تجميع قوانين ونظريات الرياضيات

فصل اول 2023 صف 12 علمى

أولا (النهايات)

تعريف النهايه:

- ليكن c , L عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

شرط وجود النهايه لاى داله:

- بفرض أن c , L عددين حقيقيين يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار ويعبر عن ذلك:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

قواعد النهايات:

k ثابت فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$

إذا كانت $f(x) = x$ حيث c عددًا حقيقيًّا، فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$

إذا كانت L, M, c, k أعدادًا حقيقية، $\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to c} g(x) = M$

قاعدة الجمع: $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

قاعدة الطرح: $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

قاعدة القسمة: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

شرط نهايه المقام :

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

إذا كانت $g(x)$, $f(x)$ كثيرتي حدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ: $g(c) \neq 0$, $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$

شرط نهايه ماتحت الجذر :

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ $\qquad$ $\lim_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right)^n$

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim_{x \to c} f(x) > 0$) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

نهايات الحالات الخاصه :

- لتكن: $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \;,\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- لتكن: $k\in\mathbb{R} \;,\; n\in\mathbb{Z}^+ \;,\; f(x)=\frac{k}{x^n}$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x^n}=0$
- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim_{x\to a}[f(x)\pm b]=\pm\infty$
- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim_{x\to a}[b\cdot f(x)]=\pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب $\lim_{x\to a}[b\cdot f(x)]=\mp\infty$

- لتكن: $f(x)=ax^n \;,\; n\in\mathbb{Z}^+ \;,\; a\in\mathbb{R}^*$:

1) إذا كان n عدد زوجي فإن: $\lim_{x\to\pm\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & : a>0\\ -\infty & : a<0\end{cases}$

2) إذا كان n عدد فردي فإن: $\lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}-\infty & : a>0\\ \infty & : a<0\end{cases}$ ، $\lim_{x\to\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & : a>0\\ -\infty & : a<0\end{cases}$

نهايات الدوال المثلثيه:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \cos ax = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

ثانيا (الأتصال)

شرط أتصال الداله عند نقطه :

1. الدالة f معرّفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$.

نظريات الأتصال:

إذا كانت f , g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

1. الجمع: $f+g$
2. الطرح: $f-g$
3. الضرب في ثابت: $k \cdot f \ , \quad k \in \mathbb{R}$
4. الضرب: $f \cdot g$
5. القسمة: $\dfrac{f}{g} \ , \quad g(c) \neq 0$

الدوال التاليه جميعها متصله:

1. الدالة f: $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f: $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$

فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

الدوال المركبه:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

خطوات بحث أتصال الدوال المركبه عند نقطه:

$(g \circ f)(x)$

:1

نبحث اتصال الداله الثانيه عند النقطه المعطاه.

إذا كانت f متّصلة عند c

:2

نوجد صوره الداله الثانيه عند النقطه المعطاه f(c).

ثم نبحث اتصال الداله الاولى عند الناتج.

و g متّصلة عند $f(c)$

:3

فإن الدالة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

خطوات بحث أتصال الداله على فتره:

إذا كانت الدالّة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّ:

1. الدّالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)، إذا كانت f متّصلة عند كل x في الفترة (a, b)
2. الدّالة f متّصلة عند a من جهة اليمين إذا كان: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدّالة f متّصلة عند b من جهة اليسار إذا كان: $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

وإذا تحقّقت الشروط الثلاثة، فإنّ الدالّة تكون متّصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

خطوات بحث الأتصال للداله على مجالها:

1- نوجد مجال الداله.

2- نبحث اتصال الداله عند كل فتره من فترات المجال.

3- نبحث اتصال الداله عند النقطه فى الفتره المغلقه من ناحيه اليمين.

(عند الطرف المغلق ... وفى بعض الحالات الخاصه نبحث ناحيه اليسار)

4- من 1 و 2 و 3 الداله تكون متصله على مجالها R أو على الفتره.

ملاحظه هامه:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

تستخدم لحل فكره المسائل التاليه :

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = x^2 - 2x$، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$$\therefore \ D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$$x^2 - 2x \geq 0$$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 2x = 0$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \ , \ x = 2$$

ثالثا (الأشتقاق)

حساب ميل المماس بأستخدام التعريف:

ميل المماس لمنحنى عند نقطة محددة يعطى بالقاعدة: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ حيث إن a هي الإحداثي السيني للنقطة على منحنى الدالة f حيث إن x_0 , y_0 هما إحداثيا النقطة على المنحنى، m هي ميل المماس.

حساب المشتقه عند نقطه بأستخدام التعريف:

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

■ إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $y', f'(x), \frac{d}{dx}(f(x)), \frac{dy}{dx}$

حساب المشتقه عند نقطه بأستخدام التعريف البديل:

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

ويرمز لذلك بالرمز:

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ أو $f'(a)$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ (غير موجودة $f'(a)$)

المشتقه من جهه واحده:

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (إن وجدت)

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (إن وجدت)

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

ملاحظات هامه :

- نحصل على ركن عندما تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
- نحصل على ناب عندما يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها.
- نحصل على مماس رأسي عندما يكون المماسللمنحنى عند نقطة رأسيًا.
- إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.
- معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا، الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس عمودي ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.

قواعد الأشتقاق :

- إذا كان $f(x) = c$ فإن: $f'(x) = 0$ حيث c قيمة ثابتة.
- إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$
- إذا كان $f(x) = x^n$ فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.
- $(kf(x))' = k\,f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولي

$$\text{مشتقة قسمة دالتين} = \frac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$$

تحويلات هامه جدا :

$$\sqrt{X} \longrightarrow X^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{X} \longrightarrow X^{1/3}$$

$$\sqrt[7]{X^5} \longrightarrow X^{5/7}$$

مهم التحويل

$$F(x) = 6\sqrt{X}$$
$$= 6X^{1/2}$$
$$F'(x) = \cancel{6}(1/2)X^{-1/2}$$
$$= 3X^{-1/2}$$

$$\frac{1}{X} \longrightarrow X^{-1}$$

$$\frac{1}{X^3} \longrightarrow X^{-3}$$

$$\frac{5}{X^8} \longrightarrow 5X^{-8}$$

مهم التحويل

$$F(x) = \frac{1}{X^9}$$
$$= X^{(-9)}$$
$$F'(x) = -9X^{-10}$$

فى ثلاث حالات للاشتقاق:

1- لو مطلوب ايجاد المشتقه للداله عند نقطه
((كده هنجيب المشتقه يمين ويسار عند النقطه باستخدام التعريف)).

2- لو مطلوب نبحث او ندرس الاشتقاق للداله عند نقطه
((كده هنجيب الاول النهايه والاتصال ولو تحقق نوجد المشتقه باستخدام التعريف)).

3- لو مطلوب ايجاد المشتقه للداله على مجالها او بدون اعطاء نقطه.
((وقتها هنجيب مجال الداله و هنستخدم تطبيقات الاشتقاق يمين ويسار ونكتب كلمه تبحث ثم نحيب المشتقه عند نقطه البحث)).

....

معادله خط المماس وخط الناظم :

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

معادلة خط المماس ومعادلة خط الناظم أو العمودى

~~نصار~~

عند النقطة (x_1 , y_1)

$\boxed{a}$ ← $F(a)$ الصورة بالتعويض لو غير معطى بالسؤال

الحل

1 نوجد $F'(x)$

2 $m = F'(a)$ ميل المماس

$a \to x_1$

نعوض فى ناتج المشتقة بدل x نضع a أو x_1

يتم التأكد من الناتج باستخدام حساب المشتقة بالآلة الحاسبة

هام جداً جداً

3 معادلة خط المماس هى $\boxed{y - y_1 = m_{\text{مماس}}(x - x_1)}$

4 $m_{\text{عمودى أو ناظم}} = -\dfrac{1}{m_{\text{مماس}}}$

5 معادلة خط الناظم أو (العمودى) هى $\boxed{y - y_1 = m_{\text{عمودى}}(x - x_1)}$

أشتقاق الدوال المثلثيه:

إذا كان $f(x) = \sin x$ فإن: $f'(x) = \cos x$

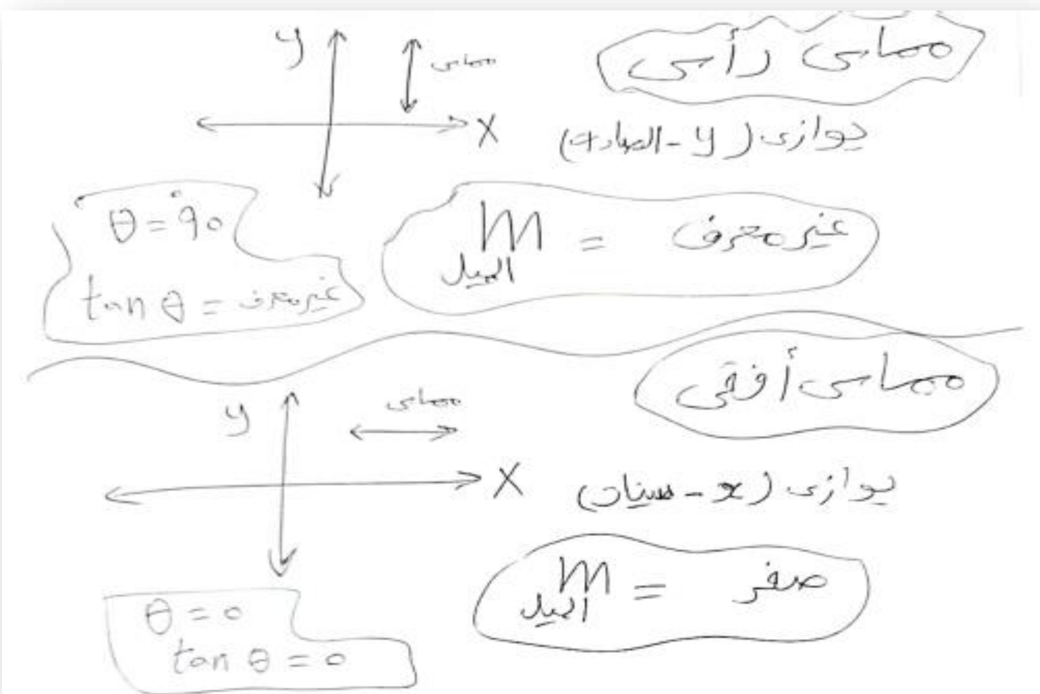
إذا كان $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$

إذا كان $f(x) = \tan x$ فإن: $f'(x) = \sec^2 x$

إذا كان $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$

إذا كان $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$

إذا كان $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$



Redian

shift + $\boxed{5}$

الآلة الحاسبة ع

$$\frac{d}{dx}\sin x \longrightarrow \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x \longrightarrow -\sin x$$

$\tan x$

$\sec x \quad \sec x$

$\cot x$

$-$

$\csc x \quad \csc x$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = (\sec x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \cdot \sec x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x = -(\csc x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cdot \cot x$$

على الآلة الحاسبة

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

متطابقة فيثاغورس

قاعده السلسله:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$F(x) = \_\_\_$ و $g(x) = \_\_\_$

$$\boxed{(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

1. نوجد $F'(x)$

2. نعوض بـ $g(x)$ بدل x في $F'(x)$

$F'(g(x)) = \_\_\_$

3. نوجد $g'(x)$

4. $(F \circ g)'(x) =$ نضرب نتائج خطوه ② , ③

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)\ ,\ u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًّا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

((قاعده سلسله القوى تعتمد على مشتقه مابداخل القوس الذى له أس))

<u>المشتقات ذات الرتب العليا:</u>

$\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{d^2x}$ ، $\frac{d^3y}{d^3x}$ ، ...... $\frac{d^ny}{d^nx}$ هي مشتقات الدالة y من الرتب العليا إذا وجدت في مجال تعريفها.

في الاشتقاق الضمني نوجد مشتقة المتغير المستقل x ومشتقة المتغير التابع y ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$.

رابعا (تطبيقات الأشتقاق)

القيم القصوى المطلقه:

إذا كانت f دالة مجالها D، $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى:

– قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

– قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\,,b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

القيم القصوى المحليه:

لتكن $(c\,,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c ، $\boldsymbol{f(c)}$ تكون:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad f(c) \leqslant f(x)$

النقاط الحرجه:

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\,,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x=c$ فإنّ $(c\,,f(c))$ نقطة حرجة.

خطوات أيجاد القيم القصوى المطلقه خلال فتره:

خطوات إيجادها جبريًّا على $[a\,,b]$:

1. إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x=b \quad , \quad x=a$
2. إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a\,,b)$ إن وجدت.
3. أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a\,,b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a\,,b]$.

فترات التزايد والتناقص:

(تعتمد على أشاره المشتقه الأولى حول النقطه الحرجه فى جدول التزايد والتناقص)

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $(a\ ,\ b)$.

- إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتزايد على $(a\ ,\ b)$.
- إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتناقص على $(a\ ,\ b)$.
- إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ الدالة f ثابتة على $(a\ ,\ b)$.

القيم القصوى المحليه:

(تعتمد على اتجاهات الأسهم فى جدول التزايد والتناقص)

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c\,,f(c))$ نقطة حرجة.

- إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
- إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.

إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

التقعر:

(تعتمد على أشاره المشتقه الثانيه حول نقطه الانعطاف فى جدول التقعر)

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .

اختبار التقعّر:

a إذا كانت $\forall x \in I \ , \ f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I .

b إذا كانت $\forall x \in I \ , \ f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .

نقطه الأنعطاف:

نقطة الانعطاف:

تسمّى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

أختبار المشتقه الثانيه:

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$.

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$.

خطوات دراسه تغير الداله ورسم بيانـها:

1. عيّن مجال الدالة f.

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2. أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.

3. عيّن النقاط الحرجة للدالة f.

4. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

5. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

6. أوجد نقاطًا إضافية.

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7. ارسم بيان الدالة f. استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

خطوات حل مسائل تطبيقات القيم القصوى:

1-

كوّن نموذجًا رياضيًّا للمسألة

ضع متغيّرًا واحدًا يمثّل الكميّة المطلوب الحصول على قيمتها العظمى أو قيمتها الصغرى. ثم اكتب دالة باستخدام المتغيّر بحيث تعطي قيمتها القصوى المعلومات التي نبحث عنها.

(دائما تكن (F(X هى العلاقه المراد تكون اكبر او اصغر مايمكن)

....

2-

أوجد مجال الدالة. وحدّد قيم المتغيّر التي تكون معقولة في المسألة.

....

3-

حدّد النقاط الحرجة ويمكن إيجاد النقاط الطرفيّة.
أوجد أين تكون المشتقّة صفريّة أو أين لا يكون لها وجود.

4-

طبق أختبار المشتقه الثانيه

(بالتعويض بالنقاط الحرجه فى المشتقه الثانيه ونحدد القيم القصوى المطلقه على حسب اشاره ناتج التعويض فى المشتقه الثانيه)

...

-5

فسّر الحل: ترجم نتيجتك الرياضية إلى الموقف في المسألة، ثمّ قرّر ما إذا كانت النتيجة معقولة.

خامسا (الأحصاء)

إن درجة الثقة أو مستوى الثقة هو احتمال $(1-\alpha)$ أن تكون فترة الثقة تحوي القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة، وعادة يعبّر عنها كنسبة مئوية.

أما α فهي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

فمثلًا:

إذا كانت $\alpha = 0.05$ حينها تكون درجة الثقة $1-\alpha = 0.95$ أي 95%

المعلمة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة هو اقتران تتعيّن قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري لها S.

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

$\overline{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.

S هو الانحراف المعياري للعينة.

$t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع t.

الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

المقياس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95%.

Statistics الإحصاء

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$; $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (القيمة الحرجة)

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (الخطأ المعياري للمجتمع)

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع طبيعي)

$(\overline{x} - E \, , \, \overline{x} + E)$ فترة الثقة للمتوسط الحسابي

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (التوزيع t)

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معاوم)

$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي)

$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم)

$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معاوم)

سادسا قوانين وتحليلات من سنوات سابقه
نحتاج اليها فى حل المسائل

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a > 0$:

$|x| = a \;:\; x = a$ أو $x = -a$

$|x| < a \;:\; -a < x < a$

$|x| > a \;:\; x > a$ أو $x < -a$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

م/أحمد نصار

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

معامل رئيسي

معادلة حدودية من الدرجة الثانية في الصورة العامة

أرقام ثابتة ← a, b, c

لتحليل معادلة من الدرجة الثانية

أولاً بالآلة الحاسبة ← Mode , 5 , 3

$$F(x) = (x \quad\quad)(x \quad\quad) = 0$$

$X_1 = \square$ و $X_2 = \square$

هنا نضع ناتج الآلة الحاسبة بعكس الإشارة

هنا نضع ناتج الآلة الحاسبة بنفس الإشارة

هنا نضع ناتج بعكس الإشارة

هنا نضع ناتج الآلة الحاسبة الثاني بنفس الإشارة

الضرب فى المرافق للجذر التربيعى أو التكعيبى

أ/ أحمد نصار

لكل عددين a , b

مهم جداً جداً

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$$

$$= a - b$$

مربع الأول - مربع الثانى

المرافق دائماً هو نفس القوس مع تغيير أشارة الرقم الثانى

من + ← -

ومن - ← +

أ/ أحمد نصار

المرافق للجذر التكعيبى

$$\sqrt[3]{X}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{X^2}}_{\text{المرافق}} = \sqrt[3]{X^3} = X$$

$$\sqrt[3]{5X}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{(5X)^2}}_{\text{المرافق}} = \sqrt[3]{(5X)^3} = 5X$$

$$x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

حيث $x \geqslant 0 \;,\; a \geqslant 0$

$$x - a = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2})$$

$$x + a = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2})$$