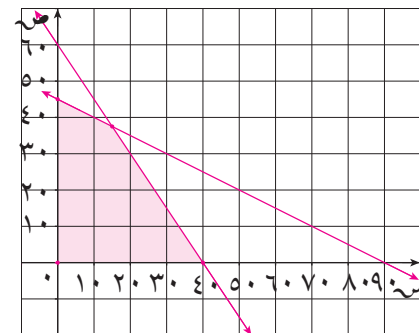
رؤوس منطقة الحل: $(\frac{3}{4}, 3)$ ، $(3, 0)$ ، $(3, 3)$
النقطة $(\frac{3}{4}, 3)$ تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن.

٢



$(0, 0)$ تجعل دالة الهدف أصغر ما يمكن.

٣



ليكن s عدد أثواب النوع الأول، v عدد أثواب النوع الثاني:

$$s + 2v \geq 90$$

$$3s + 2v \geq 120$$

$$s \leq 30, v \leq 40$$

$$\text{دالة الهدف، هـ} = 30s + 40v$$

رؤوس منطقة الحل: $(37, 5)$ ، $(45, 0)$ ، $(0, 40)$ ، $(0, 0)$

عند $(0, 40)$ هـ = 1200

بالتعويض بالنقاط للحصول على المطلوب

$$\text{هـ} = 180 = 0 \times 5 + 60 \times 3$$

$$\text{هـ} = 210 = 15 \times 5 + 45 \times 3$$

$$\text{هـ} = 150 = 30 \times 5 + 0 \times 3$$

$$\text{هـ} = 0 = 0 \times 5 + 0 \times 3$$

∴ دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ب(15, 45) وقيمها هـ = 210 دنانير

حاول أن تحل

٦ خياط لديه 90 مترًا من القطن و 120 مترًا من الصوف، ينتج نوعين من الثياب بحيث يلزم لعمل ثوب من النوع الأول متر واحد من القطن و 3 أمتار من الصوف وللنوع الثاني متران من القطن ومتران من الصوف. إذا كان ثمن الثوب من النوع الأول 30 دينارًا و ثمن الثوب من النوع الثاني 40 دينارًا، فأوجد عدد الثياب من كل نوع التي يجب أن ينتجها الخياط ليكون دخله أكبر ما يمكن.

مثال (٤)



تنتج إحدى الشركات الإلكترونية آلات حاسبة علمية وبيانية وتتوقع أن يكون الطلب على الأقل يوميًا 80 آلة حاسبة علمية و 90 آلة حاسبة بيانية ولكن لأسباب فنية لا تستطيع الشركة إنتاج أكثر من 180 آلة حاسبة علمية و 160 آلة حاسبة بيانية في اليوم الواحد.

تبيع الشركة على الأقل 200 آلة حاسبة من النوعين في اليوم الواحد. علمًا أن كل آلة حاسبة علمية تباع بخسارة دينار واحد وكل آلة حاسبة بيانية تباع بربح قدره 3 دنانير، فما العدد من كل نوع الذي يجب أن تنتجه الشركة في اليوم الواحد لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل:

ليكن: s عدد الآلات الحاسبة العلمية المنتجة في اليوم
 v عدد الآلات الحاسبة البيانية المنتجة في اليوم

$$s \leq 180, v \leq 160$$

$$s \geq 80, v \geq 90$$

$$s + v \geq 200$$

$$\text{هـ} = 3s + v \text{ (دالة الهدف)}$$

٨٤

تمرين
٢-٥

البرمجة الخطية

Linear Programming

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات التالية:

$$s \leq 0, v \leq 0, s + v \geq 5, 2s + v \geq 8$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (s, v) التي تجعل دالة الهدف هـ أكبر ما يمكن، حيث هـ = $3s + v$.

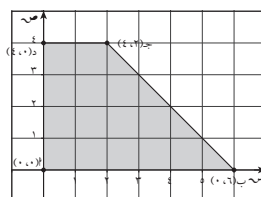
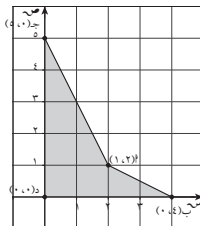
(٢) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات التالية:

$$s \leq 0, v \leq 0, s + 3v \geq 6, 2s + v \geq 6$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (s, v) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن، حيث هـ = $3s + 4v$.

في التمرينين (٣-٤)، أوجد قيم (s, v) التي تجعل دالة الهدف هـ قيمة عظمى أو قيمة صغرى حيث:

(٣) دالة الهدف هـ = $2s + 6v$ (٤) دالة الهدف هـ = $4s + 3v$



٣٤

عند $(0, 45)$ ، هـ = ١٨٠٠

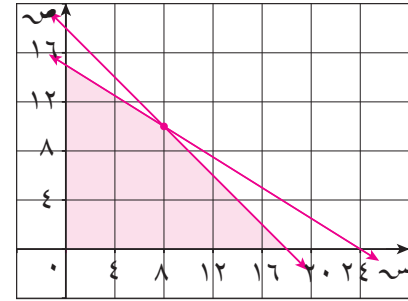
عند $(15, 5, 37)$ ، هـ = ١٩٥٠

عند $(0, 0)$ ، هـ = ٠

نلاحظ عند النقطة $(15, 5, 37)$ قيمة هـ أكبر ما يمكن عليه وبما أن ٣٧، ٥ تمثل عدد الأثواب من النوع الثاني اذن أكبر عدد صحيح يسبقه، هو ٣٧ وعليه تكون دالة الهدف

$$\text{هـ} = 1930 = 37 \times 40 + 15 \times 30$$

وعليه يكون انتاج ١٥ ثوب من النوع الأول و ٣٧ ثوب من النوع الثاني يحقق أكبر دخل للخياط وهو ١٩٣٠ دينار كويتي.



لتكن س عدد أسئلة الفئة ١،

ص عدد أسئلة الفئة ب

$$س \leq ٠, ص \leq ٠$$

$$س + ص \geq ١٨$$

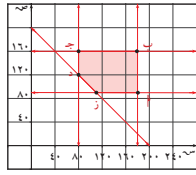
$$٥س + ٨ص \geq ١٢٠$$

$$\text{هـ} = ٨س + ١٢ص$$

رؤوس منطقة الحل هي: $(0, 0)$ ، $(0, 18)$ ، $(10, 8)$ ، $(15, 0)$

عند النقطة $(10, 8)$ دالة الهدف هـ = ١٨٤

يحقق الطالب أعلى درجة عند الإجابة على ٨ أسئلة من الفئة ١، و ١٠ أسئلة من الفئة ب.



فتحصل على المتباينات التالية:

$$س \leq ٠, ص \leq ٠$$

$$١٨٠ \geq ٥س + ٨ص$$

$$١٦٠ \geq ٤س + ٣ص$$

$$٢٠٠ \leq س + ص$$

دالة الهدف: هـ = -س + ٣ص

نقاط الحدود لمنطقة الحل:

$(0, 180)$ ، ب $(180, 0)$ ، ج $(160, 40)$ ، د $(120, 80)$ ، ز $(90, 110)$

$$\text{هـ} = 180 - (90) = ٩٠$$

$$\text{هـ} = 180 - (160) = ٢٠$$

$$\text{هـ} = 180 - (120) = ٦٠$$

$$\text{هـ} = 180 - (90) = ٩٠$$

∴ دالة الهدف ستكون أكبر ما يمكن عند النقطة ج $(160, 40)$ وقيمته هـ = ٤٠٠

أي يجب أن تنتج الشركة في اليوم الواحد ٨٠ آلة حاسبة علمية و ١٦٠ آلة حاسبة بيانية فتكون دالة الهدف قيمتها ٤٠٠ دينار.

حاول أن تحل

٤ في اختبار من فئتين ١، ب بنال الطالب ٨ درجات عن كل إجابة صحيحة في الفئة ١ و ١٢ درجة عن كل إجابة صحيحة في الفئة ب. الحد الأقصى من الزمن لكل سؤال في الفئة ١ هو ٥ دقائق وفي الفئة ب هو ٨ دقائق على ألا يتجاوز الزمن الكلي ١٢٠ دقيقة ويسمح للطالب بالإجابة عن ١٨ سؤالاً على الأكثر. على افتراض أن كافة الإجابات صحيحة، فما عدد الإجابات الصحيحة من كل فئة التي يجب أن يجيب عنها الطالب المشارك ليحقق أعلى درجة؟

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات التالية:

$$س \leq ٠, ص \leq ٠, ٤س + ٢ص \geq ٤$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أكبر ما يمكن، حيث هـ = س + ٣ص.

(٢) أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات التالية:

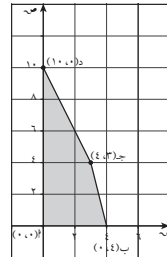
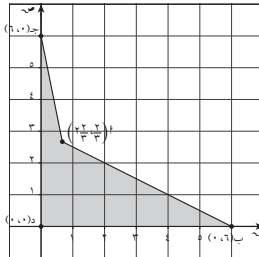
$$س \leq ٠, ص \leq ٠, ٥س + ٤ص \geq ٨$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن حيث هـ = س + ٣ص.

في التمرين (٣-٤)، أوجد قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ قيمة عظمى أو قيمة صغرى حيث:

(٣) دالة الهدف هـ = س + ٣ص

(٤) دالة الهدف هـ = س + ٩ص



المرشد لحل المسائل

المرشد لحل المسائل



نوعية الهواء: أرادت إحدى المدن أن تفرس أشجار القيقب والراتنج (التنوب: نوع من الأشجار الصنوبرية) لامتصاص ثاني أكسيد الكربون. إذا كان لديها ٢١٠٠ دينار كويتي لتنفقها على زراعة أشجار القيقب والراتنج، وتريد غرس مساحة ٤٥٠٠ متر.
 ١ استخدم البيانات من الجدول، ثم اكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.

٢ اكتب دالة الهدف.

٣ مثل نظام المتباينات بيانيًا وأوجد إحداثيات الرؤوس.

٤ كم شجرة من كل نوع على المدينة أن تفرس لتزيد من عملية امتصاص ثاني أكسيد الكربون للحد الأقصى؟

بيانات حول أشجار القيقب والراتنج

الراتنج	القيقب
كلفة غرس الأشجار	٣٠ دينارًا كويتيًا
المساحة المطلوبة	٦٠ مترًا
امتصاص ثاني أكسيد الكربون	٦٥٠ كجم/ السنة

الحل: لنفترض أن: س = عدد أشجار الراتنج
 م = عدد أشجار القيقب

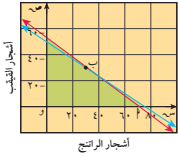
١ نظام المتباينات الخطية:

$$\begin{cases} 30s + 40m \geq 2100 \\ 60s + 90m \geq 4500 \\ s \geq 0, m \geq 0 \end{cases}$$

٢ دالة الهدف:

$$H = 650s + 300m$$

علينا إيجاد قيم س، م التي تجعل دالة الهدف ه أكبر ما يمكن.



٨٦

إجابة «مسألة إضافية»

ليكن: س = عدد النوع الأول من البكتيريا: $s \geq 0$

ص = عدد النوع الثاني من البكتيريا: $v \geq 0$

النظام المناسب لهذه المسألة:

$$\begin{cases} 4s + 3v \leq 240 \\ 30 \leq s \leq 60 \\ v \geq 70 \end{cases}$$

دالة الهدف ه = $5s + 7v$

رؤوس منطقة الحل هي: $(0, 60), (40, 30), (60, 30), (60, 70)$

$(0, 60)$

عند النقطة $(0, 60)$ تكون دالة الهدف ه = ٣٠٠

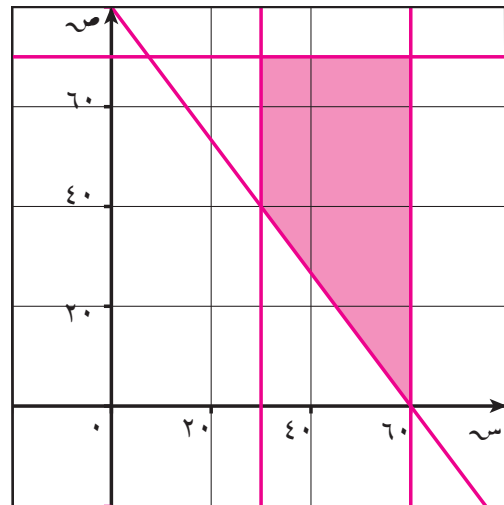
أصغر ما يمكن

لتقليل الكلفة للحد الأدنى يجب على العامل أن لا

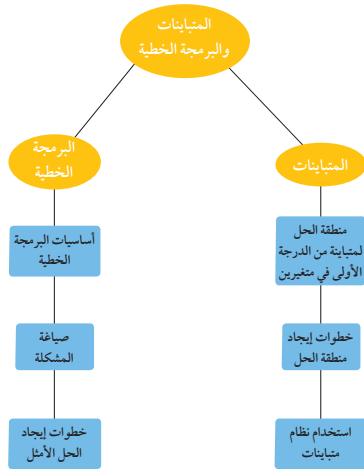
يستخدم أي بكتيريا من النوع الثاني.

هـ لها قيمة صغرى عندما نستخدم ٦٠ عينة من النوع الأول

من البكتيريا، وعدم استخدام النوع الثاني.



مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



٨٨

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أدناه ، حيث $(0, 70)$ ، $(30, 30)$ ، $(50, 0)$ ، و $(0, 0)$

دالة الهدف $z = 300x + 70y$ من $300x + 70y = 45000$

من $28000 = 30 \times 300 + 30 \times 70$

من $15000 = 50 \times 300 + 0 \times 70$

من $0 = 0 \times 300 + 0 \times 70$

دالة الهدف z تكون أكبر ما يمكن عند النقطة $(0, 70)$ ، وقيمتها $z = 49000$ أي أنه لزيادة امتصاص ثاني أكسيد الكربون للحد الأقصى، علينا أن نغرس ٧٠ شجرة راتنج.

مسألة إضافية:

يقوم عالم أحياء بتطوير نوعين جديدين من البكتيريا. تنتج كل عينة من النوع الأول من البكتيريا أربع بكتيريا جديدة قابلة للنمو. فيما تنتج كل عينة من النوع الثاني ثلاث بكتيريا جديدة قابلة للنمو.

يجب إنتاج على الأقل ٢٤٠ بكتيريا جديدة قابلة للنمو من كلا النوعين. ويجب أن تكون ٣٠ عينة على الأقل من النوع الأول من العينات الأصلية، على ألا يتجاوز عددها ٦٠. ولا يمكن أن يكون عدد العينات أكثر من ٧٠ عينة من النوع الثاني من العينات الأصلية. تبلغ كلفة عينة من النوع الأول ٥ دنانير كويتية، فيما تبلغ كلفة عينة من النوع الثاني ٧ دنانير كويتية.

كم عينة من النوع الثاني من البكتيريا على عالم الأحياء أن يستخدم لتقليص الكلفة للحد الأدنى؟

٨٧

- البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًا.
- الحل الأمثل: يعرف الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية لتعظيم (أو تصغير) دالة الهدف بأنه نقطة في فضاء الحلول الممكنة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن.
- خطوات إيجاد الحل الأمثل:
 - ١ تحديد المتغيرات.
 - ٢ كتابة نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.
 - ٣ تمثيل نظام المتباينات بيانيًا.
 - ٤ إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
 - ٥ كتابة دالة الهدف z (الدالة الخطية) التي نريد إيجاد قيمتها الصغرى أو العظمى.
 - ٦ التعويض بإحداثيات الرؤوس في الدالة.
 - ٧ اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

٩٠

ملخص

- خواص التباين:

إذا كانت s ، v ، c أعدادًا حقيقية وكان $s > v$ فإن:

١ $s + c > v + c$ ، $s - c > v - c$ ، $s > v$ ، $c > 0$

٢ $s + c < v + c$ ، $s - c < v - c$ ، $s < v$ ، $c < 0$

٣ $s + c < v + c$ ، $s - c < v - c$ ، $s < v$ ، $c > 0$

- أشكال المتباينة من الدرجة الأولى:

١ $ax + by > c$

٢ $ax + by \geq c$

٣ $ax + by < c$

٤ $ax + by \leq c$

- خط الحدود هو المستقيم $ax + by = c$ الذي يمكن استنتاجه من إحدى المتباينات.

يمثل خط الحدود بمستقيم متصل في حالة أي من المتباينتين:

١ $ax + by \geq c$ ، $ax + by \leq c$

يمثل خط الحدود بمستقيم منقطع في حالة أي من المتباينتين:

١ $ax + by > c$ ، $ax + by < c$

- خطوات إيجاد منطقة الحل:

١ ترسم خط الحدود للبرمجة الخطية باستخدام الخط المتصل في حالة (\geq) أو (\leq) والخط المنقطع في حالة $(>)$ أو $(<)$.

٢ نقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة، ولتحديد هذا الجانب نختار أي نقطة من أحد جانبي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة، إذا نتج عن ذلك عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل، لكن إذا نتج عن ذلك عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل.

٣ في حالة (\geq) أو (\leq) تتكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على خط الحدود بالإضافة إلى جميع النقاط الواقعة إلى جانب منطقة الحل.

وفي حالة $(>)$ أو $(<)$ تتكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على جانب منطقة الحل.

٤ نظل المنطقة التي تمثل منطقة حل المتباينة.

٨٩

تمارين إثرائية

في التمرينين (١، ٢)، ظلّل المنطقة التي يحددها كل نظام مما يلي:

$$(1) \begin{cases} س + ص \geq 1 \\ س \leq 0 \\ ص \leq 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} س - ص \geq 2 \\ ص + س \geq 3 \\ ص \leq 4 \\ س < 1 \end{cases}$$

(٣) يحضر بائع يوميًا نوعين من الكعك المحلى. لتحضير كعكة من النوع الأول يلزمه ٤ أكواب من الحليب، و٣ أكواب من الطحين ولتحضير كعكة من النوع الثاني يلزمه كوبين من الحليب و٣ أكواب من الطحين. إذا كان لديه ١٦ كوبًا من الحليب و١٢ كوبًا من الطحين ويريد ٣ دناتير من مبيع كعكة من النوع الأول ودناتيرين من مبيع كعكة من النوع الثاني. فاكتمب نظام متباينات وحله لمعرفة عدد الكعكات التي عليه تحضيرها من كل نوع لتحقيق ربح أقصى. وما هو هذا الربح؟

اختبار الوحدة الخامسة

أسئلة مقالية

(١) أوجد حل المتباينتين ثم ممثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية.

$$(1) 3 - س \leq 7$$

$$(ب) 10 - س > 3 + ص \geq 5$$

(٢) بين أنّ من النقاط التالية: (٢، ١)، ب (٠، ١٣)، ج (٣، -٤) تحقق المتباينة: س - ٢ ص ≤ ١٣.

(٣) ممثّل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: س + ٥ ص > ٠

(٤) ممثّل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

$$س + ص \leq 4, \quad س - 3 \geq 9$$

(٥) ممثّل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

$$\begin{cases} س \leq 3 \\ س + 3 \geq 9 \\ س - 1 > 1 \end{cases}$$

(٦) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات التالية:

$$س \leq 0, \quad ص \leq 4, \quad س + ص \geq 10, \quad ٨ \geq ٢ + ص$$

ثم أوجد من مجموعة حل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن وأكبر ما يمكن، حيث هـ = س + ٣ ص.

(٧) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات التالية:

$$س \leq 0, \quad ص \leq 4, \quad س + ٣ \leq ٣٠, \quad ٢١ \leq ٣ + ص$$

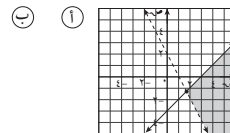
ثم أوجد من مجموعة حل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن، حيث هـ = ٥ ص + ٨ س.

٣٧

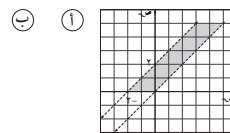
٣٦

تمارين موضوعية

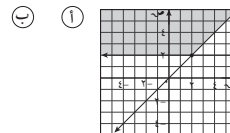
في التمارين (١-٥)، عبارات ظلّل (١) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.



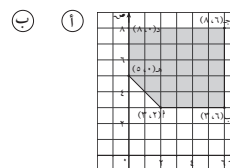
(٢) المنطقة المظللة في الشكل تمثل الحل المشترك للمتباينات:



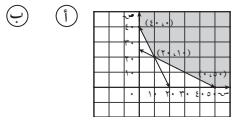
(٤) قيم س، ص التي تجعل دالة الهدف هـ = ٥ ص + ١٠ س أصغر ما يمكن هي (٣، ٢)



(٦) المنطقة المظللة في الشكل تمثل الحل المشترك للمتباينتين:



(٨) القيم س، ص التي تجعل دالة الهدف هـ = ٥ ص + ١٠ س أصغر ما يمكن هي (٣، ٢)

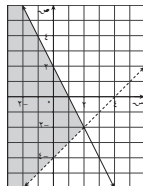


(١٠) المنطقة المظللة في الشكل تمثل الحل المشترك للمتباينتين:

$$\begin{cases} س + ٢ \leq ٢ \\ س - ٢ \leq ٥ \\ س \leq ٠ \\ ص \leq ٠ \end{cases}$$

في التمارين (٦-١١)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(٦) المنطقة المظللة في الشكل تمثل الحل المشترك للمتباينتين:



(أ) $\begin{cases} س + ٢ \leq ٢ \\ س \geq ٤ - س \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} س + ٢ > ٢ \\ س \leq ٤ - س \end{cases}$

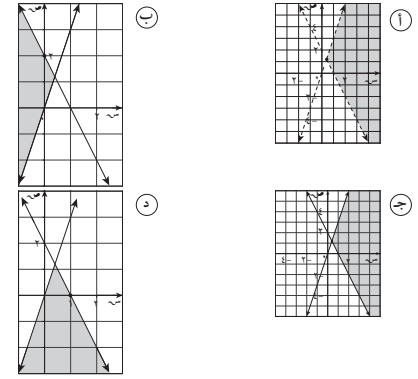
(ج) $\begin{cases} س + ٢ \geq ٢ \\ س < ٤ - س \end{cases}$

(د) $\begin{cases} س + ٢ \leq ٢ \\ س > ٤ - س \end{cases}$

٣٩

٣٨

(٧) الرسم البياني الذي يمثل نظام المتباينات $\begin{cases} 2 \leq x + y \\ x \geq 3 \end{cases}$ هو:



(٨) أي زوج من النقاط التالية هو ضمن مجموعة حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x > 5 \\ x - 7 \leq 3 \end{cases}$$

- ① (١، ٥-) ② (٣، ٢-) ③ (٤، ٤) ④ (٦، ١)

(٩) إذا كانت رؤوس منطقة الحل هي $(٠، ٠)$ ، $(٠، ٣)$ ، $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$ ، $(٣، ٠)$ لدالة الهدف $z = ٦س + ٨ص$ فإن القيمة العظمى لها هي:

- ① ٣٧ ② ٢٤
③ ٤٧ ④ ٣٠

(١٠) في نظام المتباينات $\begin{cases} ٨ \geq س + ص \\ ١٤ \geq ٢س + ص \\ ٠ \leq س، ٠ \leq ص \end{cases}$ تكون دالة الهدف $z = ٢س + ص$ أصغر ما يمكن عند:

- ① (٠، ٠) ② (٧، ٠)
③ (١٦، ٢) ④ (٠، ٨)

(١١) نظام المتباينات الذي له الرؤوس التالية: $(٠، ٠)$ ، $(٤، ١)$ ، $(٠، ٣)$ ، $(٠، ٥)$ هو:

- ① $\begin{cases} ٥ \leq س + ص \\ ٦ \leq ٢س + ص \\ ٠ \leq س، ٠ \leq ص \end{cases}$ ② $\begin{cases} ٥ \geq س + ص \\ ٦ \geq ٢س + ص \\ ٠ \leq س، ٠ \leq ص \end{cases}$
③ $\begin{cases} ٥ \geq س + ص \\ ٦ \geq ٢س + ص \\ ٠ \leq س، ٠ \leq ص \end{cases}$ ④ $\begin{cases} ٥ \leq س + ص \\ ٦ \leq ٢س + ص \\ ٠ \leq س، ٠ \leq ص \end{cases}$

(٤-١-١) المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) (أ) $s = \{0, 1, 2, 3\}$ ، متقطع.

(ب) $s = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ ، متقطع.

(ج) $s = \{1, 2, 3, 4\}$ ، متقطع.

(د) $s = \{0, 2, 4, 6\}$ ، متقطع.

(٢) (أ) فضاء العينة (ف) = $\{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$.

(ب) مدى المتغير العشوائي $s = \{0, 1, 2\}$

(ج) د(٠) = ل(س = ٠) = $\frac{1}{4}$

د(١) = ل(س = ١) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

د(٢) = ل(س = ٢) = $\frac{1}{4}$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(٣) $ك = ١, ٠$

(٤) د(٢) = $٣, ٠$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	$٠, ١$	$٠, ٣$	$٠, ٤$	$٠, ٢$

(٥) (أ) عدد عناصر فضاء العينة (ن (ف)) = $١٠ = ٢٥٢$

(ب) مدى المتغير العشوائي $s = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(ج) ل(س = ٠) = $\frac{1}{42}$

ل(س = ٢) = $\frac{10}{21}$

ل(س = ١) = $\frac{5}{21}$

ل(س = ٣) = $\frac{5}{21}$

ل(س = ٤) = $\frac{1}{42}$

(د)

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

$$(٦) \mu = ١,٤.$$

$$(٧) (أ) \text{ فضاء العينة (ف) } = \{١, ٢, ٣, ٤\}.$$

$$(ب) \text{ مدى المتغير العشوائي } \text{سـ} = \{١, ٢, ٣, ٤\}.$$

$$(ج) \text{ د(١) = ل(سـ=١) = } \frac{١}{٤}$$

$$\text{د(٢) = ل(سـ=٢) = } \frac{١}{٤}$$

$$\text{د(٣) = ل(سـ=٣) = } \frac{١}{٤}$$

$$\text{د(٤) = ل(سـ=٤) = } \frac{١}{٤}$$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$(هـ) \mu = ٢,٥$$

$$(٨) (أ) \mu = ٨,٥$$

$$(ب) \sigma^2 = ٠,٧٥$$

$$(ج) \sigma \approx ٠,٨٦٦$$

$$(٩) \text{ ت(٠) = ل(سـ} \geq ٠) = ٠,٢$$

$$\text{ت(١) = ل(سـ} \geq ١) = ٠,٣٥$$

$$\text{ت(٢) = ل(سـ} \geq ٢) = ٠,٤٥$$

$$\text{ت(٣) = ل(سـ} \geq ٣) = ٠,٧$$

$$\text{ت(٣,٥) = ل(سـ} \geq ٣,٥) = ٠,٧$$

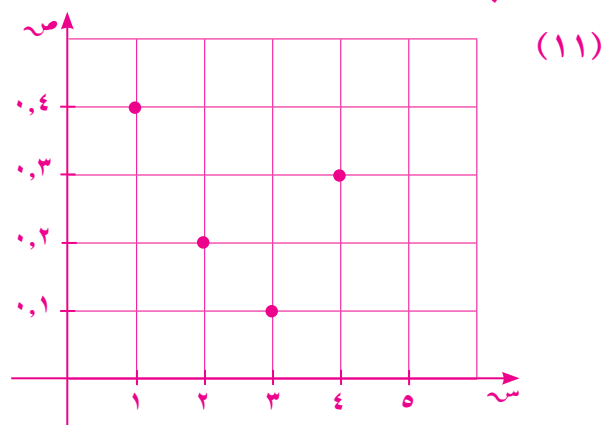
$$\text{ت(٤) = ل(سـ} \geq ٤) = ١$$

$$\text{ت(٥) = ل(سـ} \geq ٥) = ١$$

$$(١٠) (أ) \text{ ل(١- < سـ < ٥) = ت(٥) - ت(١-) = ٠,٦}$$

$$(ب) \text{ ل(٣ \leq سـ < ٧) = ت(٧) - ت(٣) = ٠,٥٥}$$

$$(ج) \text{ ل(سـ < ٣) = ١ - ل(سـ \geq ٣) = ١ - ت(٣) = ٠,٥٥}$$



(١٢) (أ) فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}.

(ب) مدى المتغير العشوائي س = {٠، ١، ٢}.

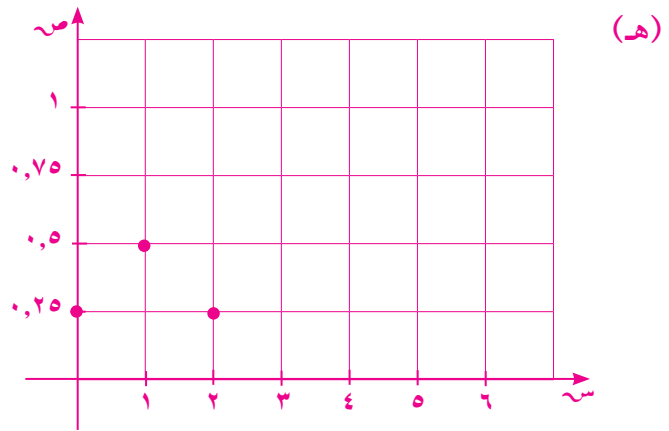
$$(ج) د(٠) = ل(س = ٠) = \frac{1}{4}$$

$$د(١) = ل(س = ١) = \frac{1}{4}$$

$$د(٢) = ل(س = ٢) = \frac{1}{4}$$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



$$(و) س > ٠ \Leftrightarrow ت(س) = صفر$$

$$٠ \leq س < ١ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{1}{4}$$

$$١ \leq س < ٢ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$س \leq ٢ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = ١$$

$$(١٣) (أ) ل(س = صفر) \approx ٩,٧٧ \times ١٠^{-٤} \approx ٠,٠٠١$$

$$(ب) ل(٢ > س \geq ٤) = د(٣) + د(٤) \approx ٠,٣٢٢$$

$$(١٤) ل(س = ٤) = ١٠! \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \approx ٠,٢٠٥$$

$$(١٥) (أ) ل(س = ٥) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot ١٠^{-٣} \approx ١,٨٨ \times ١٠^{-٣}$$

$$(ب) ل(س \leq ١) = ١ - ل(س = ٠) \approx ٠,٧٢١$$

$$(ج) ل(س \geq ١) = ل(س = ٠) + ل(س = ١) \approx ٠,٢٧٩ + ٠,٣٩١ \approx ٠,٦٧$$

$$(١٦) \text{ ن} = ١٠٠, \text{ س} = \text{عدد الوحدات المعيبة}, \text{ ل} = \text{نسبة إنتاج الوحدات المعيبة} = ٠,٠٣, \\ ١ - \text{ل} = ٠,٩٧$$

$$\begin{aligned} \text{التوقع } \mu &= \text{ن} \times \text{ل} = ١٠٠ \times (٠,٠٣) = ٣ \\ \text{التباين } \sigma^2 &= \text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل}) = (١٠٠ \times ٠,٠٣) \times (٠,٩٧) = ٢,٩١ \\ \text{الانحراف المعياري } \sigma &= \sqrt{٢,٩١} \approx ١,٧١ \end{aligned}$$

$$(١٧) \text{ (أ) ل} = (\text{س} = ٧) \times \sqrt[١٢]{٠,٥} \times \sqrt[٧]{٠,٥} = ٠,١٩٣ \approx \sqrt[١٢]{٠,٥} \times \sqrt[٧]{٠,٥}$$

$$\begin{aligned} \text{(ب) ن} &= ١٢, \text{ ل} = \frac{١}{٣}, \text{ ل} - ١ = -\frac{٢}{٣} \\ \text{التوقع } \mu &= \text{ن} \times \text{ل} = ١٢ \times \frac{١}{٣} = ٤ \\ \text{التباين } \sigma^2 &= \text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل}) = ١٢ \times \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} = ٣ \end{aligned}$$

$$(١٨) \text{ ن} = ١٠, \text{ ل} = \text{نسبة الإطارات غير الصالحة} = ٠,٠٥ \\ \text{التوقع } \mu = \text{ن} \times \text{ل} = ١٠ \times ٠,٠٥ = ٠,٥$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل}) = ١٠ \times ٠,٠٥ \times ٠,٩٥ = ٠,٤٧٥$$

$$(١٩) \text{ ن} = ٢٥٠٠, \text{ س} = \text{عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام.}$$

$$\begin{aligned} \text{ل} &= \text{نسبة إنتاج العلب الفاسدة في أحد الأيام} = ٠,٠٥ \\ ١ - \text{ل} &= ١ - ٠,٠٥ = ٠,٩٥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{التوقع } \mu &= \text{ن} \times \text{ل} = ٢٥٠٠ \times (٠,٠٥) = ١٢٥ \\ \text{التباين } \sigma^2 &= \text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل}) = (٢٥٠٠ \times ٠,٠٥) \times (٠,٩٥) = ١١٨,٧٥ \end{aligned}$$

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{١١٨,٧٥} \approx ١٠,٨٩٧$$

$$(٢٠) \text{ ل} = (\text{س} = ٥) \times \sqrt[١٥]{٠,٢} \times \sqrt[١٠]{٠,٨} = ٠,١٠٣ \approx \sqrt[١٥]{٠,٢} \times \sqrt[١٠]{٠,٨}$$

$$(٢١) \text{ ن} = ١٦, \text{ س} = \text{عدد مرات ظهور الصورة}, \text{ ل} = \text{نسبة ظهور الصورة} = ٠,٥, \text{ ل} - ١ = -٠,٥$$

$$\begin{aligned} \text{التوقع } \mu &= \text{ن} \times \text{ل} = ١٦ \times (٠,٥) = ٨ \\ \text{التباين } \sigma^2 &= \text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل}) = ١٦ \times ٠,٥ \times ٠,٥ = ٤ \\ \text{الانحراف المعياري } \sigma &= \sqrt{٤} = ٢ \end{aligned}$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

- (١) (أ) $s = \{0, 1, 2, 3\}$ ، s متغير عشوائي متقطع.
 (ب) $s = \{0, 3, 6, 9\}$ ، s متغير عشوائي متقطع.
 (ج) $s = \{-1, 0, 1, 2\}$ ، s متغير عشوائي متقطع.
 (٢) (أ) فضاء العينة (ف) $= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.
 (ب) مدى المتغير العشوائي $s = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

(ج) د(٢) = ل(س = ٢) = $\frac{1}{9}$

د(٣) = ل(س = ٣) = $\frac{2}{9}$

د(٤) = ل(س = ٤) = $\frac{1}{3}$

د(٥) = ل(س = ٥) = $\frac{2}{9}$

د(٦) = ل(س = ٦) = $\frac{1}{9}$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي s :

س	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(٣) $k = 4, 0$

(٤) د(٤) = $3, 0$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي s :

س	-١	٢	٣	٤
د(س)	$0, 1$	$0, 2$	$0, 4$	$0, 3$

(٥) $\mu = 2, 5$

(٦) (أ) عدد عناصر فضاء العينة (ن) $= {}^3U^8 = 56$

(ب) $s = \{1, 2, 3\}$.

(ج) د(١) = ل(س = ١) = $\frac{{}^2U^2 \times {}^1U^6}{{}^3U^8} = \frac{3}{28}$

د(٢) = ل(س = ٢) = $\frac{{}^1U^2 \times {}^2U^6}{{}^3U^8} = \frac{15}{28}$

د(٣) = ل(س = ٣) = $\frac{{}^3U^6}{{}^3U^8} = \frac{5}{14}$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ:

س	١	٢	٣
د(س)	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

$$(٧) \mu = ١, ٢$$

$$(٨) سـ = \{٠, ٢, ٤, ٦\}$$

$$د(٠) = د(٢) = د(٤) = د(٦) = \frac{1}{4}$$

$$\text{التوقع } \mu = ٣$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = ٥$$

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{٥} \approx ٢, ٢٤$$

$$(٩) \quad (أ) \quad \mu = \frac{13}{9}$$

$$(ب) \quad \sigma^2 = \frac{٥٦}{٨١}$$

$$(ج) \quad \sigma = \frac{\sqrt{١٤٧٢}}{9}$$

$$(١٠) \quad ت(١-) = ل(سـ \geq ١) = ١, ١$$

$$ت(٠) = ل(سـ \geq ٠) = ٠, ٣$$

$$ت(٠, ٥) = ل(سـ \geq ٥, ٠) = ٠, ٣$$

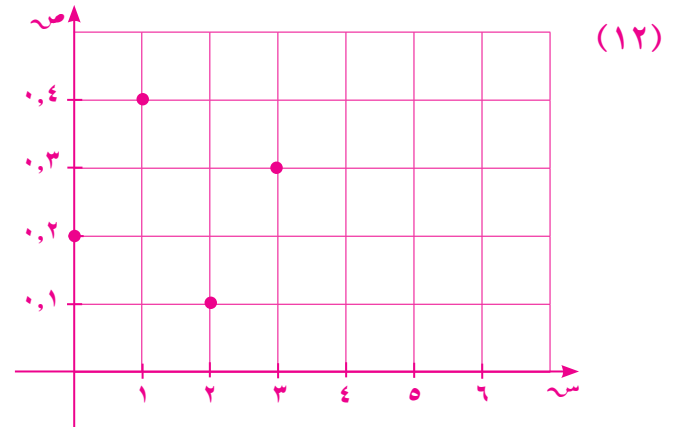
$$ت(١) = ل(سـ \geq ١) = ٠, ٧$$

$$ت(١, ٥) = ل(سـ \geq ٥, ١) = ٠, ٧$$

$$(١١) \quad (أ) \quad ل(٢- \leq سـ < ٢) = ت(٢) - ت(٢-) = ٠, ٧٥ - ٠, ١٥ = ٠, ٦$$

$$(ب) \quad ل(٠ < سـ < ٤) = ت(٤) - ت(٠) = ٠, ٣ - ١ = ٠, ٧$$

$$(ج) \quad ل(سـ < ٠) = ١ - ل(سـ \geq ٠) = ١ - ٠, ٣ = ٠, ٧$$



$$(١٣) \text{ (أ) ل(س=صفر)} = (٠, ٩) \wedge \approx ٤٣, ٠$$

$$\text{(ب) ل(} ١ \geq \text{س} > ٤) = \text{د(} ١) + \text{د(} ٢) + \text{د(} ٣) \approx ٥٦, ٠$$

$$(١٤) \text{ (أ) فضاء العينة (ف) = } \{(ص, ص, ص), (ص, ص, ك), (ص, ك, ص), (ك, ص, ص), (ك, ص, ك), (ص, ك, ك), (ك, ك, ص), (ك, ك, ك)\}.$$

$$\text{(ب) مدى المتغير العشوائي س} = \{٠, ١, ٢, ٣\}.$$

$$\text{(ج) د(} ٠) = \text{ل(س=} ٠) = \frac{١}{٨}.$$

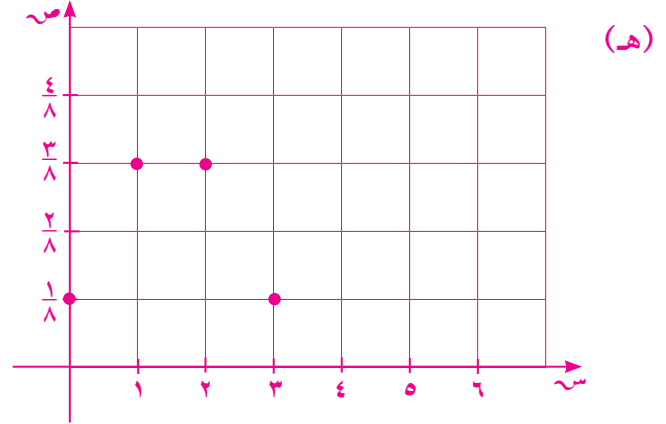
$$\text{د(} ١) = \text{ل(س=} ١) = \frac{٣}{٨}$$

$$\text{د(} ٢) = \text{ل(س=} ٢) = \frac{٣}{٨}$$

$$\text{د(} ٣) = \text{ل(س=} ٣) = \frac{١}{٨}$$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$



$$\text{(و) س} > ٠ \Leftarrow \text{ت(س)} = \text{صفر}$$

$$٠ \leq \text{س} < ١ \Leftarrow \text{ت(س)} = \frac{١}{٨}$$

$$١ \leq \text{س} < ٢ \Leftarrow \text{ت(س)} = \frac{١}{٢}$$

$$٢ \leq \text{س} < ٣ \Leftarrow \text{ت(س)} = \frac{٧}{٨}$$

$$\text{س} \leq ٣ \Leftarrow \text{ت(س)} = ١$$

- (١٥) (أ) د(ظهور العدد ٤ ثلاث مرات) $= {}^3\left(\frac{1}{4}\right) {}^2\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,032$
- (ب) د(ظهور العدد ٤ مرّة واحدة على الأقل) $= 1 - (0) = 1 - {}^0\left(\frac{1}{4}\right) {}^0\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,598$
- (ج) د(ظهور العدد ٤ مرّة واحدة على الأكثر) $= د(0) + د(1) = {}^0\left(\frac{1}{4}\right) {}^0\left(\frac{5}{4}\right) + {}^1\left(\frac{1}{4}\right) {}^0\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,804$
- (١٦) د(ظهور صورتين فقط) $= \frac{3}{8} = 0,375$
- (١٧) (أ) د(ثلاثة ذكور فقط) $= {}^3\left(\frac{1}{5}\right) {}^0\left(\frac{4}{5}\right) = 0,3125$
- (ب) د(عدد الذكور أقل من عدد الإناث) $= د(0) + د(1) + د(2) = 0,34375$
- (١٨) ن = ٢٥٠، ل = نسبة إنتاج الأجهزة المعيبة = ٠,٠٢
- التوقع $\mu = ن ل = ٢٥٠ \times (0,02) = ٥$
- التباين $\sigma^2 = ن ل(١ - ل) = (٢٥٠)(0,02)(0,98) = ٤,٩$
- الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4,9} \approx ٢,٢١$
- (١٩) ن = ١٥، ل = نسبة الأجهزة المعيبة = ٠,٠١
- التوقع $\mu = ن ل = ١٥ \times (0,01) = ٠,١٥$
- التباين $\sigma^2 = ن ل(١ - ل) = (١٥)(0,01)(0,99) = ٠,١٤٨٥$

تمارين موضوعية

(١) (ب)	(٢) (ب)	(٣) (أ)	(٤) (ب)	(٥) (أ)
(٦) (أ)	(٧) (ب)	(٨) (أ)	(٩) (ب)	(١٠) (ب)
(١١) (ب)	(١٢) (د)	(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (د)
(١٦) (د)	(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ج)
(٢١) (د)	(٢٢) (ج)	(٢٣) (ج)	(٢٤) (ب)	(٢٥) (ج)
(٢٦) (د)	(٢٧) (د)	(٢٨) (ب)	(٢٩) (ب)	(٣٠) (ج)

(٤-١-ب) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) (أ) متغيرة عشوائية متصلة.

(ب) متغيرة عشوائية متصلة.

(ج) متغيرة عشوائية متصلة.

(د) متغيرة عشوائية متصلة.

(هـ) متغيرة عشوائية متقطعة.

(٢) (أ) ل $(2 \leq s \leq 4) = \frac{1}{4} \times 2 = 1$

(ب) ل $(s \leq 5, 2) = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = 1$

(٣) (أ) ل $(0 \leq s \leq 5) = \frac{1}{5} \times 5 = 1$

(ب) ل $(s = 3) = \text{صفر}$

(ج) ل $(s \geq 2) = \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2 = 1$

(د) ل $(s < 2) = \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \times 3 = 1$

(٤) (أ) المساحة تحت منحنى الدالة $d = \frac{1}{6} \times ((1-) - 5) = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

إذا الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

(ب) $1- \geq s \geq 5, 5 = b, 1- = 2 \Leftarrow b - 5 = (1-) - 6 = \frac{1}{6} = \frac{1}{b-5}$

\therefore الدالة د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{6} : 1- \geq s \geq 5 \\ \text{صفر} : \text{في ما عدا ذلك} \end{array} \right\}$

يمكن وضعها على الصورة: د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{b-5} : 2 \geq s \geq 5 \\ \text{صفر} : \text{في ما عدا ذلك} \end{array} \right\}$

\therefore الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(ج) ل $(0 < s \leq 3) = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$

(د) التوقع $\mu = \frac{5+1-}{2} = 2$

التباين $\sigma^2 = \frac{2(1+5)}{12} = 3$

(٥) (أ) المساحة تحت منحنى الدالة $d = \frac{1}{3} \times (2-5) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ \therefore الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

(ب) $2 \geq s \geq 5 \therefore b = 5, 2 = 2 \Leftarrow b - 3 = 3 = \frac{1}{b-3} \therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{b-3}$

\therefore الدالة د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} : 2 \geq s \geq 5 \\ \text{صفر} : \text{في ما عدا ذلك} \end{array} \right\}$

يمكن وضعها على الصورة: $D(s) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b-a} : a \leq s \leq b \\ \text{صفر} : \text{في ما عدا ذلك} \end{array} \right.$

∴ الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

$$(ج) \text{ ل } (s \geq 4) = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$$

$$(د) \text{ ل } (3 \leq s \leq 4) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 1$$

$$(هـ) \text{ التوقع } \mu = \frac{5+2}{3}$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{2(2-5)}{12} = \frac{3}{4}$$

(٦) (أ) المساحة تحت منحنى الدالة $D = \frac{1}{\lambda} \times ((4-) - (-4)) = \frac{1}{\lambda} = 1$ ∴ الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

$$(ب) \text{ ل } (0, 5 \leq s \leq 1, 5) = \frac{1}{\lambda} \times ((0, 5-) - (-1, 5)) = \frac{1}{\lambda} \times 2 = \frac{1}{4}$$

$$(ج) \text{ التوقع } \mu = \frac{-4 + 4}{2} = \text{صفر}$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{2((4-) - (-4))}{12} = \frac{16}{3}$$

(٧) (أ) المساحة تحت منحنى الدالة $D = \frac{1}{V} \times (0 - (-7)) = \frac{1}{V} = 1$ ∴ الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

$$(ب) \text{ ل } (0 \leq s \leq \frac{7}{8}) = \frac{1}{\lambda} \times (0 - (-\frac{7}{8})) = \frac{7}{64}$$

$$(ج) \text{ التوقع } \mu = \frac{7+0}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{2(0 - (-7))}{12} = \frac{49}{12}$$

(٨) (أ) $\text{ل } (0 \leq s \leq 3) = \text{مساحة المنطقة المثلثة.}$

$$1 = \frac{6}{9} \times 3 \times \frac{1}{2} =$$

(ب) $\text{ل } (s > 1) = \text{مساحة المنطقة المثلثة.}$

$$\frac{1}{9} = \frac{2}{9} \times 1 \times \frac{1}{2} =$$

$$(ج) \text{ ل } (s \leq 1) = 1 - \text{ل } (s > 1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

(٩) (أ) $\text{ل } (0 \leq s < \frac{1}{2}) = \text{مساحة المنطقة المثلثة.}$

$$1 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$(ب) \text{ ل } (s < \frac{1}{4}) = 1 - \text{ل } (s \geq \frac{1}{4}) = 1 - 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$(ج) \text{ ل } (s \leq \frac{1}{3}) = 1 - \text{ل } (s > \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$(١٠) (أ) \text{ ل } (2, 16 \geq u) = 0,98461$$

$$(ب) \text{ ل } (2, 51 \leq u) = 1 - \text{ل } (2, 51 > u) = 1 - 0,99396 = 0,00604$$

$$(ج) \text{ ل } (1, 5 \leq u \leq 2, 4) = \text{ل } (2, 4 \geq u) - \text{ل } (1, 5 \geq u)$$

$$= 0,99180 - 0,93319 = 0,05861$$

$$0,26109 = (0,64 - \geq \nu) \text{ ل } (أ) \quad (11)$$

$$(1,7 - \geq \nu) \text{ ل } - (2,58 \geq \nu) \text{ ل } = (2,58 \geq \nu \geq 1,7 -) \text{ ل } (ب)$$

$$0,95049 = 0,04457 - 0,99506 =$$

$$(1,23 - \geq \nu) \text{ ل } - (0,68 \geq \nu) \text{ ل } = (0,68 \geq \nu \geq 1,23 -) \text{ ل } (ج)$$

$$0,6424 = 0,10935 - 0,75175 =$$

$$1 - = \frac{50 - 40}{10} = \frac{\mu_1 - \nu}{\sigma} = {}_1\nu \Leftarrow 40 = {}_1\text{س} \quad (أ) \quad (12)$$

$$2,6 = \frac{50 - 76}{10} = \frac{\mu_2 - \nu}{\sigma} = {}_2\nu \Leftarrow 76 = {}_2\text{س}$$

$$(1 - > \nu) \text{ ل } - (2,6 > \nu) \text{ ل } = (2,6 > \nu > 1 -) \text{ ل } = (76 > \sim > 40) \text{ ل }$$

$$0,83668 = 0,15866 - 0,99534 =$$

$$0,5 = \frac{50 - 55}{10} = \nu \Leftarrow 55 = \text{س} \quad (ب)$$

$$0,69146 = (0,5 \geq \nu) \text{ ل } = (55 \geq \sim) \text{ ل }$$

$$\xi = \sigma \Leftarrow 16 = {}^2\sigma \quad (13)$$

$$1,75 - = \frac{37 - 30}{\xi} = {}_1\nu \Leftarrow 30 = {}_1\text{س} \quad (أ)$$

$$0,5 - = \frac{37 - 35}{\xi} = {}_2\nu \Leftarrow 35 = {}_2\text{س}$$

$$(0,5 - > \nu > 1,75 -) \text{ ل } = (35 > \sim > 30) \text{ ل }$$

$$(1,75 - > \nu) \text{ ل } - (0,5 - > \nu) \text{ ل } =$$

$$0,26848 = 0,04006 - 0,30854 =$$

$$(ب) \text{ ل } (40 > \sim > 35)$$

$$0,5 - = \frac{37 - 35}{\xi} = {}_1\nu \Leftarrow 35 = {}_1\text{س}$$

$$0,75 = \frac{37 - 40}{\xi} = {}_2\nu \Leftarrow 40 = {}_2\text{س}$$

$$(0,75 > \nu > 0,5 -) \text{ ل } = (40 > \sim > 35) \text{ ل }$$

$$(0,5 - > \nu) \text{ ل } - (0,75 > \nu) \text{ ل } =$$

$$0,46483 = 0,30854 - 0,77337 =$$

$$1,75 - = \frac{37 - 30}{\xi} = \nu \Leftarrow 30 = \text{س} \quad (ج)$$

$$(1,75 - \geq \nu) \text{ ل } - 1 = (1,75 - < \nu) \text{ ل } = (30 < \sim) \text{ ل }$$

$$0,95994 = 0,4006 - 1 =$$

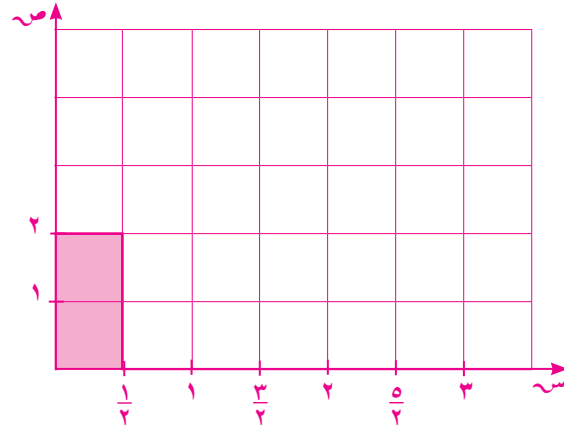
المجموعة ب تمارين تعزيزية

$$(1) (أ) \text{ ل } (0 \leq s \leq \frac{1}{3}) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$(ب) \text{ ل } (s \geq \frac{1}{4}) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(ج) \text{ ل } (s < \frac{1}{4}) = 3 \times (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$$

(2) (أ)



(ب) المساحة تحت منحنى الدالة $f(s) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. \therefore الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

$$(ج) 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leftarrow 0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leftarrow 0 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{الدالة د(س)} = \left. \begin{array}{l} 2 : \frac{1}{2} \geq s \geq 0 \\ \text{صفر} : \text{في ما عدا ذلك} \end{array} \right\}$$

$$\text{يمكن وضعها على الصورة: د(س)} = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \geq s \geq 0 \\ \text{صفر} : \text{في ما عدا ذلك} \end{array} \right\}$$

\therefore الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

$$(د) \text{ ل } (s \geq \frac{1}{8}) = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ل } (s \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = (2 \times \frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2} > s = \frac{1}{2}$$

$$(هـ) \text{ التوقع } \mu = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{1}{12} \left(0 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{48}$$

$$٥ = \sigma \Leftarrow ٢٥ = {}^٢\sigma \text{ (٣)}$$

$$١ - = \frac{٨٨ - ٨٣}{٥} = \psi \Leftarrow ٨٣ = \text{س} \text{ (أ)}$$

$$٠, ١٥٨٦٦ = (١ - \geq \psi) \text{ل} = (٨٣ \geq \sim) \text{ل}$$

$$٣, ٦ - = \frac{٨٨ - ٧٠}{٥} = \psi \Leftarrow ٧٠ = \text{س} \text{ (ب)}$$

$$(٣, ٦ - > \psi) \text{ل} - ١ = (٣, ٦ - \leq \psi) \text{ل} = (٧٠ \leq \sim) \text{ل}$$

$$٠, ٩٩٩٨٤ = ٠, ٠٠٠١٦ - ١ =$$

$$\text{(ج) ل} (٩٠ \geq \sim \geq ٨٧)$$

$$٠, ٢ - = \frac{٨٨ - ٨٧}{٥} = {}_١\psi \Leftarrow ٨٧ = {}_١\text{س}$$

$$٠, ٤ = \frac{٨٨ - ٩٠}{٥} = {}_٢\psi \Leftarrow ٩٠ = {}_٢\text{س}$$

$$(٠, ٤ \geq \psi \geq ٠, ٢ -) \text{ل} = (٩٠ \geq \sim \geq ٨٧) \text{ل}$$

$$(٠, ٢ - \geq \psi) \text{ل} - (٠, ٤ \geq \psi) \text{ل} =$$

$$٠, ٢٣٤٦٨ = ٠, ٤٢٠٧٤ - ٠, ٦٥٥٤٢ =$$

$$٣ = \sigma \Leftarrow ٩ = {}^٢\sigma \text{ (٤)}$$

$$١ = \frac{١٥ - ١٨}{٣} = \psi \Leftarrow ١٨ = \text{س} \text{ (أ)}$$

$$٠, ٨٤١٣٤ = (١ > \psi) \text{ل} = (١٨ > \sim) \text{ل}$$

$$٠, ١٥٨٦٦ = (١ > \psi) \text{ل} - ١ = (١٨ \geq \sim) \text{ل} - ١ = (١٨ < \sim) \text{ل}$$

$$١ - = \frac{١٥ - ١٢}{٣} = {}_١\psi \Leftarrow ١٢ = {}_١\text{س} \text{ (ج)}$$

$$\text{س} {}_٢ = ١٥ = {}_٢\psi \Leftarrow \frac{١٥ - ١٥}{٣} = \text{صفر}$$

$$(١ - > \psi) \text{ل} - (٠ > \psi) \text{ل} = (٠ > \psi > ١ -) \text{ل} = (١٥ > \sim > ١٢) \text{ل}$$

$$٠, ٣٤١٣٤ = ٠, ١٥٨٦٦ - ٠, ٥ =$$

تمارين موضوعية

(أ) (٥)	(أ) (٤)	(ب) (٣)	(ب) (٢)	(أ) (١)
(ب) (١٠)	(ب) (٩)	(أ) (٨)	(ب) (٧)	(أ) (٦)
(ج) (١٥)	(د) (١٤)	(أ) (١٣)	(ب) (١٢)	(د) (١١)
	(ج) (١٩)	(ج) (١٨)	(أ) (١٧)	(د) (١٦)

تمارين إثرائية

$$(١) \sigma^2 = ٢٥ \Leftrightarrow \sigma = ٥$$

$$(أ) \sigma = ٥ \Leftrightarrow \sigma^2 = ٥٥ - ٥٥ = ٥ = \text{صفر}$$

$$ل(٥٥ < \sigma) = ل(\sigma < ٥) = ١ - ل(\sigma \geq ٥) = ١ - ٥ = ٥, ٥ = ٥, ٥$$

$$(ب) \sigma = ٥٠ \Leftrightarrow \sigma^2 = ٥٥ - ٥٠ = ٥ = ١ -$$

$$ل(٥٠ > \sigma) = ل(\sigma > ١) = ١ - ١٥٨٦٦ = ٠, ١٥٨٦٦$$

$$(ج) \sigma = ٣٠ \Leftrightarrow \sigma^2 = ٥٥ - ٣٠ = ٥ = ٥ -$$

$$\sigma = ٤٠ \Leftrightarrow \sigma^2 = ٥٥ - ٤٠ = ٥ = ٣ -$$

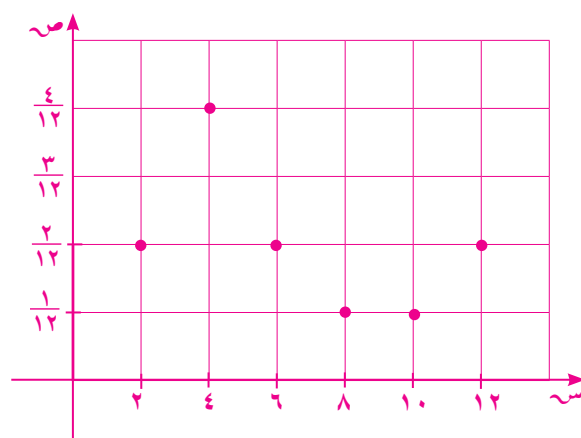
$$ل(٣٠ > \sigma > ٤٠) = ل(٣ - > \sigma > ٥ -) = ٣ -$$

$$ل(٣ - > \sigma > ٥ -) = ٣ - ٥ - = ٠, ٠٠٠٠٥ - ٠, ٠٠١٣٥ =$$

$$٠, ٠٠١٣٠ =$$

$$(٢) (أ) \frac{1}{6} = ك$$

(ب)



$$(ج) \sigma > ٢ \Leftrightarrow ت(س) = ٠$$

$$\sigma \geq ٢ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{1}{6}$$

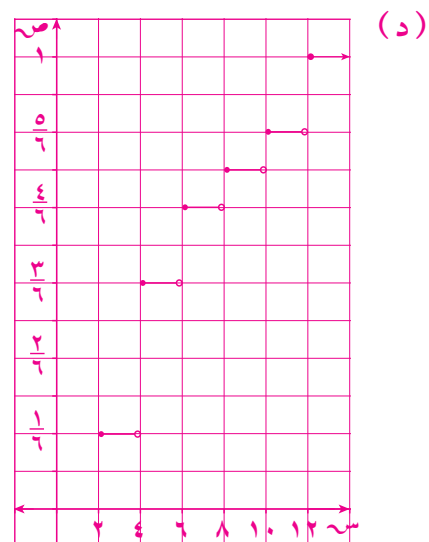
$$\sigma \geq ٤ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{1}{٢}$$

$$\sigma \geq ٦ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{2}{٣}$$

$$\sigma \geq ٨ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{3}{٤}$$

$$\sigma \geq ١٠ \Leftrightarrow ت(س) = \frac{5}{٦}$$

$$\sigma \leq ١٢ \Leftrightarrow ت(س) = ١$$



$$۱ = \frac{۱۴ - ۱۵}{۱} = ۱ \Leftarrow ۱۵ = \text{س} \quad (۳) \quad (أ)$$

$$\text{ل}(\text{س} < ۱۵) = \text{ل}(۱ < ۱) = ۱ - ۱ = ۰ \quad (۱ \geq ۱)$$

$$۰,۱۵۸۶۶ = ۰,۸۴۱۳۴ - ۱ =$$

$$۳ - = \frac{۱۴ - ۱۱}{۱} = ۳ \Leftarrow ۱۱ = \text{س} \quad (ب)$$

$$۰,۰۰۱۳۵ = (۳ - > ۱) \text{ل} = (۱۱ > ۱) \text{ل}$$

$$۱ - = \frac{۱۴ - ۱۳}{۱} = ۱ \Leftarrow ۱۳ = \text{س}_۱ \quad (ج)$$

$$۱ = ۱ \Leftarrow ۱۵ = \text{س}_۲$$

$$\text{ل}(۱۳ > \text{س} > ۱۵) = \text{ل}(۱ > ۱ > ۱ -) = \text{ل}(۱ > ۱) = ۱ - ۱ = ۰$$

$$۰,۶۸۲۶۸ = ۰,۱۵۸۶۶ - ۰,۸۴۱۳۴ =$$

اختبار الوحدة الرابعة

أسئلة المقال

(١) د(٥) = ٤, ٠

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ:

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠, ٣	٠, ٢	٠, ١	٠, ٤

(٢) (أ) ن(ف) = $q^4 = ٧٠$

(ب) سـ = {٠, ١, ٢, ٣}

(ج) د(٠) = ل(سـ = ٠) = $\frac{q^4}{p} = \frac{١}{١٤}$

د(١) = ل(سـ = ١) = $\frac{٣}{٧} = \frac{١ \times q^3 \times p}{٧٠}$

د(٢) = ل(سـ = ٢) = $\frac{٣}{٧} = \frac{٢ \times q^2 \times p}{٧٠}$

د(٣) = ل(سـ = ٣) = $\frac{١}{١٤} = \frac{٣ \times q \times p^2}{٧٠}$

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{١٤}$	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{١}{١٤}$

(٣) (أ) التوقع $\mu = \frac{٤٧}{١١}$

(ب) التباين $\sigma^2 = \frac{٩٠}{١٢١}$

(ج) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{١٠ \sqrt{٣}}{١١}} = \sqrt{\frac{٣}{١١}}$

(٤) ت(١) = ل(سـ ≥ ١) = صفر

ت(٢) = ل(سـ ≥ ٢) = ٠, ١٤

ت(٣) = ل(سـ ≥ ٣) = ٠, ٣

ت(٣, ٥) = ل(سـ ≥ ٥) = ٣, ٠

ت(٤) = ل(سـ ≥ ٤) = ٠, ٦٥

ت(٥) = ل(سـ ≥ ٥) = ٠, ٨

ت(٦) = ل(سـ ≥ ٦) = ١

ت(٧) = ل(سـ ≥ ٧) = ١

$$(5) (أ) \text{ التوقع } \mu = \bar{X} = 0,04 \times 1250 = 50$$

$$(ب) \text{ التباين } \sigma^2 = \bar{X} - 1 = 0,96 \times 0,04 \times 1250 = 48$$

$$(ج) \text{ الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{48}$$

$$(6) (أ) \bar{X} = \frac{1}{5} \times 3 = (3 \geq X \geq 0)$$

$$(ب) \bar{X} = \frac{1}{5} \times ((2-) - 0) = (0 \geq X \geq 2-)$$

$$(ج) \bar{X} = (2 = X) = \text{صفر}$$

$$(د) \bar{X} = \frac{1}{5} \times ((1-) - 2) = (2 \geq X \geq 1-)$$

$$(7) (أ) \bar{X} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{3} \geq X \geq 0)$$

$$(ب) \bar{X} = \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{3} > X) - 1 = (\frac{1}{3} \leq X)$$

$$(8) (أ) \text{ المساحة تحت منحنى الدالة } d = \frac{1}{8} \times ((3-) - 5) = \frac{1}{8}$$

∴ الدالة دهي دالة كثافة احتمال.

$$(ب) \bar{X} = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times ((1-) - 3) = (3 \geq X \geq 1-)$$

$$(ج) \text{ التوقع } \mu = \frac{5+3-}{2} = 1$$

$$\frac{16}{3} = \frac{28}{12} = \frac{2((3-) - 5)}{12} = \sigma^2 \text{ التباين}$$

$$(9) (أ) \bar{X} = (3,24 \geq X) = 0,99940$$

$$(ب) \bar{X} = (1,52 \leq X) - 1 = (1,52 > X) - 1 = 0,93574 - 1 = 0,06426$$

$$(ج) \bar{X} = (1,4 \geq X) - (2,6 \geq X) = (2,6 \geq X \geq 1,4)$$

$$0,0761 = 0,91924 - 0,99534 =$$

$$(10) (أ) \bar{X} = \frac{40-30}{8} = 1,25 = 30 \leq X \leq 40$$

$$\bar{X} = \frac{40-65}{8} = 3,13 \approx 3,125 = 65 \leq X \leq 40$$

$$\bar{X} = (3,125 > X > 1,25) = (65 > X > 30)$$

$$\bar{X} = (3,13 > X) - (1,25 > X) =$$

$$0,89348 = 0,10565 - 0,99913 =$$

$$(ب) \bar{X} = \frac{40-45}{8} = 0,625 = 45 \leq X \leq 63$$

$$\bar{X} = (0,63 > X) = (45 \geq X)$$

تمارين موضوعية

(4) (أ)

(3) (د)

(2) (ب)

(1) (ج)

المجموعة التمارين أساسية

(١) $3 + س \leq 7$

$س \leq 4$

$\therefore \text{م.ح} =]4, \infty)$

(٢) $11 - 3س > 2 - 4$

$3س - 11 < 2 - 9$

$\therefore 3س < -3$

$3س \geq 6 \therefore 3س \geq 6$

$\therefore س \geq 2$

$\therefore \text{م.ح} =]2, 3)$

(٣) $5 - 13س > 8$

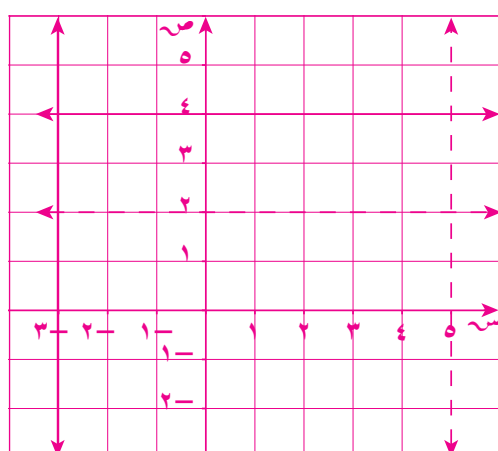
$-5س > 5$

$5س < 5$

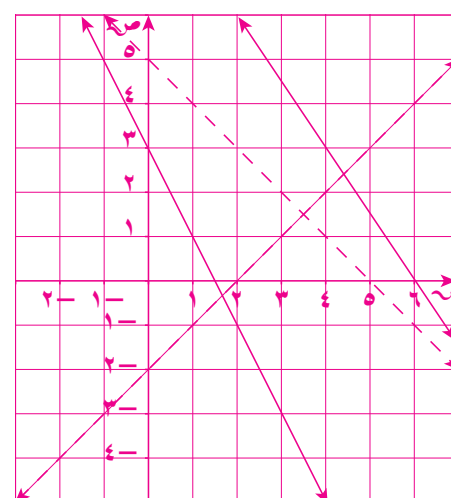
$س < 1$

$\therefore \text{م.ح} =]1, \infty)$

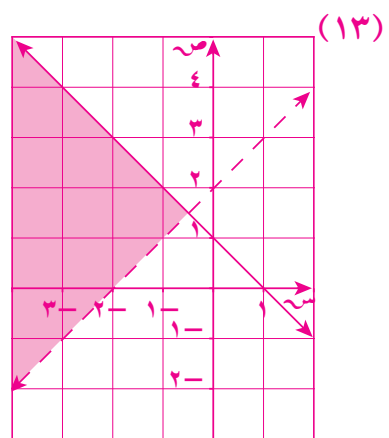
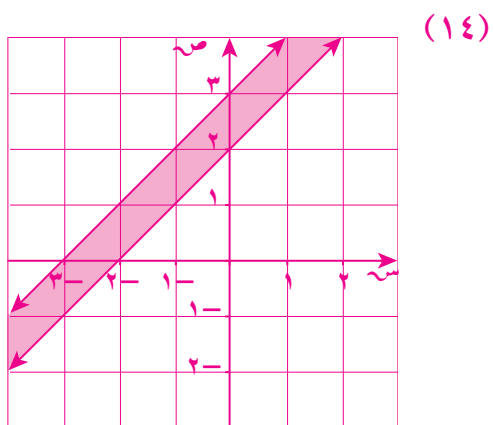
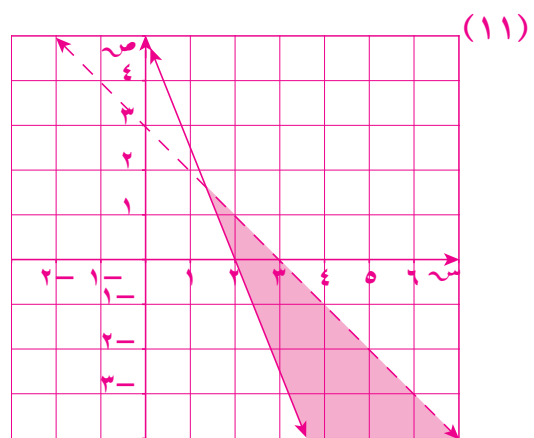
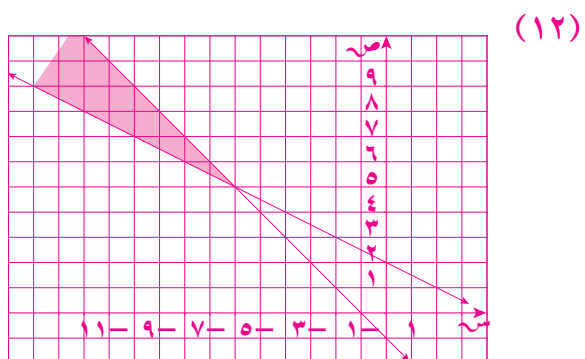
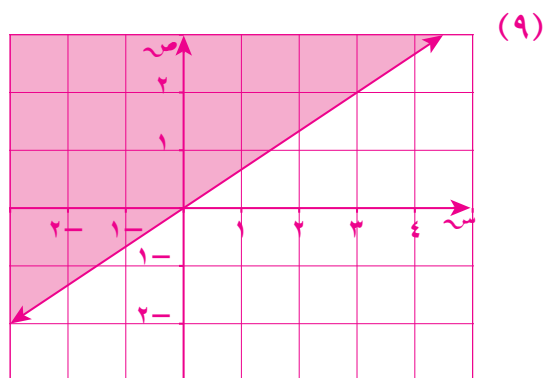
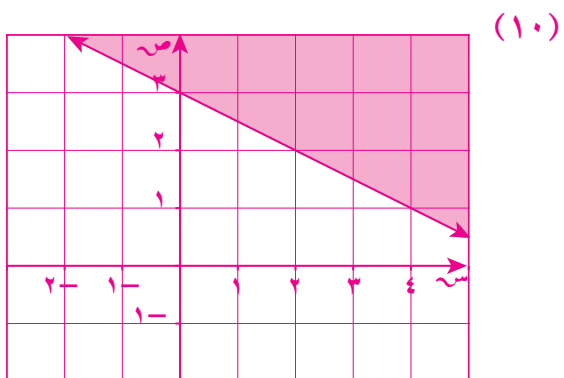
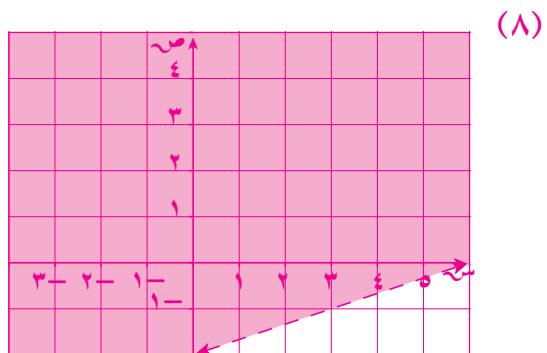
(٤) $س(2, 1), ج(1, -2)$

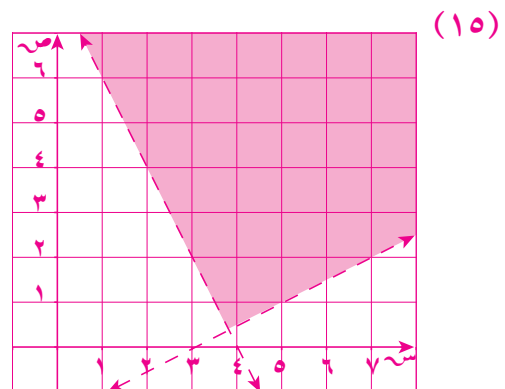
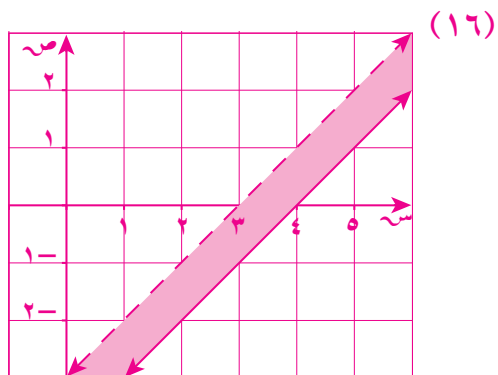


(٦)



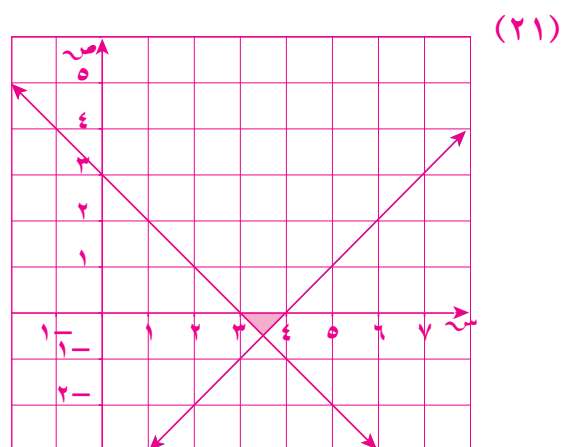
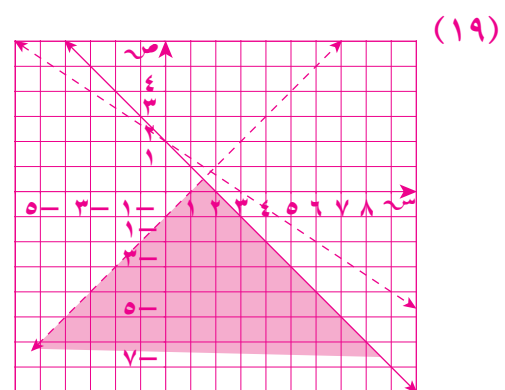
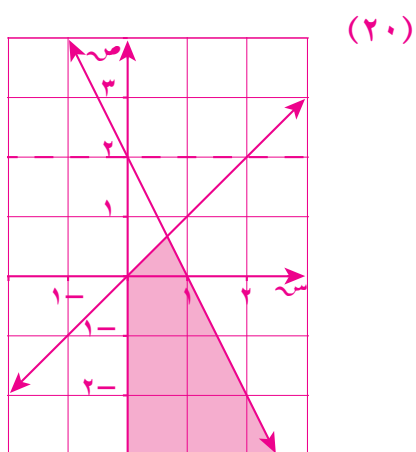
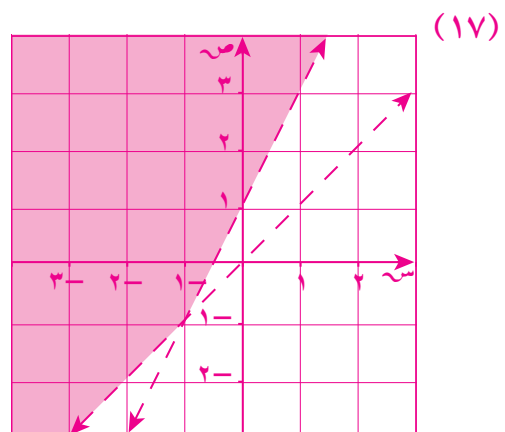
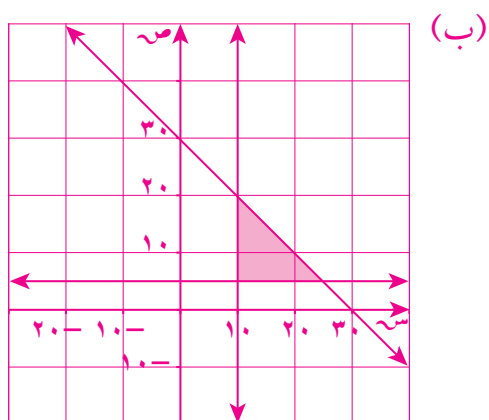
(٥)





(۱۸) (أ)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + \text{ص} \geq 30 \\ \text{س} \leq 10 \\ \text{ص} \leq 5 \end{array} \right\}$$



المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) $٥ < ٣ - ٤$

$\therefore ٣ < ٩$ \therefore م.ح $(٣, \infty)$

\therefore م.ح $(٣, \infty)$

(٢) $١٣ > ٣ + ٢ \geq ٤$

$\frac{١}{٢} \leq ٥$

$٥ > ٥$

\therefore م.ح $(٥, \frac{١}{٢}]$

(٣) $٧ \leq ٢ - ٧$

$٢ - ٧ \leq ٠$

$٠ \geq ٠$

\therefore م.ح $(-\infty, ٠]$

(٤) $٥ \geq ٣ - ٤ > ١$

\therefore م.ح $(\frac{٥}{٣}, \infty)$

\therefore م.ح $(\frac{١}{٣}, \infty)$

\therefore م.ح $(\frac{٥}{٣}, \frac{١}{٣}]$

(٥) $٨ > ٢ - ٥$

\therefore م.ح $(٢, \infty)$

\therefore م.ح $(٢, \infty)$

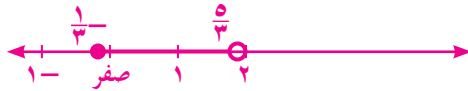
(٦) $٣ \geq ١ + \frac{١}{٢}$

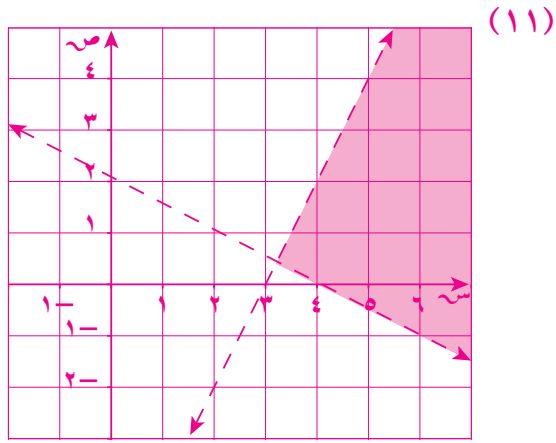
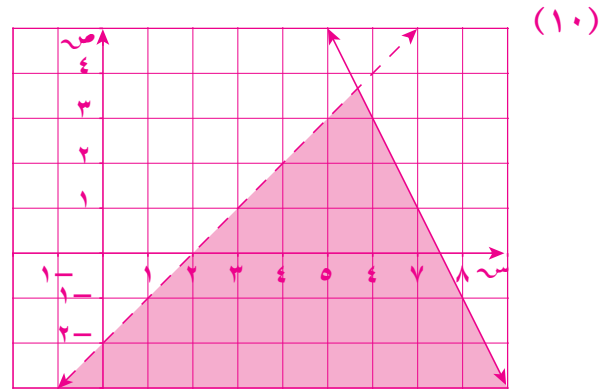
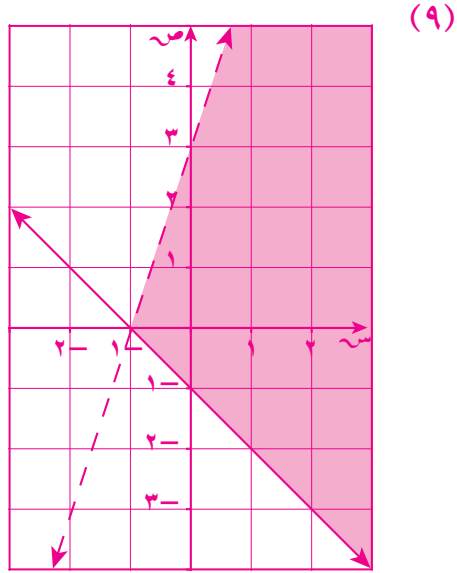
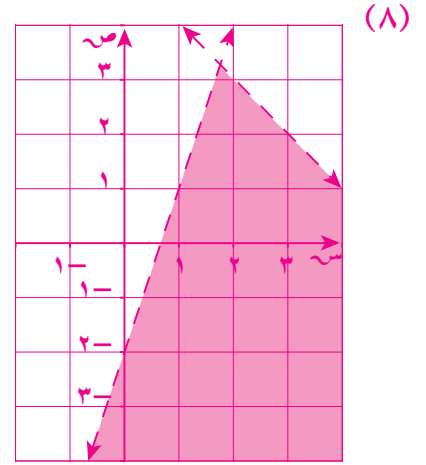
\therefore م.ح $(\frac{١}{٢}, ٣]$

\therefore م.ح $(٤, \infty)$

\therefore م.ح $(٤, \infty)$

(٧) ب (٨، ٢)، ج (٣، ٢)، د (١، ٥)



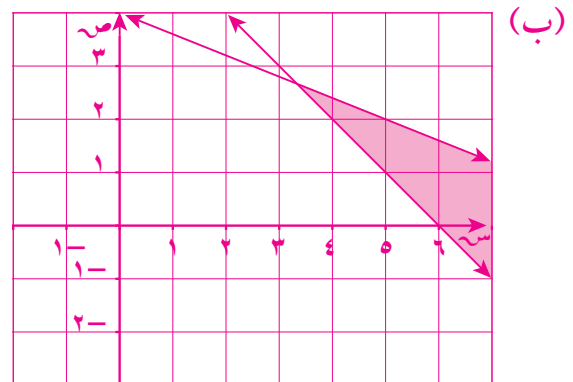


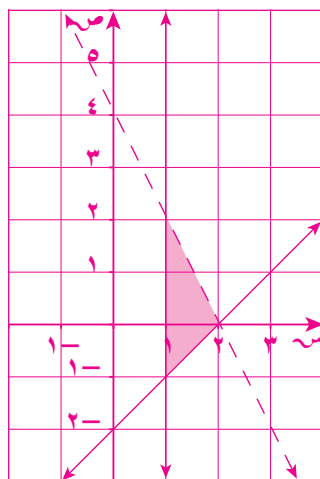
(١٢) (أ) $2 \times \text{عدد الكتب باللغة العربية} + 5 \times \text{عدد الكتب باللغة الأجنبية} \geq 20$

افترض أن س = عدد الكتب باللغة العربية.

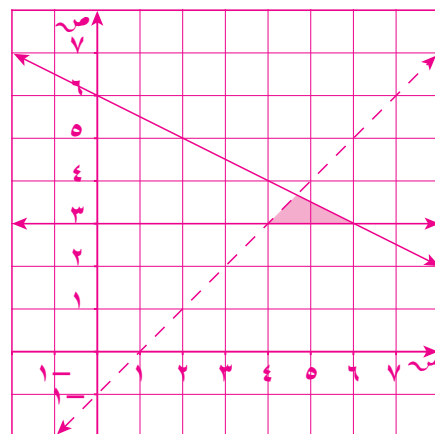
وأن ص = عدد الكتب باللغة الأجنبية.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 2س + 5ص \\ 6 \leq س + ص \\ 0 \leq س, 0 \leq ص \end{array} \right\} \therefore$$

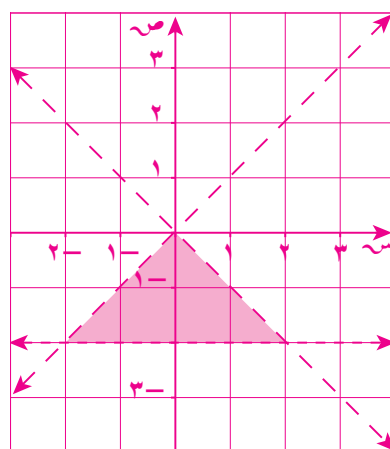




(١٤)

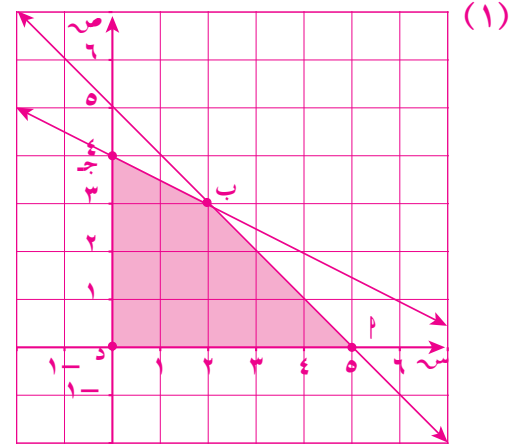


(١٣)

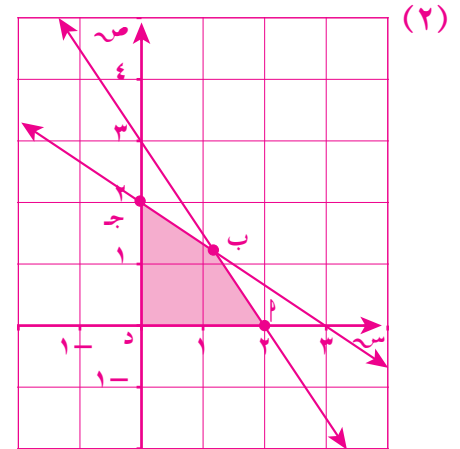


(١٥)

المجموعة التمارين أساسية



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د، حيث هـ (٠، ٥)، ب (٣، ٢)، ج (٤، ٠)، د (٠، ٠).
دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ج (٤، ٠) وقيمتها هـ = ١٢.



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د، حيث هـ (٠، ٢)، ب (٢، ٦/٥)، ج (٢، ٠)، د (٠، ٠).
دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ب (٢، ٦/٥) وقيمتها هـ = ٤٢/٥.

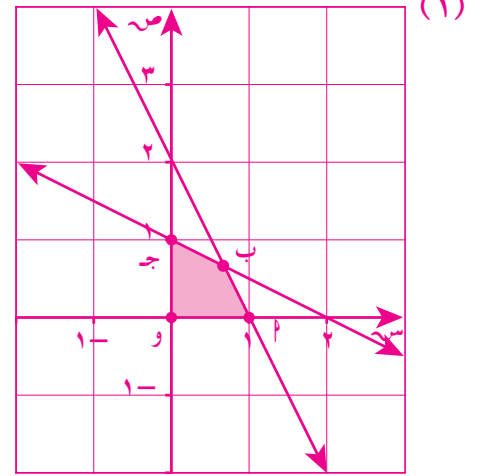
(٣) هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ب (٠، ٦) وقيمتها هـ = ٣٦

هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة هـ (٠، ٠) وقيمتها هـ = ٠

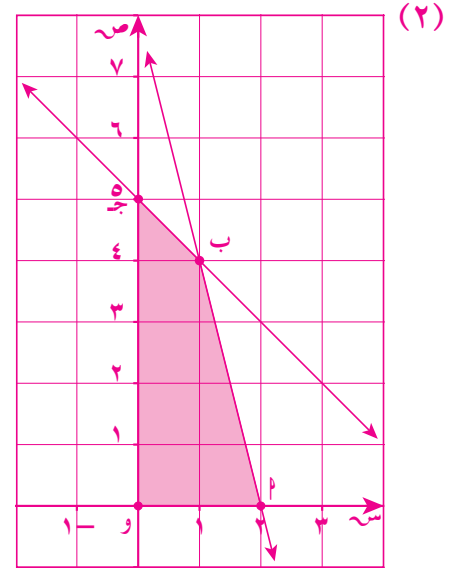
(٤) هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ب (٠، ٤) وقيمتها هـ = ١٦

هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة د (٠، ٠) وقيمتها هـ = ٠

المجموعة ب تمارين تعزيزية



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د، حيث أ (٠، ١)، ب $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ، ج (١، ٠) و (٠، ٠).
دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة أ (٠، ١) وقيمتها هـ = ٣.



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د، حيث أ (٠، ٢)، ب (٤، ١)، ج (٥، ٠) و (٠، ٠).

دالة الهدف هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة و (٠، ٠) وقيمتها هـ = ٠

(٣) هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة د (١٠، ٠) وقيمتها هـ = ١٠

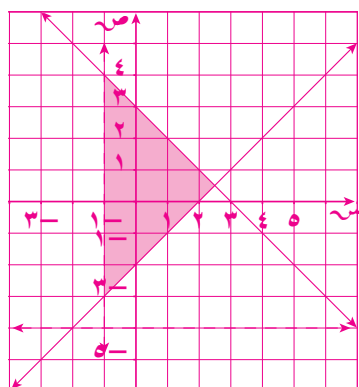
هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة أ (٠، ٠) وقيمتها هـ = ٠

(٤) هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ج (٦، ٠) وقيمتها هـ = ٥٤

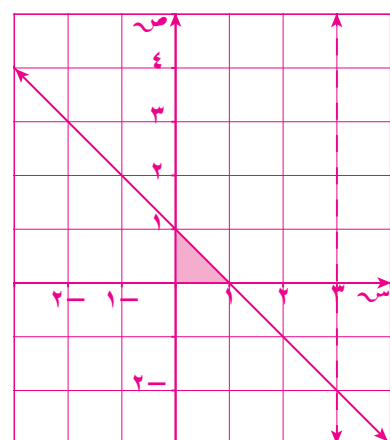
هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة د (٠، ٠) وقيمتها هـ = ٠

تمارين إثرائية

(٢)



(١)

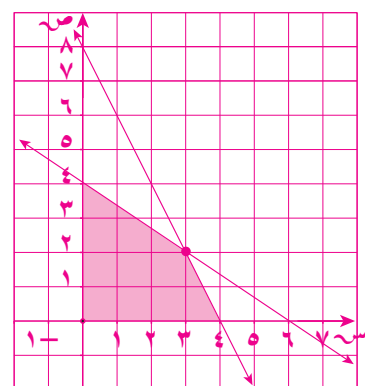


(٣)

$$\left. \begin{array}{l} ص \leq 4 \\ س \leq 3 \\ ١٦ \geq ٢ص + ٤س \\ ١٢ \geq ٣ص + ٢س \end{array} \right\}$$

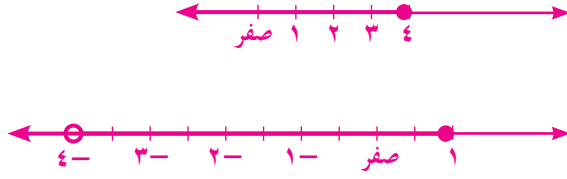
$$هـ = ٢ص + ٣س$$

(٢، ٣)، ١٣ دينارًا.



اختبار الوحدة الخامسة

أسئلة مقالية



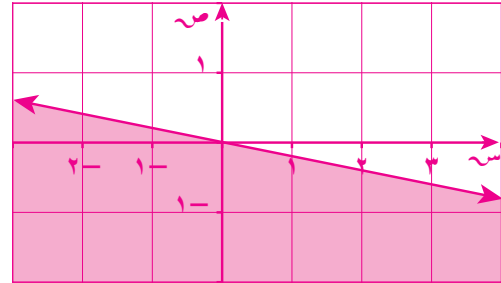
(١) (أ) $s \geq 4$

\therefore م. ح = $[-4, \infty)$

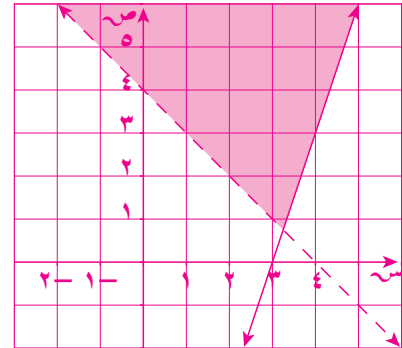
(ب) $s < -4$ ، $s \geq 1$

(٢) ب (١٣، ٠)

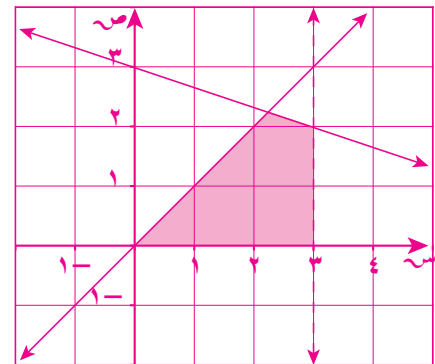
(٣)

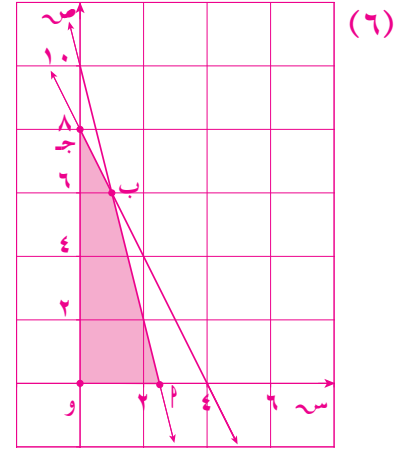


(٤)



(٥)

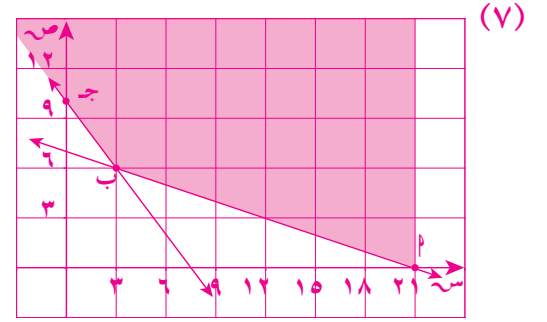




مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د و حيث $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ أ ، ب (١، ٦) ، ج (٨، ٠) ، د (٠، ٠) .

هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ج (٨، ٠) وقيمتها هـ = ٢٤

هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة و (٠، ٠) وقيمتها هـ = ٠



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب ج د حيث $(0, 21)$ أ ، ب (٦، ٣) ، ج (١٠، ٠) ، د (٠، ٠) .

هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة ب (٦، ٣) وقيمتها هـ = ٦٣

تمارين موضوعية

(٤) (أ)

(٣) (أ)

(٢) (ب)

(١) (أ)

(٨) (ج)

(٧) (ج)

(٦) (د)

(٥) (أ)

(١١) (ج)

(١٠) (أ)

(٩) (أ)

شركة مطابع الرسالة - الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (١٨) بتاريخ ١٣ / ٤ / ٢٠١٦