TOP_FIFTY

ثانوية سلمان الفارسي

الصف الثاني عشر علمي

رياضيات

المراجعة النهائية

نسخة محلولة

M_ATTA

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x<1 \text{ (يسار)}\\ 5 & x=1\\ \dfrac{5}{x} & x>1 \text{ (يمين)}\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

اليمين:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{5}{x}\right) = \frac{\lim_{x\to1^+}5}{\lim_{x\to1^+}x} = \frac{5}{1} = 5$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to1^+}(x) = 1 \neq 0$$

اليسار:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(3x+2) = 3(1)+2 = 5$$

$$\therefore \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = 5$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = 5$$

حاول أن تحل (5)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$$

الحل

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to3}(3x^2-2) = 3(3)^2-2 = 25>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim_{x\to3}(3x^2-2)} = \sqrt{25} = 5$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to3}(x-2) = 3-2 = 1 \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x\to3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim_{x\to3}(x-2)} = \frac{5}{1}$$

$$= 5$$

الغاء العامل الصفري $(\frac{0}{0})$. $(\frac{0}{0})$

مثال (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{0}{0}$$

انار الله دربك ووفقك لما يحب ويرضاه

الحل

عند التعويض عن x ب 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{x+2}{x} \quad : x\neq1$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to1}x=1\neq0$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}(x+2)}{\lim_{x\to1}x}=\frac{1+2}{1}=3$$

حاول أن تحل (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x ب -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=\frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$=\frac{x+1}{x-2} \quad : x\neq-2$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to-2}(x-2)=-2-2=-4\neq0$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x+1}{x-2}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-2}(x+1)}{\lim_{x\to-2}(x-2)}=\frac{-2+1}{-4}=\frac{1}{4}$$

فكرة الحل : تحليل + اختصار العامل الصفري

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{(4+x)^2-16}{x} = \frac{\big((4+x)-4\big)\big((4+x)+4\big)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}(x+8)}{\cancel{x}} = x+8 \quad ; x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+8) = 0+8 = 8$$

يمكن استخدام طريقة أخرى في الحل كما في المستوى التالي (فك القوس)

النجاح ملك من يدفع ثمنه

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-7$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+8x+16-9}{x^2+7x} = \frac{x^2+8x+7}{x^2+7x} = \frac{\cancel{(x+7)}(x+1)}{x\cancel{(x+7)}}$$

$$= \frac{x+1}{x} \quad ; x \neq -7$$

$$\lim_{x\to -7} f(x) = \lim_{x\to -7}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to -7}(x+1)}{\lim_{x\to -7} x} = \frac{-7+1}{-7} = \frac{6}{7}$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to -7} x = -7 \neq 0$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{(3+x)^3-27}{x}=\frac{\left((3+x)-3\right)\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)}{x}$$

$$=\frac{\cancel{x}\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)}{\cancel{x}} \quad : x\neq 0$$

$$=(3+x)^2+3(3+x)+9$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[(3+x)^2+3(3+x)+9\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}(3+x)^2+\lim_{x\to 0}3(3+x)+\lim_{x\to 0}9$$

$$=(3+0)^2+3(3+0)+9=27$$

يمكن حل التمرين بطريقة أخرى

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

فك التكوين:

$$(2+x)^3=(2)^3+3(2)^2(x)+3(2)(x)^2+(x)^3$$

$$=8+12x+6x^2+x^3$$

$$f(x)=\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{\cancel{8}+12x+6x^2+x^3\cancel{-8}}{x}$$

$$=\frac{12x+6x^2+x^3}{x}=\frac{x(12+6x+x^2)}{x} \quad : x\neq 0$$

$$=12+6x+x^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(12+6x+x^2)=12+6(0)+(0)^2=12$$

لا تحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

فكرة الحل: قسمة تركيبية

مثال (10) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-1$ لحصلنا على صيغة غير معينة

قسمة تركيبية:

-1	1	6	2	-3
	↓	-1	-5	3
	1	5	-3	0

ناتج القسمة: x^2+5x-3

$$f(x)=\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=x^2+5x-3$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)=(-1)^2+5(-1)-3=-7$$

مثال (10) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-2$ لحصلنا على صيغة غير معينة

قسمة تركيبية:

-2	1	0	0	0	0	32
		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

ناتج القسمة: $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$

$$f(x)=\frac{x^5+32}{x+2}=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$$

$$\therefore \lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

$$=(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16$$

$$=80$$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x بـ 5 لحصلنا على صيغة غير معينة

اعادة تعريف المطلق

$|x+2|$

$-(x+2)$ ← -2 → $(x+2)$

$\because x\longrightarrow 5$

$\therefore |x+2|=x+2$

$$f(x)=\frac{|x+2|-7}{x^2-25}=\frac{x+2-7}{x^2-25}$$

$$=\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{x+5}\quad : x\neq 5$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to 5}(x+5)=5+5=10\neq 0$$

$$\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{1}{10}$$

ملاحظة :

إذا كانت x تؤول إلى عدد غير صفر المطلق يعاد تعريف المطلق بقاعدة واحدة

عند التعويض بالعدد داخل المطلق إذا كان الناتج

صفر	عدد موجب	عدد سالب
قاعدتين	قاعدة واحدة (مابداخل المطلق)	قاعدة واحدة – (مابداخل المطلق)
إذا كان $x\to 2$ فإن :	إذا كان $x\to 5$ فإن :	اذا كان $x\to 2$ فإن :
$\lvert x-2\rvert=\begin{cases}x-2 & : x\geq 2\\ -(x-2) & : x<2\end{cases}$	$\lvert x-2\rvert=(x-2)$	$\lvert x-3\rvert=-(x-3)$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

فكرة الحل
اعادة تعريف المطلق + اختصار العامل الصفري

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

الحل
عند التعويض عن x ب 1 حصلنا على صيغة غير معينة

$$|x-1|$$

$-(x-1)$ ← 1 → $(x-1)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} & : x > 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{x+1} & : x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & : x > 1 \\ \dfrac{-1}{x+1} & : x < 1 \end{cases}$$

اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1) = 1+1 = 2 \neq 0$$

اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1) = 1+1 = 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$ غير موجودة

ملحوظة
إذا كانت x تؤول إلى صفر المطلق نعيد تعريف المطلق بقاعدتين

قيل لنابليون بونابرت يوما ان جبال الالب شاهقة تمنع تقدمك ، فقال يجب ان تزول من الارض

فكرة الحل : ضرب في المرافق + اختصار العامل الصفري

مثال (9) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=2$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}}\quad : x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2}2}{\lim_{x\to 2}\left[\sqrt{2x-3}+1\right]}=\frac{2}{2}=1$$

بوابة ما تحت الجذر :

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)=2(2)-3=1>0$$

بوابة الجذر :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

بوابة الجمع :

$$\lim_{x\to 2}\left[\sqrt{2x-3}+1\right]=\left[\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1\right]$$

$$=[1+1]=2\neq 0$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

فكرة الحل: ضرب في مرافق + إختصار العامل الصفري

حاول أن تحل (9) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x = 9$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} = \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{9-x} = \frac{-(9-x)(3+\sqrt{x})}{(9-x)}$$

$$= -(3+\sqrt{x}) = -3-\sqrt{x} \quad : x \neq 9$$

$$\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9}(-3-\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x\to 9}(-3) - \lim_{x\to 9}\sqrt{x} = -3-\sqrt{9} = -6$$

ملحوظة:

في حالة إيجاد $\lim_{x\to c}\sqrt{x}$ يمكن استخدام التعويض المباشر دون خطوات الجذر التربيعي

فكرة الحل: تحليل + اختصار العامل الصفري $x-a = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}) = x-a$

مثال (9) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x = 1$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)}$$

$$= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \quad : x \neq 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right]$$

ملحوظة:
العدد المضاف خارج الجذر التكعيبي

$$= \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2} + \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x} + \lim_{x\to 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} x} + \lim_{x\to 1} 1$$

$$\sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} + 1 = 3$$

فكرة الحل: ضرب في المرافق + اختصار

$\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} = x+2$

$\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot \sqrt[3]{(x-5)} = x-5$

مثال (9) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-2$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x+2)^2})}{(x+2)} \quad ; x \neq -2$$

$$= (x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2})$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \left[(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right]$$

ملحوظة: العدد المضاف داخل الجذر التكعيبي

$$= \lim_{x\to -2}(x-2) \cdot \lim_{x\to -2}\sqrt{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x\to -2}(x-2) \cdot \sqrt{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}$$

$$= (-2-2) \cdot \sqrt{(-2+2)^2} = 0$$

فكرة الحل: توحيد الجذر + تحليل + اختصار

حاول أن تحل (9) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2-x+1} \quad ; x \neq -1$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)}$$

$$= \sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1} = \sqrt[3]{3}$$

مثال (3)

اذا كان $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فاوجد قيمة كل من الثابيتين a ، b

الحل

$\because 3 \neq 0$

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$ax^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{bx+3}{2x+5} = 3$

$\frac{b}{2} = 3 \longrightarrow b = 6$

حاول أن تحل (3)

اذا كان $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

فاوجد قيمة كل من الثابيتين a ، b

الحل

$\because -1 \neq 0$

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$ax^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{bx-3} = -1$

$\frac{1}{b} = -1 \longrightarrow b = -1$

ساصير يوما ما اريد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (4)

أوجد إن أمكن

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=$$

الحل

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$f(x)=\frac{x\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$\because x\to\infty$

$\therefore |x|=x$

$$=\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\because x\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{1-0}{1}=1$$

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$=1+0-0=1>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=1\neq 0$$

ملحوظة:

يمكن الحل بمجرد النظر في المثال السابق

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{x\ \text{معامل}}{\sqrt{x^2}\ \text{معامل}}$$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$b)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=$$

أوجد إن أمكن

حاول أن تحل (4)

الحل

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$\because x\to\infty$

$\therefore |x|=x$

$$=\frac{\cancel{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$\because x\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$=2-0=2>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\sqrt{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$=1+0=1\neq 0$$

فكرة الحل : توزيع البسط على المقام ($\frac{\text{مقدار جبري}}{\text{حد جبري}}$)

حاول أن تحل (3)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - x^2}{3x^2} =$$

الحل

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

مثال (3)

أوجد : -

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x - 2x\cos x}{3x} =$$

الحل

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x\tan x}{3x} - \frac{2x\cos x}{3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\cos x \cdot \frac{\tan x}{3x} - \frac{2}{3}\cdot\cos x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x} - \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$= 1\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{1}{3}$$

حاول أن تحل (3)

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x} =$$

الحل

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x\cos 4x}{5x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cdot\cos 4x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x} + \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot 1 = 1$$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

فكرة الحل: الضرب في المرافق $\left(\dfrac{\text{حد جبري}}{\text{مقدار يحوي } \cos x}\right)$

مثال (1) أوجد :-

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x\right)$$

$$=(1)^2(1+1)=2$$

حاول أن تحل (1) أوجد :-

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=$$

الحل

$$=\lim\frac{x\sin x}{\cos x-1}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x}{\sin x}\cdot(\cos x+1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}(\cos x+1)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\cos x+\lim_{x\to 0}1\right)$$

$$=\frac{-1}{1}\cdot(1+1)=-2$$

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل (1)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x \le 0 \quad \text{يسار} \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \quad \text{يمين} \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x=0$

الحل

$f(0)=(0)^3+0=0 \longrightarrow 1$

اليمين:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)} = \dfrac{0}{1} = 0$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 0+1 = 1 \neq 0$

اليسار:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+x)$

$=(0)^3+0=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \longrightarrow 2$

من 1 و 2 ينتج أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \quad \text{يمين} \\ 7 & : x \le 3 \quad \text{يسار} \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

الحل

$f(3)=7 \longrightarrow 1$

اليمين:

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3) = 3+3=6$

اليسار:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(7)$

$=7$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة $\longrightarrow 2$

من 1 و 2 ينتج أن

f ليست متصلة عند $x=3$

حاول أن تحل (2)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

الحل

اعادة تعريف : $\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x$

$\dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x \qquad \dfrac{(x+1)}{x+1}-2x$

-1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)}{x+1}-2x = 1-2x & : x>-1\\ \dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x = -1-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$f(-1)=2 \longrightarrow$ 1

اليمين :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)$$

$$=1-2(-1)=3$$

اليسار :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)$$

$$=-1-2(-1)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة $\longrightarrow$ 2

من 1 ، 2 ينتج أن

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=-1$

وفقك الله دائما

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

(8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$, $x = 0$

الحل

إعادة تعريف : $\dfrac{x^2-3x}{|x|}$

$\dfrac{x^2-3x}{-x}$ $\dfrac{x^2-3x}{x}$

$\longleftarrow \; 0 \; \longrightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x} = \dfrac{x(x-3)}{x} = (x-3) & : x > 0 \\ \dfrac{x^2-3x}{-x} = \dfrac{x(x-3)}{-x} = -(x-3) & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = -3 \longrightarrow (1)$

اليمين :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-3)$

$= (0-3) = -3$

اليسار :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} [-(x-3)]$

$= -(0-3) = 3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة $\longrightarrow (2)$

من 1 و 2 ينتج أن

f ليست متصلة عند $x = 0$

تعلم ان تكون حليما صبورا

فكرة الحل: بحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = c$

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.

مثال (6) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

الحل

(I) $f(x) = x^2 + 5$ دراسة اتصال f عند $x = -2$

f دالة متصلة عند $x = -2$

(II) $f(-2) = (-2)^2 + 5 = \underline{\underline{9}}$ ايجاد $f(-2)$

(III) $g(x) = \sqrt{x}$ دراسة اتصال g عند $f(-2)$

g دالة متصلة عند $x = \underline{\underline{9}} \in R^+$

من I ، II ، III نجد أن

$g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

كراسة التمارين (9) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$.

الحل

(I) $f(x) = 2x^2 - 3$

f دالة متصلة عند $x = -2$

(II) $f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = \underline{\underline{5}}$

(III) $g(x) = \sqrt{x+4}$

نفرض: $g(x) = \sqrt{a(x)}$

(1) $a(x) = x + 4$

a دالة متصلة عند $x = \underline{\underline{5}}$

(2) $a(\underline{\underline{5}}) = 5 + 4 = 9 > 0$

من 1 ، 2 ينتج

g متصلة عند $x = \underline{\underline{5}}$

من I ، II ، III ينتج أن

$g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

اليأس ليس من شيم الابطال

يتبع

حاول أن تحل (6)

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

الحل

(I) $g(x)=2x+3$

g دالة متصلة عند $x=1$

(II) $g(1)=2(1)+3=5$

(III) $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$

بفرض: $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

(1) $f_1(x)=|x|$

f_1 دالة مطلق x متصلة عند $x=5$

(2) $f_2(x)=x+2$

f_2 دالة متصلة عند $x=5$

شرط القسمة:

(3) $f_2(5)=5+2=7\neq 0$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن

$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ متصلة عند $x=5$

من I ، II ، III ينتج أن

$f\circ g$ متصلة عند $x=1$

ثق في نفسك

فكرة الحل: بحث اتصال مطلق عند $x=c$

مثال (6)

لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

الحل

نفرض: $f_2(x)=|x|$ و $f_1(x)=x^2-5x+6$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

① $f_1(x)=x^2-5x+6$

f_1 دالة متصلة عند $x=2$

② $f_1(2)=(2)^2-5(2)+6=\underline{\underline{0}}$

③ $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=\underline{\underline{0}}$

من 1، 2، 3 ينتج أن

$f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$ متصلة عند $x=2$

حاول أن تحل (6)

لتكن: $f(x)=|x^2-3x+2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

الحل

نفرض: $f_2(x)=|x|$ و $f_1(x)=x^2-3x+2$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

① $f_1(x)=x^2-3x+2$

f_1 دالة متصلة عند $x=0$

② $f_1(0)=(0)^2-3(0)+2=\underline{\underline{2}}$

③ $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=\underline{\underline{2}}$

من 1، 2، 3 ينتج أن

$f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$ متصلة عند $x=0$

انت قادر ان تفعلها

(11) ابحث اتصال الدالة g : $g(x) = \sqrt{x^2+1} - |x-3|$ عند $x = 3$.

الحل

نفرض أن : $g(x) = h(x) - f(x)$

Ⅰ $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

نفرض : $h(x) = \sqrt{a(x)}$

① $a(x) = x^2+1$
دالة a متصلة عند $x = 3$

② $a(3) = (3)^2+1 = 10 > 0$

من 1 ، 2 ينتج أن

الدالة h متصلة عند $x=3$

Ⅱ $f(x) = |x-3|$

نفرض :
$f_1(x) = x-3$ و $f_2(x) = |x|$

$\therefore f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$

① $f_1(x) = x-3$
f_1 دالة متصلة عند $x = 3$

② $f_1(3) = 3-3 = 0$

③ $f_2(x) = |x|$
f_2 دالة متصلة عند $x = 0$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج
f متصلة عند $x=3$

$\therefore$ من Ⅰ ، Ⅱ ينتج

$g(x) = h(x) - f(x)$ متصلة عند $x = 3$

حاول ثم حاول لكي تحقق هدفك

دراسة اتصال f على [a,b]

① دراسة اتصال f على (a,b)
② دراسة اتصال f عند x=a من اليمين
③ دراسة اتصال f عند x=b من اليسار

مثال (2) ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : \ x=1\\ x^2-3 & : \ 1<x<3\\ 6 & : \ x=3\end{cases}$$

الحل

-2 ، x^2-3 ، 6 ، 1 ، 3

بفرض: $g(x)=x^2-3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على R

$\because g(x)=f(x) \quad \forall x\in(1,3)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,3)$ ← I

دراسة اتصال f عند x=1 من اليمين

① $f(1)=-2$

② $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3)$

$=(1)^2-3=-2$

من 1 ، 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة عند x=1 من اليمين II

دراسة اتصال f عند x=3 من اليسار

① $f(3)=6$

② $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)$

$=(3)^2-3=6$

من 1 ، 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$\therefore$ f متصلة عند x=3 من اليسار III

من I ، II ، III ينتج

f متصلة على $[1,3]$

الخطا يسبق الصواب والفشل يسبق النجاح

① دراسة اتصال f على الفترة الأولى
② دراسة اتصال f على الفترة الثانية
③ دراسة اتصال f عند النقطة الفصلية من الجهة المفتوحة

دراسة اتصال f على مجالها

مثال (3) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x \leq -1 \quad \text{يسار} \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x > -1 \quad \text{يمين} \end{cases}$$

الحل

$-\infty \xleftarrow{x+3} -1 \xrightarrow{\frac{4}{x+3}} \infty$

المجال: $D_f = (-\infty,-1] \cup (-1,\infty) = R$

نفرض: $g(x) = \frac{4}{x+3}$

والدالة g دالة نسبية مستمرة لكل $x \in R - \{-3\}$

$\therefore g(x) = f(x) \quad \forall x \in (-1,\infty)$

$\therefore$ f مستمرة على $(-1,\infty)$ ← I

نفرض: $h(x) = x+3$

h دالة كثيرة حدود مستمرة على R

$\therefore h(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty,-1]$

$\therefore$ f مستمرة على $(-\infty,-1]$ ← II

دراسة اتصال f عند $x=-1$ من اليمين

① $f(-1) = (-1)+3 = \underline{\underline{2}}$

② $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{4}{x+3}\right) = \frac{4}{-1+3} = \underline{\underline{2}}$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+3) = -1+3 = 2 \neq 0$

من 1، 2 نستنتج أن

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x=-1$ من اليمين ← III

من I، II، III نستنتج
f مستمرة على مجالها R

لكل نجاح بداية ولكل فشل نهاية

فكرة الحل: ايجاد قيمة b و a

مثال (4)

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : \quad x < 0 \\ 2 & : \quad x = 0 \\ ax + b & : \quad x > 0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

الحل

$\because f$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} (ax + b) = 2$$

$$a(0) + b = 2$$

$$\boxed{b = 2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 - a) = 2$$

$$(0)^2 - a = 2$$

$$\boxed{a = -2}$$

احسن استغلال وقتك

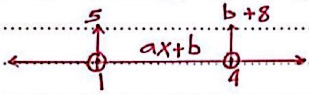
فكرة الحل : ايجاد قيمة b و a

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}5 & : \quad x=1\\ ax+b & : \quad 1<x<4\\ b+8 & : \quad x=4\end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

الحل



$\because$ f متصلة على $[1,4]$

$\because$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b) = 5$

$a(1)+b=5$

$a+b=5$

$2+b=5$

$\boxed{b=3}$

$\because$ f متصلة عند $x=4$ من اليسار

$\therefore \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$

$\lim\limits_{x\to 4^-}(ax+b) = b+8$

$a(4)+\cancel{b}=\cancel{b}+8$

$\frac{4a}{4}=\frac{8}{4}$

$\boxed{a=2}$

بالتعويض

الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها

مثال (6)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3,3]$.

الحل

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

الاتصال	المجال
① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[-3,3]$	$9-x^2\geq 0$
② $g(x)=9-x^2$	المعادلة المناظرة: $9-x^2=0$
g دالة متصلة على $[-3,3]$	الأصفار: $x_1=3$ أو $x_2=-3$
من 2، 1 نستنتج أن	$- - - [+ + + + +] - - - -$ (-3 ، 3)
f دالة متصلة $[-3,3]$	$D_f=[-3,3]$
	$\therefore [-3,3]\subseteq D_f$

حاول أن تحل (5)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

الحل

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

الاتصال	المجال
① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[6,10]$	$x^2-7x+10\geq 0$
② $g(x)=x^2-7x+10$	المعادلة المناظرة: $x^2-7x+10=0$
g دالة متصلة على $[6,10]$	الأصفار: $x_1=5$ أو $x_2=2$
من 2، 1 نستنتج أن	$+ + + \; - - - - \; + [+ + +]$ (2 ، 5 ، 6 ، 10)
f متصلة على $[6,10]$	$D_f=(-\infty,2]\cup[5,\infty)=\mathbb{R}-(2,5)$
	$\therefore [6,10]\subseteq D_f$

حاول أن تحل (7)

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

نفرض: $f_1(x)=-x^2+2x+5$ و $f_2(x)=\sqrt[3]{x}$

$(f_2\circ f_1)(x)=f_2(f_1(x))=f_2(-x^2+2x+5)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}=f(x)$

$\because$ f_1 دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$\because$ f_2 دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

السبب: حاصل تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$

نطمح
نحلم
نتأمل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل

فكرة الحل: ايجاد مشتقة دالة عند نقطة باستخدام التعريف (تحديد نقطة)

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

الحل

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ إن وجدت

$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$f(x) = 2x^2 + 1$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1} 2(x+1)$

$= 2(1+1) = 4$

مثال توضيحي لاستخدام الآلة

$2x^2 - 2$

$= 2(x-1)(x+1)$

mod53

$a = 2$

$b = 0$

$c = -2$

النواتج

$x_1 = 1$ أو $x_2 = -1$

خطوات حل حدودية من الدرجة الثانية

1. عامل مشترك (معامل x^2)
2. تحليل mod53
3. اختصار
4. تعويض

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

الحل

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ إن وجدت

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = \sqrt{a}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x - a}}{\cancel{(x - a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x \to a} (\sqrt{x} + \sqrt{a}) = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \neq 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

خطوات حل
إذا وجد جذر
1 ضرب في المرافق
2 اختصار
3 تعويض

هل اديت فروضك ؟؟

مثال (9)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \leq 3 \\ x^2-1 & : x > 3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل

f دالة متصلة عند $x=3$

$-\infty \xleftarrow{\;x+5\;} 3 \xrightarrow{\;x^2-1\;} \infty$

$\boxed{f(3) = (3)+5 = 8}$

اليسار:

$f'_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x+5-8}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} (1)$

$= \underline{\underline{1}}$

اليمين:

$f'_+(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-1-8}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} (x+3)$

$= 3+3 = \underline{\underline{6}}$

$f'_-(3) \neq f'_+(3)$

$\therefore$ $f'(3)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

ملحوظة:
لا يمكن رسم مماس عند $x=3$
السبب: ركن

وفقك الله دائما

فكرة الحل : إيجاد مشتقة دالة فرعية دون تحديد نقطة (على مجالها) ← $f'(x)$

خطوات الحل في الصفحة التالية

مثال (8)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

الحل

$$-\infty \xleftarrow{\quad x^2+2 \quad} 1 \xrightarrow{\quad 2x+1 \quad} \infty$$

① مجال f : $D_f = (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = \mathbb{R}$

② الاشتقاق : (بمجرد النظر)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \text{تبحث} & : x = 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases}$$

③

$$\boxed{f(1) = (1)^2 + 2 = 3}$$

اليمين :

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} 2$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

اليسار :

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1^-} (x+1)$$

$$= 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\therefore f'_-(1) = f'_+(1) = 2$$

$$\therefore f'(1) = 2$$

④

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ 2 & : x = 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases}$$

⑤ مجال f' : $D_{f'} = \mathbb{R}$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

b $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases}$

الحل

$-\infty \leftarrow \quad x^2+1 \quad (1) \quad 2\sqrt{x} \quad \rightarrow \infty$

1) مجال f: $D_f = (-\infty, 1) \cup [1, \infty) = R$

2) $f'(x) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{نبحث} & : x=1 \\ 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$

3) $\boxed{f(1) = 2\sqrt{1} = 2}$

اليسار:

$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1-2}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$

$= \lim_{x\to 1} (x+1)$

$= 1+1 = 2$

اليمين:

$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} \times \frac{2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+2}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{4x-4}{(x-1)(2\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(2\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{4}{2\sqrt{x}+2} = \frac{4}{2\sqrt{1}+2} = 1$

نهاية المقام: $\lim (2\sqrt{x}+2) = 2\sqrt{1}+2 = 4 \neq 0$

$\therefore f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$\therefore f'(1)$ غير موجودة

4) $f'(x) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{غير موجودة} & : x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$

5) مجال f': $D_{f'} = R - \{1\}$

قيل لنابليون بونابرت يوما ان جبال الاب شاهقة تمنع تقدمك ، فقال يجب ان تزول من الارض

تذكر : لايجاد معادلة المستقيم يجب معلومية نقطة وميل

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

الحل

نشتق :

$$f'(x) = \frac{(x^3+1)'(x^2+2) - (x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2+2) - (x^3+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

نعوض :

ميل المماس $f'(1) = \frac{3(1)^2 \cdot ((1)^2+2) - ((1)^3+1) \cdot 2(1)}{((1)^2+2)^2} = \frac{5}{9}$

ميل المماس : $m = \frac{5}{9}$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x-1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9}$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

ميل الناظم : $\frac{-1}{m} = \frac{-9}{5}$

معادلة الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{-9}{5}(x-1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{-9}{5}x + \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{-9}{5}x + \frac{9}{5} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{-9}{5}x + \frac{37}{15}$$

لإيجاد ميل المماس
نشتق
و
نعوض

يمكن استخدام الحاسبة لإيجاد ميل المماس
لتأكيد الحل

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند $x=1$

الحل

إيجاد النقطة

عند $x=1$

$$f(1)=\frac{1-1}{1+2}=0$$

النقطة $(\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{0})$

نشتق

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x+2)-(x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{1\cdot(x+2)-(x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

نعوض

$$f'(1)=\frac{1\cdot(1+2)-(1-1)\cdot 1}{(1+2)^2}=\frac{1}{3}$$

ميل المماس : $m=\frac{1}{3}$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

ميل الناظم : $\frac{-1}{m}=-3$

معادلة الناظم

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-0=-3(x-1)$$

$$y=-3x+3$$

تذكر:
لإيجاد ميل المماس
نشتق ونعوض

يمكن إستخدام الآلة
مثال توضيحي
$f(x)=\frac{x-1}{x+2}$
ميل المماس عند $x=1$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\Big|_{x=1}=\frac{1}{3}$$
shift ∫□
للتأكيد

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$ منهجية

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x)'(\sin x+\cos x) - (\sin x)(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\,(\sin x+\cos x) - \sin x\,(\cos x - \sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\cos x \cdot \sin x} + \cos^2 x - \cancel{\sin x \cdot \cos x} + \sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

تذكر
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$u = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$ منهجية

الحل

$$\frac{du}{dx} = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - (\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x \cdot (1-\sin x) - \cos x \cdot -\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

ملحوظة
يمكن تغيير صيغة
السؤال على صيغة
(إثبت أن)

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{(1-\sin x)}$$

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P(\overset{x_1}{\frac{\pi}{4}}, \overset{y_1}{1})$

الحل

نشتق : $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

نعوض : $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2$

ميل المماس : $m = 2$

ميل العمودى : $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

معادلة العمودى

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8}$

$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$

$y = \frac{-1}{2}x + 1.39$

يجب تحويل الآلة راديان
shift mod4
R

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يجب تتبع الارقام في الحل لحفظ تسلسل الحل

(5 – 2) قاعدة السلسلة

Chain Rule **قاعدة السلسلة (التسلسل)**

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال (1)

إذا كان $g(x) = x^{10}$ ، $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(-1)$

الحل

a) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

① $f(x) = 3x^2 + 1$

② $g(x) = x^{10}$

③ $f'(x) = 6x$

⑤ $g'(x) = 10x^9$

نستبدل x بـ $g(x)$

④ $f'(g(x)) = 6(x^{10})$
$= 6x^{10}$

⑥ $(f \circ g)'(x) = 6x^{10} \cdot 10x^9 = 60x^{19}$

b) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

① $g(x) = x^{10}$

② $f(x) = 3x^2 + 1$

③ $g'(x) = 10x^9$

⑤ $f'(x) = 6x$

نستبدل x بـ $f(x)$

④ $g'(f(x)) = 10(3x^2+1)^9$

⑥ $(g \circ f)'(x) = 10(3x^2+1)^9 \cdot 6x = 60x(3x^2+1)^9$

$(g \circ f)'(-1) =$ النجاح ان تفعله $60(-1)(3(-1)^2+1)^9 = -15728640$

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2 + 1$ ، $(x \neq 0)$ $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

الحل

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

① $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

② $g(x) = x^2+1$

③ $f'(x) = \frac{(2x+1)'(x) - (2x+1)\cdot(x)'}{x^2}$

$= \frac{2\cdot x - (2x+1)\cdot 1}{x^2}$

$= \frac{2x - 2x - 1}{x^2}$

$= \frac{-1}{x^2}$

⑤ $g'(x) = 2x$

نستبدل x ب $g(x)$

④ $f'(g(x)) = \frac{-1}{(x^2+1)^2}$

⑥ $(f \circ g)'(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$

$= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

مثال (6)

لنأخذ: $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

الحل

صورة أسية: $y = (x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$

إشتقاق

$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{-\frac{2}{5}} \cdot (x^2+3x+5)'$$

$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{-\frac{2}{5}} \cdot (2x+3)$$

$$y' = \frac{3(2x+3)}{5(x^2+3x+5)^{\frac{2}{5}}}$$

$$y' = \frac{3(2x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

خطوات حل

قوس مرفوع لأس

1- ننزل الأس

2- نكتب القوس

3- ننقص من الأس واحد

4- ضرب مشتقة مابداخل القوس

حاول أن تحل

3 لتكن: $u = 2x^3 + x$ ، $y = u^2 + 4u - 3$ أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

الحل

$y = u^2 + 4u - 3$ || $u = 2x^3 + x$

$\frac{dy}{du} = 2u + 4$ || $\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2u+4)(6x^2+1) = \left(2(2x^3+x) + 4\right)(6x^2+1)$$

$$= (4x^3+2x+4)(6x^2+1) = 24x^5 + 12x^3 + 24x^2 + 4x^3 + 2x + 4$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ ,\ 2\pi)$

الحل

بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

$$2y' = 2x + \cos y \cdot y'$$

$$2y' - \cos y \cdot y' = 2x$$

$$y'[2 - \cos y] = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\sqrt{\pi}\,,\,2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)} = 7.08$

حاول أن تحل

5. أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$

الحل

بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + y'x = -2x - y$$

$$(yx)' = (y)'(x) + (y)(x)'$$
$$= y'x + y$$

$$y'[-2y + x] = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

ميل المماس: $y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - 1}{-2(1) + 1} = 3$

حاول أن تحل

7. للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1, 1)$

الحل

بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + 2x = 0$$

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = -2x$$

$$y'\left[2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right] = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

ميل المماس: $y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = \frac{-4}{5}$

هل اثبت فرضك ؟؟

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

الحل

فكرة حل

$y = x\sin x$

بالاستقاق

$y' = (x)'(\sin x) + (x)(\sin x)'$

$y' = \sin x + x\cos x$

بالاستقاق

$y'' = \cos x + (x)'(\cos x) + (x)(\cos x)'$

$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x$

$y'' = 2\cos x - \underline{\underline{x\sin x}}$

$y'' = 2\cos x - y$

بالاستقاق

$y''' = -2\sin x - y'$

$y''' + y' + 2\sin x = 0$

مثال (8)

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل

فكرة حل

$y = \sqrt{1-2x}$

بتربيع الطرفين

$y^2 = 1-2x$

بالاستقاق بالنسبة لـ x

$2yy' = -2x$

$\div 2$

$yy' = -1$

بالاستقاق بالنسبة لـ x

$(y)'(y') + (y)(y')' = 0$

$y\,y'' + (y')^2 = 0$

خطوات حل أوجد القيم القصوى المطلقة :

① نص النظرية ② النقاط الطرفية ③ النقاط الحرجة ④ جدول مقارنة ⑤ تعيين القيم القصوى

(1 – 3) القيم القصوى المطلقة

نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\,,b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

الحل

∵ f دالة متصلة على $[0,3]$

∴ f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

① النقاط الطرفية :

$f(0) = 1$

$f(3) = 19$

② النقاط الحرجة :

$f'(x) = 3x^2 - 3$

بوضع $f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0$ mod53

$x_1 = 1 \in (0,3)$ أو $x_2 = -1 \notin (0,3)$ مرفوضة

$f(1) = -1$

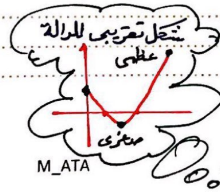
$(1,-1)$ نقطة حرجة

③ الجدول : في الفترة $[0,3]$

	طرفية	حرجة	طرفية
x	0	1	3
y	1	-1	19

القيمة العظمى المطلقة = 19 عند $x = 3$

القيمة الصغرى المطلقة = -1 عند $x = 1$



هل اديت فروضك ؟؟

ملحوظة: يوجد نوعان من القيم القصوى ← مطلقة / محلية (سيتم شرحها لاحقا)

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2,1]$.

(لم يذكر أن الدالة متصلة) ← الحل

f دالة كثيرة الحدود متصلة على R

$\therefore$ f دالة متصلة على الفترة $[-2,1]$

$\therefore$ f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

1 النقاط الطرفية:

$f(-2) = -1$

$f(1) = -1$

2 النقاط الحرجة:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نوضع: $f'(x) = 0$

mod53 $3x^2 - 3 = 0$

$x_1 = 1 \notin (-2,1)$ مرفوضة

أو $x_2 = -1 \in (-2,1)$

$f(-1) = 3$

$(-1,3)$ حرجة

3 الجدول في الفترة $[-2,1]$

	طرفية	حرجة	طرفية
x	-2	-1	1
y	-1	3	-1

القيمة العظمى المطلقة = 3 عند $x = -1$

القيمة الصغرى المطلقة = -1 عند $x = 1$ أو $x = -2$

رسم تقريبي للدالة

بالسؤال يتعلم الانسان

تذكر أن : توجد نقاط حرجة عندما $f'(x)=0$ (البسط = صفر)
$f'(x)$ غير موجودة (المقام = صفر)

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2,3]$

الحل

f دالة متصلة على $[-2,3]$

$\therefore f$ يكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

① النقاط الطرفية :

$f(-2)=1.58$

$f(3)=2.08$

② النقاط الحرجة :

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

نوضع : $f'(x)=0$

البسط = صفر

$2\neq 0$

$\therefore f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(-2,3)$

مرفوضة

أو

$f'(x)$ غير موجودة

المقام = صفر

$3x^{\frac{1}{3}}=0$

$x^{\frac{1}{3}}=0$

$x=0\in(-2,3)$

$f(0)=0$

نقطة حرجة $(0,0)$

③ الجدول :

في الفترة $[-2,3]$

	طرفية		طرفية
x	-2	0	3
y	1.58	0	2.08
		حرجة	

القيمة العظمى المطلقة = 2.08 عند $x=3$

القيمة الصغرى المطلقة = 0 عند $x=0$

رسم تقريبي للدالة

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

إنتبه: في حالة الحدودية النسبية
يمكن تجاهل $f'(x)$ غير موجودة عند أصفار المقام حيث أن أصفار المقام لا تنتمي للمجال

حاول أن تحل

4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

الحل

f دالة حدودية نسبية متصلة لكل x حيث $x \in R-\{0\}$
$\therefore f$ دالة متصلة على الفترة $[1,3]$
$\therefore f$ لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

① النقاط الطرفية:

$f(1) = 1$

$f(3) = 0.11$

② النقاط الحرجة:

$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

إشتق $f(x) = x^{-2}$

نضع: $f'(x) = 0$
البسط = صفر
$-2 \neq 0$
$\therefore f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (1,3)$
مرفوضة

أو

$f'(x)$ غير موجودة
المقام = صفر
$x^3 = 0$
$x = 0 \notin (1,3)$
مرفوضة

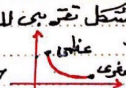
الجدول:
في الفترة $[1,3]$

	طرفية	حرجة	طرفية
x	1	//////	3
y	1	//////	0.11

القيمة العظمى المطلقة = 1 عند $x = 1$

القيمة الصغرى المطلقة = 0.11 عند $x = 3$

شكل تقريبي للدالة



تستطيع ان تفعلها مهما كانت

(5 - 3) تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1)

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

الحل

نفرض العددان x و y

$x + y = 100$

$\boxed{y = 100 - x}$ (1)

$\boxed{0 < x < 100}$

مجموع المربعين :

$f(x) = x^2 + y^2$

$= x^2 + (100 - x)^2$

بالاشتقاق

$f'(x) = 2x + 2(100 - x) \cdot -1$

$= 2x - 2(100 - x)$

$= 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

نضع : $f'(x) = 0$

$4x - 200 = 0$

$4x = 200$

$\boxed{x = 50}$

إختبار المشتقة الثانية :

$f''(x) = 4$

$f''(50) = 4 > 0$

∴ توجد قيمة صغرى عند $x = 50$

بالتعويض في (1)

$y = 100 - 50 = 50$

∴ العددان هما 50 و 50

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

حاول أن تحل

1. أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل

نفرض العددين x , y

$x + y = 14$

$\boxed{y = 14 - x}$ ①

$\boxed{0 < x < 14}$

ناتج الضرب:

$f(x) = x \cdot y$

$f(x) = x \cdot (14 - x)$

$= 14x - x^2$

بالاشتقاق

$f'(x) = 14 - 2x$

نضع $f'(x) = 0$:

$14 - 2x = 0$

$-2x = -14$

$\boxed{x = 7}$

إختبار المشتقة الثانية:

$f''(x) = -2$

$f''(7) = -2 < 0$

∴ يوجد قيمة عظمى عند $x = 7$

بالتعويض في ①

$y = 14 - 7 = 7$

العددان هما: $7 , 7$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

الحل

$$v(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ h

$$v'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$$

نوجد : $v'(h) = 0$

$$\cancel{2\pi}(-3h^2 + 36) = 0$$

$$-3h^2 + 36 = 0 \qquad \text{mod53}$$

$\boxed{h_1 = 2\sqrt{3}}$ أو $h_2 = -2\sqrt{3}$

مرفوض

h	0	$2\sqrt{3}$	∞
إشارة v'	+	−	
سلوك v	↗	↘	

إختبار :
توجد قيمة عظمى عند $h = 2\sqrt{3}$
ويكون الحجم أكبر ما يمكن

الحجم :

$$v(2\sqrt{3}) = 2\pi\left(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})\right) = 522.37 \text{ cm}^3$$

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

(3) أثبت أنَّ من بين المستطيلات التي محيطها 8 m، واحدًا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعًا.

الحل

محيط المستطيل = 8

$2(x+y)=8$

$x+y=4$

$\boxed{y=4-x}$ ①

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$f(x)=x\cdot y$

$f(x)=x\cdot(4-x)$
$=4x-x^2$

بالاشتقاق

$f'(x)=4-2x$

نوضع : $f'(x)=0$

$4-2x=0$
$-2x=-4$
$\boxed{x=2}$

x	0	2	4
إشارة f'	+	−	
سلوك f	↗	↘	

إختبار:
توجد قيمة عظمى عند $x=2$
وتكون المساحة أكبر ما يمكن
بالتعويض في ①

$y=4-2=2$

∴ ابعاد المستطيل : $x=2$ و $y=2$

$\therefore x=y$

∴ المستطيل يكون مربع

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

ملاحظات : جدول دراسة إشارة f' يستخدم لتعيين ← فترات التزايد والتناقص
← القيم القصوى المحلية

(4 – 3) رسم بيان الدوال

مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

الحل

① f دالة كثيرة الحدود مجالها R

② النهايات عند الحدود المفتوحة :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^3) = \infty$

③ النقاط الحرجة :

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع : $f'(x) = 0$

mods3 $3x^2 - 3 = 0$

$x_1 = 1$ أو $x_2 = -1$

تعويض في f : $f(1) = 2$ نقطة حرجة $(1,2)$ || $f(-1) = 6$ نقطة حرجة $(-1,6)$

جدول f'

	$-\infty$	-1	1	∞

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
تعويض في f' إشارة f'	+++	---	+++
سلوك الدالة f	$-\infty$ ↗ متزايدة	↘ متناقصة	↗ متزايدة ∞

④ فترات التزايد :
$(-\infty,-1)$ و $(1,\infty)$
فترات التناقص :
$(-1,1)$

⑤ القيمة العظمى المحلية $= 6$ عند $x = -1$
القيمة الصغرى المحلية $= 2$ عند $x = 1$

النجاح ملك من يدفع ثمنه

جدول f''

	$-\infty$	0	∞

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
إشارة f''	--	++
التقعر	$\cap$	$\cup$

⑥ التقعر :

$f''(x) = 6x$

نضع : $f''(x) = 0$

$6x = 0$

$x = 0$

تعويض في f : $f(0) = 4$

فترات التقعر لأعلى : $(0,\infty)$

فترات التقعر لأسفل : $(-\infty,0)$

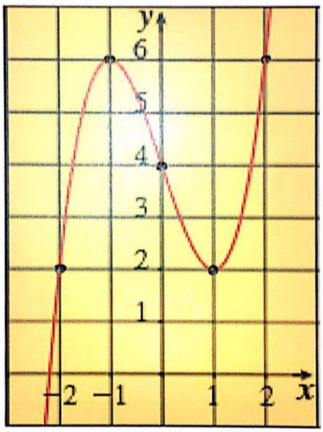
⑦ نقطة الانعطاف : $(0,4)$

عند عمل الجدول يجب مراعاة أن يحتوي على كل من ① النقاط الحرجة ② نقاط الانعطاف ③ النقاط الإضافية {ولا تقل عن 5 نقاط بحد أدنى}

⑧ الجدول:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية

⑨ الرسم:



ملاحظة: يجب حل هذه المسألة أكثر من مرة حتى يصل زمن الحل إلى ٢٠ دقيقة بحد أقصى

العلم هو الخير والجهل هو الشر

ملاحظات : جدول دراسة اشارة f'' يستخدم لتعيين < فترات التقعر / نقاط الانعطاف

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل

① f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

② النهايات عند الحدود المفتوحة : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$

③ النقاط الحرجة : $f'(x) = -3x^2$

بوضع : $f'(x) = 0$

$-3x^2 = 0$

$x_1 = 0$

$f(0) = 1$

(0,1) نقطة حرجة

جدول f'

x	$-\infty$ ... 0	0 ... ∞
إشارة f'	---	---
سلوك الدالة f	∞ متناقصة	متناقصة $-\infty$

④ فترات التزايد :

لا يوجد

فترات التناقص :

$(\infty, 0)$ و $(0, -\infty)$

⑤ القيمة العظمى المحلية لا يوجد

القيمة الصغرى المحلية لا يوجد

من لم يتعلم في صغره لن يتقدم في كبره

جدول f''

⑥ التقعر : $f''(x) = -6x$

بوضع : $f''(x) = 0$

$-6x = 0$

$x_2 = 0$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$ ... 0	0 ... ∞
إشارة f''	++	--
التقعر	$\cup$ تقعر لأعلى	$\cap$ تقعر لأسفل

فترات التقعر لأعلى : $(0, -\infty)$

فترات التقعر لأسفل : $(\infty, 0)$

⑦ نقطة الانعطاف : $(0, 1)$

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لايجاد قيم x

معادلة من الدرجة الثالثة mod54

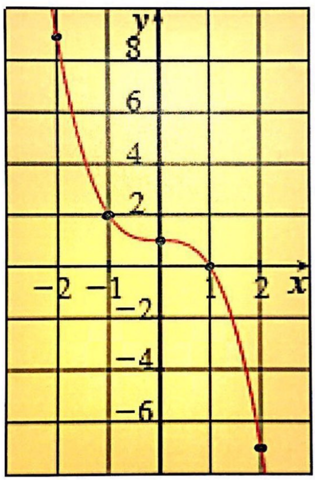
معادلة من الدرجة الثانية mod53

معادلة من الدرجة الأولى ذهنيا

⑧ الجدول :

		اضافية	إنعطاف	إضافية	
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7
	اضافية		حرجة		اضافية

⑨ الرسم :



الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها