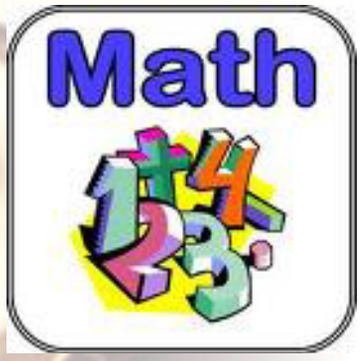
العبقري
فى الرياضيات

الصف العاشر
الفصل الدراسي الأول
2024



إعداد/
عبد السلام البيومي

عبد السلام البيومي

الوحدة الأولى

خواص نظام الأعداد الحقيقية

١ – الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية

أمثلة: $\frac{١}{٣}$ ، ١٤ , ٠ ، $-٢\frac{١}{٣}$

الأعداد الصحيحة

.... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...

الأعداد الطبيعية (الكلية):

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

الأعداد غير النسبية

أمثلة:

$\sqrt{٣}$

π

$\sqrt[٣]{٥}$

١,٣٤٣٣٤...

مثال (١)

حدد أيًّا من الأعداد التالية عددًا نسبيًّا وأيها عددًا غير نسبي.

أ $-\frac{١٨}{٥}$

ب $\sqrt{٤١}$

جـ ٠,٣٣٣...

د ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ...

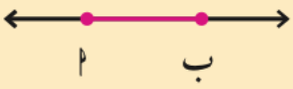
حدد أيًّا من الأعداد التالية عددًا نسبيًّا وأيها عددًا غير نسبي: $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$ ، ١,$\overline{٤}$ ، ٥π.

أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥ .

عبد السلام البيومي

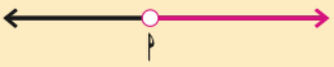
٥ – الفترات

أولا: الفترات المحدودة

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ⩽ س ⩽ ب	
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ⩽ س < ب	
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ⩽ ب	

الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.

ثانيا: الفترات غير المحدودة

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ⩾ أ	
(أ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	س > أ	
(−∞، ب]	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س ⩽ ب	
(−∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

مثال (٣)

أ $[-١، ٣]$

ب $[٤، ٥]$

جـ $(-\infty، ٢)$

د $[٤، \infty)$

أ $(-٢، ١)$

ب $(-\infty، ٣]$

عبد السلام البيومي

حل المتباينات

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

أ ص − ٤ ≤ ١

ب ١٢ ≥ س − ٥

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{ب}{٤}$ ≤ ١، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثّل الحل على خط الأعداد:

أ ٣ (س + ٤) + ٥ س ≤ ٢.

ب -٣ ≤ ١ - ٢س < ٣

أ ٢(٢س - ٨) > ٤س + ٢

عبد السلام البيومي

القيمة المطلقة

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب $\in$ ح

١ $|أ| \geq ٠$

٢ $|-أ| = |أ|$

٣ $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

٤ $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$، حيث ب $\neq ٠$

٥ $|أ| \geq أ$

٦ $|أ - ب| = |ب - أ|$

أعد تعريف |س − ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ب |٤ − ٢س|

٢ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ |٥س + ٣| = ٨

ب $|٢س - ١| = ٠$

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: $٥ + |-٢س + ٤| = ٠$

أوجد مجموعة حل المعادلة $٤|٢س + ٣| - ٥ = ١١$

أ ٣|٢س + ٤| −٦ = ٠

ب |٥س − ٤| + ٣ = ٠

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢م − ٣| = |م + ١|

أ |ص − ٥| = |٢ص + ٣|

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ٣| = ٣س − ٢

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: |٤س − ١| = س + ٢.

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

تعميم

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ |س| ≤ أ تكافئ -أ ≤ س ≤ أ

٢ |س| ≥ أ تكافئ س ≤ أ أو س ≥ - أ

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م - ٤| - ١ > ٥، ومثّل الحل على خط الأعداد.

عبد السلام البيومي

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: $\left|\frac{٣}{٤} - س\right| \geq \frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط الأعداد.

دالة القيمة المطلقة

رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ} ، جـ\right)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ} ، ٠\right)$

ارسم بيانيًّا الدالة: ص = |٢س + ٤|.

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥.

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = $\left|\text{س} + \frac{٥}{٢}\right|$.

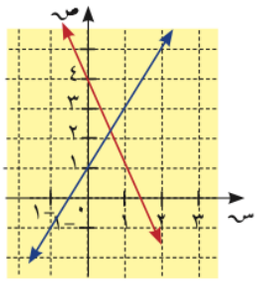
أ ص = |س + ٤| + ٣

عبد السلام البيومي

ب ص = −|س − ٥| − ٣

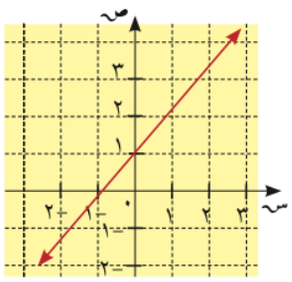
عبد السلام البيومي

حل نظام معادلتين خطيتين



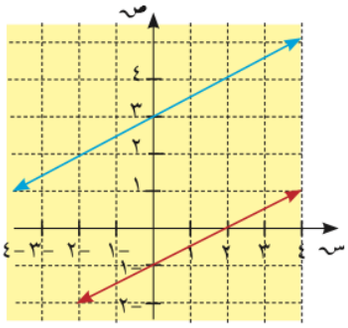
المستقيمان متقاطعان

للنظام حل واحد



المستقيمان منطبقان

للنظام عدد لانهائي من الحلول



المستقيمان متوازيان غير منطبقين

لا حل للنظام

١ أوجد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ص = ٥ \\ -س + ص = -١ \end{cases}$ بيانيًّا وتحقق من الحل.

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س - ص = ١٣ \\ ٣س + ص = ٧ \end{cases}$

٢ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١١ \\ -٢س + ٤ص = ١٠ \end{cases}$

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١٢ \\ ٥س - ص = ١٣ \end{cases}$

استخدم طريقة التعويض لحل النظام $\begin{cases} ٣م - ل = ١ \\ ٣م - ٢ل = ٥ \end{cases}$

٤ حل النظام $\begin{cases} \text{ت} = ٢\text{ر} + ٣ \\ ٥\text{ر} - ٤\text{ت} = ٦ \end{cases}$ مستخدمًا طريقة التعويض.

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حلّ المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ هو: $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

استخدام المميز Δ: يسمى Δ = ب^{٢} − ٤أجـ **المميز**،

: عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا

أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا

أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

حلّ المعادلة: س^{٢} + ١٠ س = −١٦ باستخدام القانون.

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ س^{٢} − ٦ س + ٥ = ٠

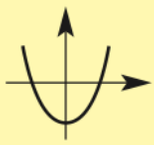
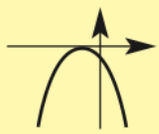
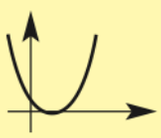
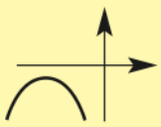
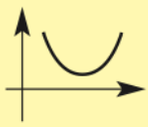
عبد السلام البيومي

ب س(س − ٢) = ٧

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: ٤س^{٢} = ١٣س − ٩

٥ حدد نوع جذري المعادلة: ٢س^{٢} − ٥س + ٢ = ٠.

٦ حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠.

المميز	نوع جذري المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	 
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	 

اكتب أمثلة من عندك عن معادلات من الدرجة الثانية توضح الأنواع الثلاثة للمعادلات (من حيث جذرا المعادلة) المبيّنة في الجدول المجاور.

١ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل ∪.

٢ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل ∩.

٥- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما م، ن

فإن: م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٣س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ إذا وجدا.

٨ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٤س^{٢} − ٩س + ٣ = ٠ إذا وجدا.

إذا كان مجموع جذري المعادلة: ٢س^{٢} + ب س − ٥ = ٠ يساوي ١ . فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: أس^{٢} − ٥س + ٢ = ٠ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد قيمة أ، ثم حلّ المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

المعادلة على الصورة: س^{٢} − (م + ن)س + م ن = ٠

أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣، ٥.

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

الوحدة الثانية

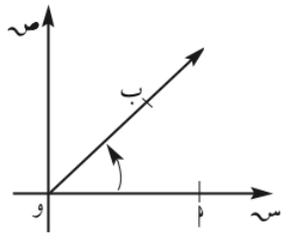
الزوايا وقياساتها

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي:

تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

الزاوية الربعية

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° أو -٩٠°، -١٨٠°، -٢٧٠°، -٣٦٠°.



أنظمة قياس الزاوية:

أولا: القياس الستيني:

١ اكتب كلًا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

ثانيا: القياس الدائري (الراديان):

تعريف:
القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$
ويرمز إليه بالرمز هـ^{د}.

$$هـ^{د} = \frac{ل}{نق}$$

$$ل = هـ^{د} \, نق$$

تعريف الزاوية النصف قطرية:

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.
وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١^{د}).

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ (٢ , ١)^{د}

ب (٥٧ , ١)^{د}

العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ^{د} وقياسها الستيني س$^{\circ}$ فإن:

$$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} \qquad \text{ومنها } س^{\circ} = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \qquad هـ^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$$

زاوية قياسها ٧٥°، أوجد القياس الدائري لها.

أوجد القياس الستيني للزاوية $\frac{٣\pi}{٤}$.

عبد السلام البيومي

حاول أن تحل

٤ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥°

ب ٣٠٠°

٥ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{٥}{٨} \times \pi$

ب $٠,٧٥^{د}$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

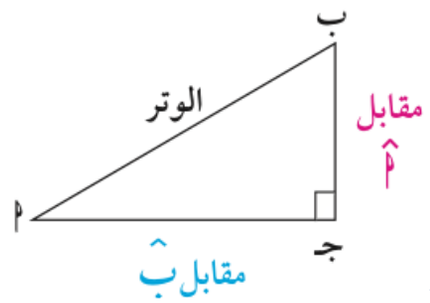
أ $\frac{\pi}{٢}$

ب $\frac{\pi}{٣}$

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π، ٢٥٠°، $\frac{٥\pi}{٧}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$، ٣٣٠°.

عبد السلام البيومي

النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما



جيب الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

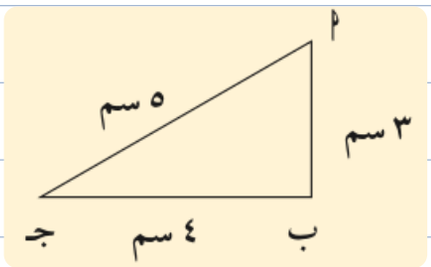
جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظل الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثال (١)

في الشكل المقابل:

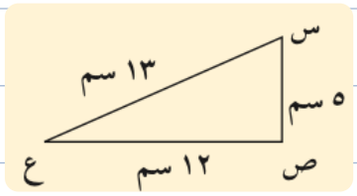
أثبت أن المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب، ثم أوجد جا أ، جا جـ.



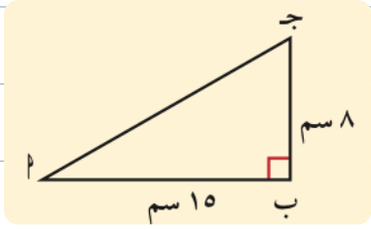
حاول أن تحل

١ أ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في ص.

ب أوجد جا س، جا ع.



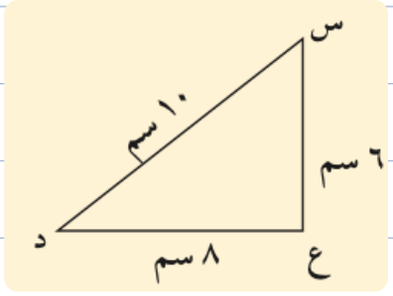
Δأب جـ قائم في بَ، أوجد كلًّا من: أجـ، جاأ، جتاأ، جاجـ، جتاجـ.ماذا تستنتج؟



٢ أ أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

ب أوجد كلًّا من: جا(سَ)، جتا(سَ)، جا(دَ)، جتا(دَ).

جـ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين سَ، دَ.



مقلوبات الجيب وجيب التمام:

قتاأ = $\frac{١}{\text{جاأ}}$: جاأ ≠ ٠

قاأ × جاأ = ١

قاأ = $\frac{١}{\text{جتاأ}}$: جتاأ ≠ ٠

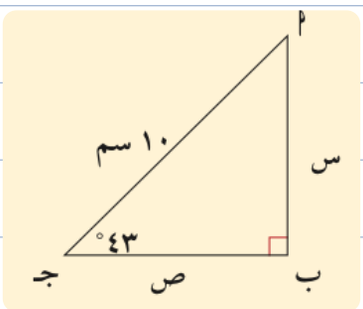
قاأ × جتاأ = ١

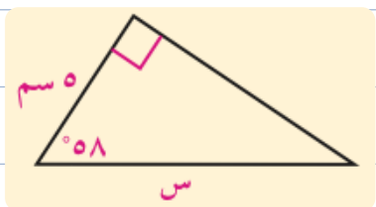
ظتاأ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$: ظاأ ≠ ٠

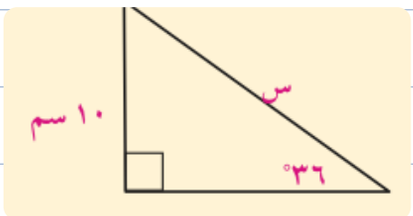
ظاأ × ظتاأ = ١

أب جـ مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أجـ = ٢٥ سم.
أثبت أن △أب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جاأ، جتاأ، قاأ، قتاأ، جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

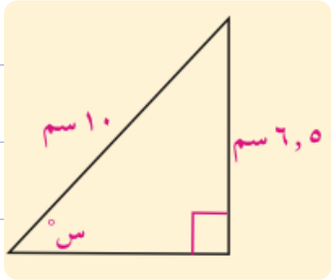
مثال (٤) في الشكل المجاور، أوجد س، ص

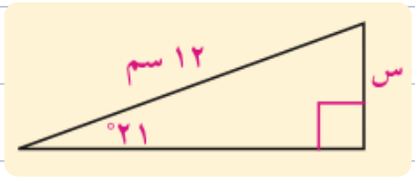


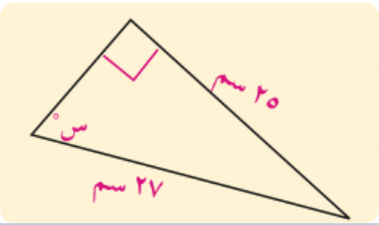


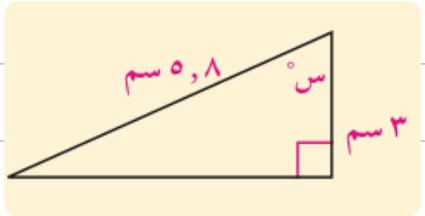


٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.



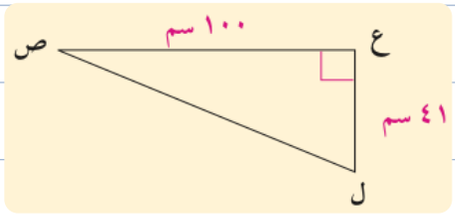




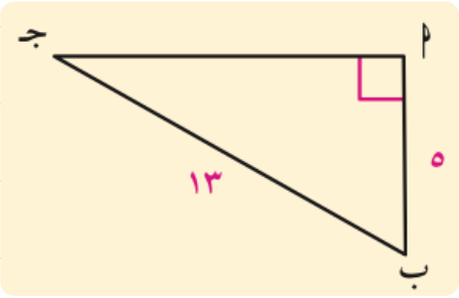


أوجد ق(س̂) حيث ظاس = ٥ , ٠

في الشكل المقابل، أوجد ق(ل̂) لأقرب درجة.



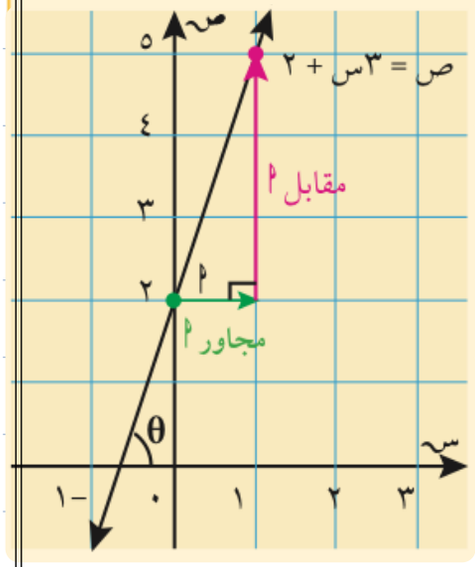
في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.



إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.

$$\text{طا}\theta = \text{ميل المستقيم} = \frac{\text{التغير الراسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

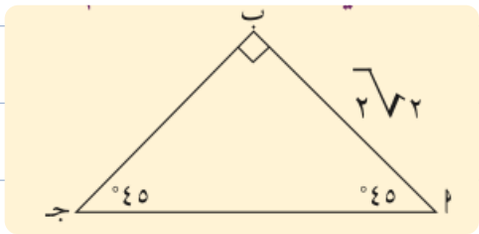


احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

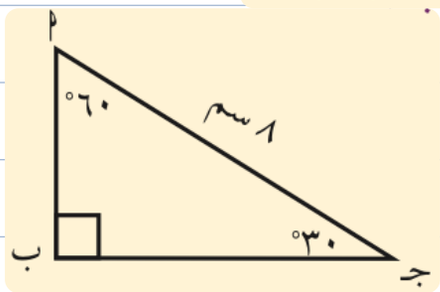
عبد السلام البيومي

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$.



أب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم.أوجد طول كل من الضلعين $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.



عبد السلام البيومي

حل المثلث قائم الزاوية

حلّ المثلث أ ب جـ القائم في بَ إذا علم أن: أ ب = ٤ سم، ب جـ = ٣ سم

١ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جَ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أ جـ = ١٢ سم

حلّ المثلث أ ب جـ القائم في (جـ) إذا علم أن: أ ب = ٤٠ سم، ق(ب) = ٢٥°

٢ حل المثلث أ ب جـ القائم في جـ حيث: أ جـ = ٢٠ سم، ق(ب) = ٧٥°

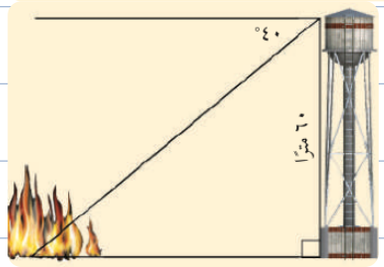
زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفاع ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.

١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢° . أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

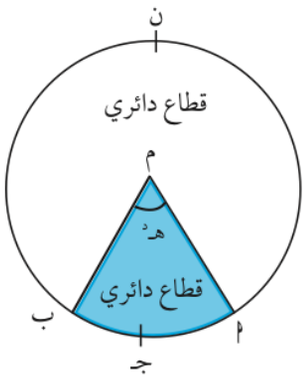


عبد السلام البيومي

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

تعريف:

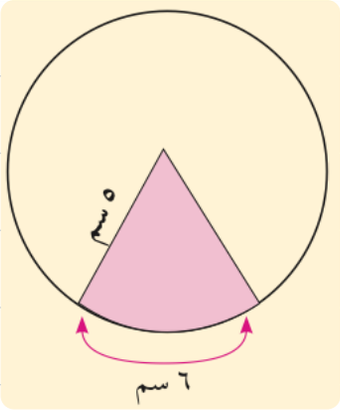
القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.



مساحة القطاع الدائري:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:



١ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ° نق^{٢}

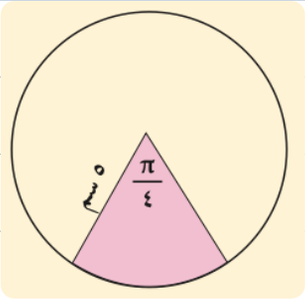
تذكر:

محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

طول القوس ل = هـ° × نق

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



القطعة الدائرية: القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د})

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية ٦٠° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

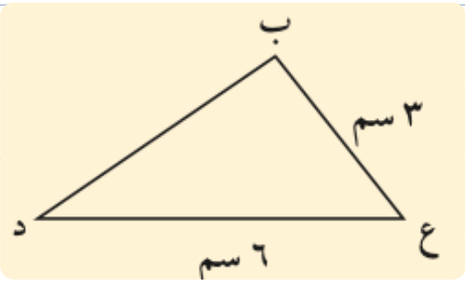
أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

مساحة المثلث

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

ب ع د مثلث فيه ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٠°
أوجد مساحة هذا المثلث.

في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^{٢}. فأوجد ق($\hat{ع}$).



عبد السلام البيومي

الوحدة الثالثة

النسبة والتناسب

النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = \dots$

خاصيّة التساوي:

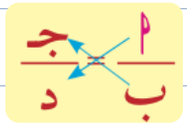
ليكن أ، ب، جـ، د، ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

خاصيّة الضرب التقاطعي:

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ د = ب جـ



أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{ص}{٢,٥} = -\frac{٣}{٤}$

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{ب} = \frac{٨}{٢٠}$

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة**.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**.

أثبت أن ٤ , ٣ ، ٧ ، ٠٤ , ٢ ، ٢ , ٤ أعداد متناسبة.

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{٢ب + جـ}$.

إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{٥ب + جـ}$.

عبد السلام البيومي

التناسب المتسلسل الهندسي

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

ويسمى ب الوسط المتناسب للعددين أ، جـ أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى أ، جـ طرفي التناسب.

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل) فإن $\text{ب}^{٢} = \text{أجـ}$

إذا كان:

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل) حيث م عدد ثابت

فإن:

$\text{جـ} = \text{د} \times \text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د} \times \text{م}^{٢}$ ، $\text{أ} = \text{د} \times \text{م}^{٣}$

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

١٠ إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

عبد السلام البيومي

التغير الطردي

التغيّر الطردي Direct Variation

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغير أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص α س.

إذا كانت ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

إذا كانت ص α س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًّا.

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

ب ٥س + ٢ص = ٩

جـ ص + ٣س = ٢(س + ٢ص)

عبد السلام البيومي

التغير العكسي

١ – التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان **حاصل ضرب الكميتين** ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى **تغيّرًا عكسيًّا**. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ ، ك ≠ ٠

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص α $\frac{١}{س}$

١

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك.

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان (س$_١$، ص$_١$)، (س$_٢$، ص$_٢$) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

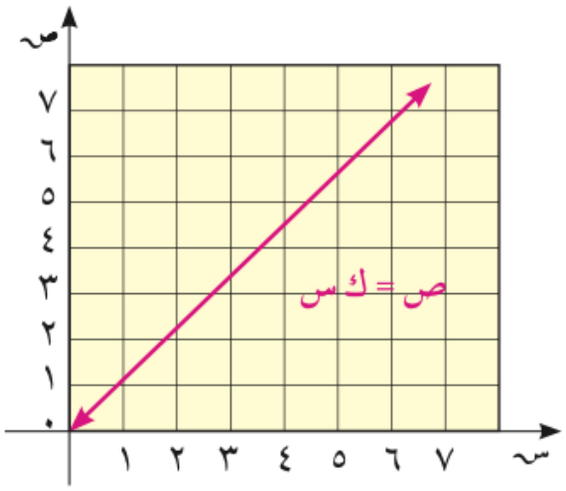
ص α $\frac{١}{س}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإنّ

س$_١$ ص$_١$ = س$_٢$ ص$_٢$ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{س_٢}{س_١}$

في تغيّر عكسي ص $\alpha \frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٢,٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

تغيّر طردي



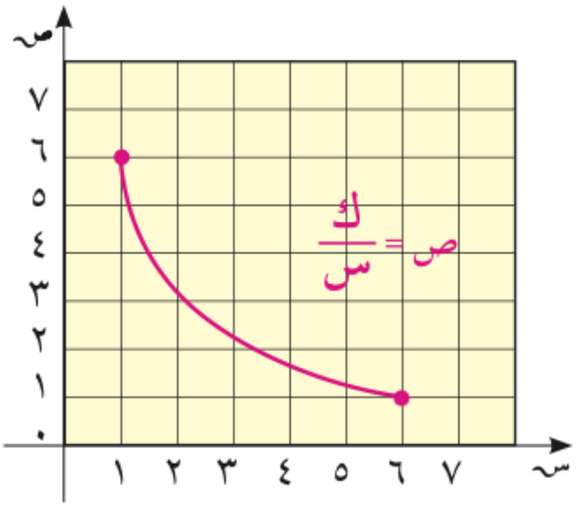
ص α س

ص = ك س ك > ٠

ك = $\frac{ص}{س}$

= ثابت التغيّر

تغيّر عكسي



ص $\alpha \frac{١}{س}$

ص = $\frac{ك}{س}$: ك > ٠

ك = س ص

= ثابت التغيّر

عبد السلام البيومي

الوحدة الرابعة

المضلعات المتشابهة

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

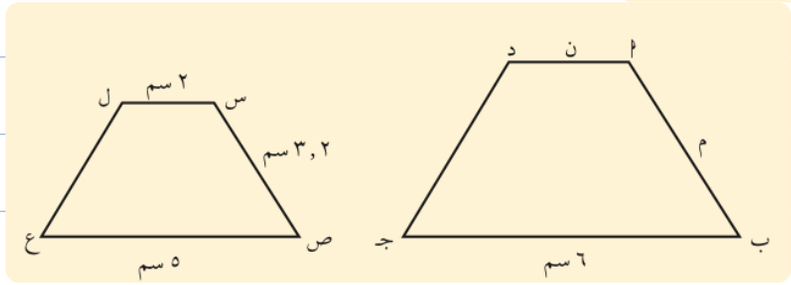
والعكس صحيح.

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

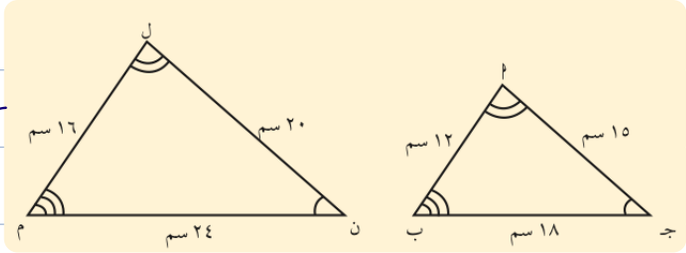
ملاحظة:

الرمز ~ يعني تشابه

في الشكل المقابل: إذا كان أب جـ د ~ س ص ع ل، أوجد قيمة ن، م.



حدّد فيما إذا كان المثلثان أب جـ، ل م ن متشابهين.
إذا كان المثلثان متشابهين،
اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.



٢ المثلثان أب جـ، دهـ و فيهما: ق(أ̂) = ق(د̂) ، ق(ب̂) = ق(هـ̂) ، ق(جـ̂) = ق(و̂)

أب = ١٢ سم، ب جـ = ١٤ سم، أجـ = ١٦ سم، دهـ = ١٨ سم، هـ و = ٢١ سم، د و = ٢٤ سم.

هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضِّحْ إجابتك.

المستطيل الذهبي

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.
والمستطيل الناتج يكون مستطيلًا ذهبيًّا آخر ويكون مشابهًا للمستطيل الأصلي.

النسبة الذهبية

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١ أي حوالى ١:١,٦١٨.

قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ١٠,٥ سم، ٦,٥ سم. هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

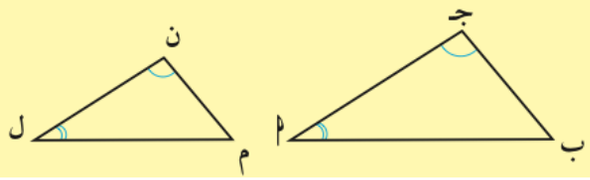
عبد السلام البيومي

تشابه المثلثات

نظرية (١)

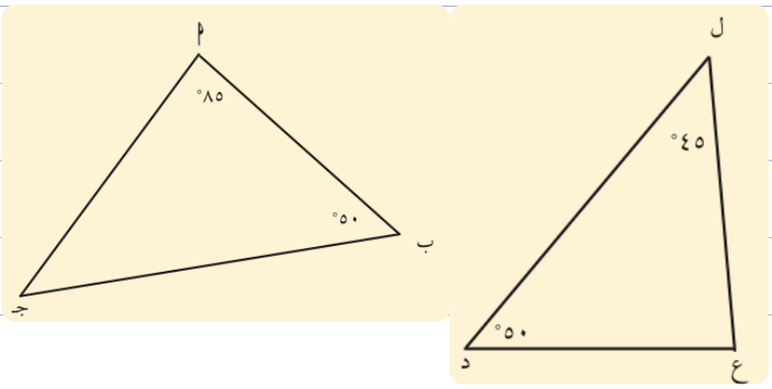
يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

Δأ ب جـ ~ Δل م ن.



في الشكل المقابل أ ب جـ، ع ل د مثلثان، فإذا كان: ق(ب̂) = ٥٠°، ق(أ̂) = ٨٥°

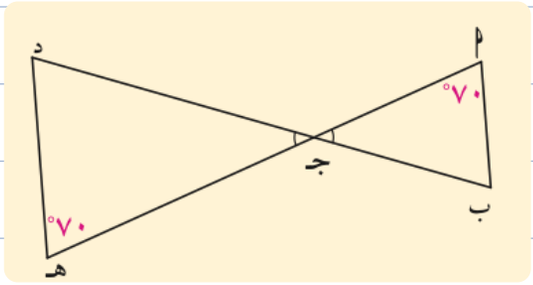
ق(ل̂) = ٤٥°، ق(د̂) = ٥٠° أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، ع د ل.



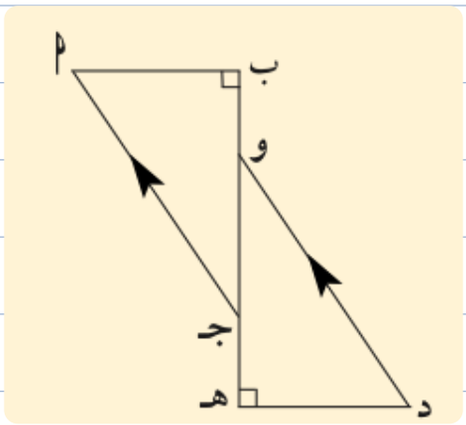
١ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية أ، ق(ب̂) = ٥٥°. المثلث م ل ح قائم الزاوية م، ق(ل̂) = ٣٥°.

أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، م ح ل.

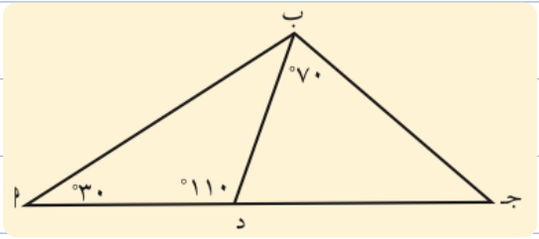
أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.



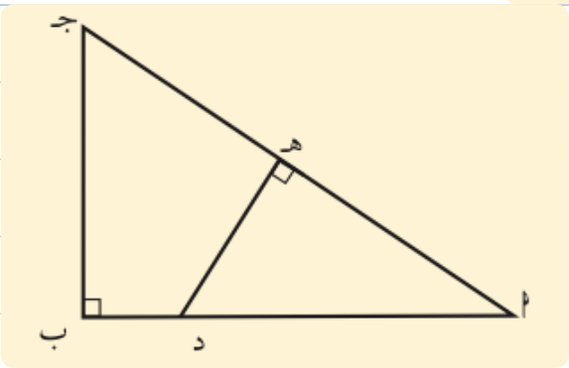
في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أب جـ، د هـ و.



أثبت أن المثلثين أب د ، أجـ ب متشابهان. اكتب عبارة التشابه.



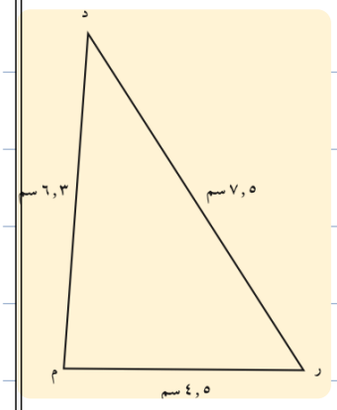
في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أب جـ، أهـ د، واكتب عبارة التشابه.

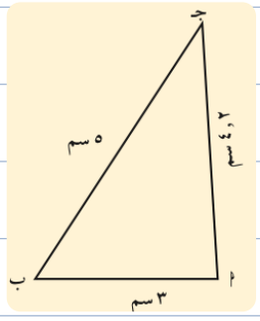


نظرية (٢) **يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.**

في الشكل المقابل، (أ) أثبت تشابه المثلثين أب جـ، م ر د ،

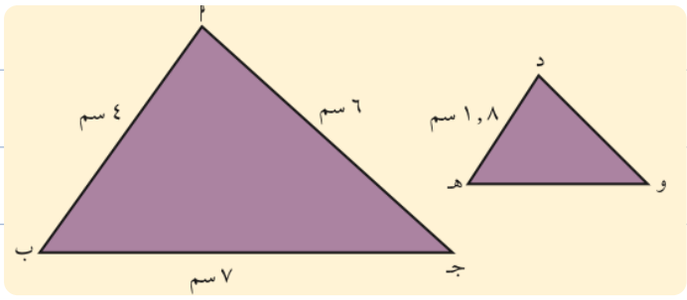
(ب) اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.





في الشكل المقابل المثلثان أب جـ ، د هـ و متشابهان.

أوجد طول كل من $\overline{\text{دو}}$ ، $\overline{\text{وهـ}}$.



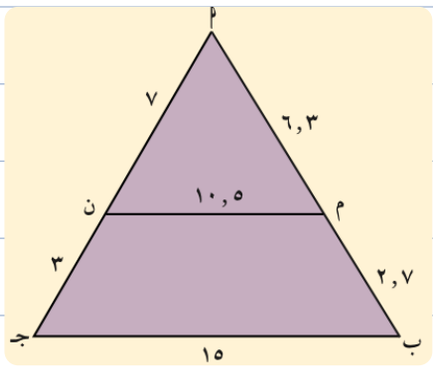
في الشكل المرسوم،

أولًا: أثبت أن:

أ Δ أ ب جـ ~ Δ أ م ن.

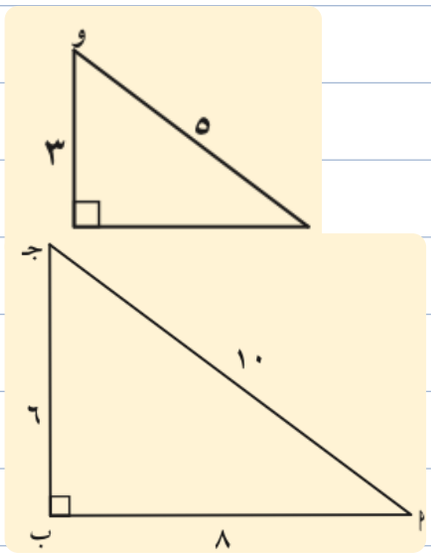
ب $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين



في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

ثم أوجد العلاقة بين نسبة مساحتي المثلثين ونسبة التشابه.

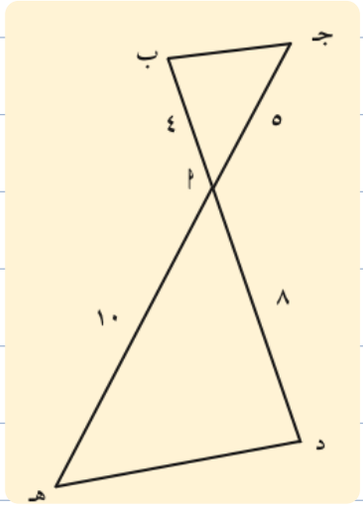


عبد السلام البيومي

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

في الشكل المقابل $\overline{\text{ب د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{أ}\}$ ، أثبت أنّ المثلثين أ ب جـ، أ د هـ متشابهان.

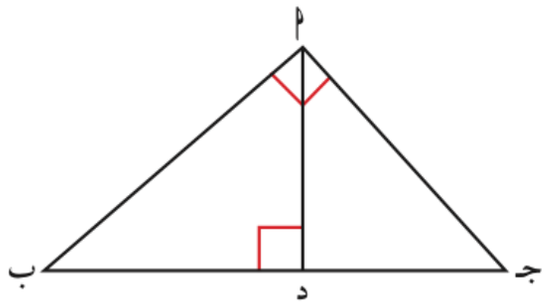


عبد السلام البيومي

التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

نظرية (١) العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

نتيجة (١) مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.



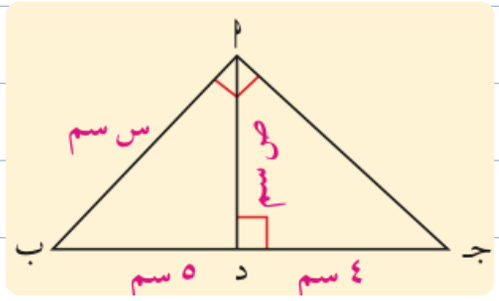
$(\text{أد})^{٢} = \text{ب د} \times \text{جـ د}$

$(\text{أب})^{٢} = \text{ب د} \times \text{ب جـ}$

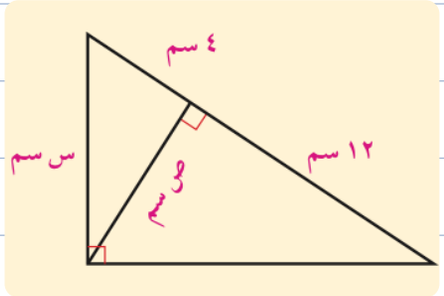
$(\text{أجـ})^{٢} = \text{جـ د} \times \text{جـ ب}$

$\text{أب} \times \text{أجـ} = \text{أد} \times \text{ب جـ}$

أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.



أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.

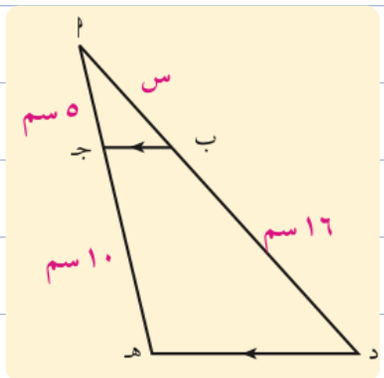


التناسبات والمثلثات المتشابهة

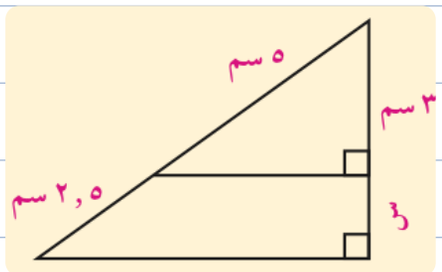
نظرية (١)

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.



في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.



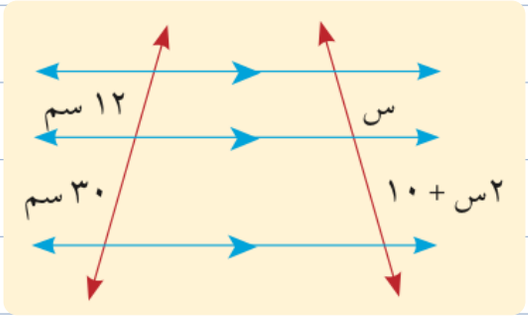
عبد السلام البيومي

نظرية طاليس

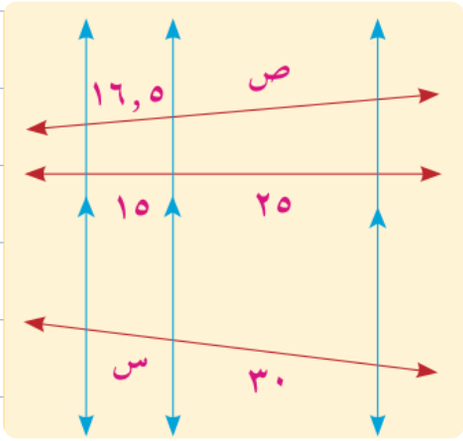
نظرية (٢)

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

من الشكل المقابل أوجد قيمة س.



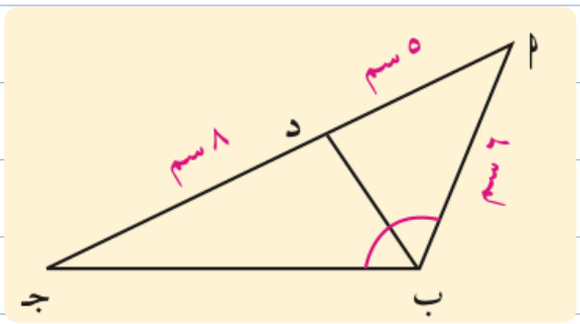
أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط صورة.



نظرية (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

أوجد جـ ب في الشكل المبيّن حيث $\overline{\text{ب د}}$ ينصف $\hat{\text{أ ب جـ}}$.



٥ أ ب جـ مثلث حيث أ ب = ٦ سم، أ جـ = ٨ سم، ثم رسم $\overleftarrow{\text{أ د}}$ منصف $\hat{\text{ب أ جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د. إذا كان ب د = ٣ سم، أوجد جـ د.

عبد
السلام
البيومي

الوحدة الخامسة
الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)

بيّن في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

لتكن الدالة ت : {١، ٢، ٣، ٤} ← ح حيث ت(ن) = ن^{٣} + ١

٣ لتكن ت: ص$_{+}$ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{ن}{ن + ١}$.
بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

عبد السلام البيومي

المتتالية الحسابية

تعريف:

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ء. وعلى ذلك $\text{ح}_{\text{ن}+١} - \text{ح}_{\text{ن}} = \text{ء}$ أو $\text{ح}_{\text{ن}+١} = \text{ح}_{\text{ن}} + \text{ء}$.

بين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.

١ هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.

أ المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)

ب المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)

إذا كان $ح_١ = ٥$، $ء = ٧$ في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحد النوني للمتتالية الحسابية

$$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ء$$

$$ء = \frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك} : ن \neq ك$$

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (٨، ٦، ٤، ...).

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.

ب أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ... ، ٤٧).

في المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٧ن - ٣$ لكل $ن \in ص_+$، أثبت أن المتتالية حسابية.

في المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٣ن + ٥$: $ن \in ص_+$ أثبت أن المتتالية حسابية.

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥، فأوجد أساس المتتالية.

إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي −٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

عبد السلام البيومي

الأوساط الحسابية

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح (أعداد حقيقية): $ب = \frac{أ + جـ}{٢}$

إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.

أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين -٩، ٣.

ب أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١

مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية

مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية ($ح_ن$) يعطى بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$$

أو

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)د]$$

حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_١$.

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول -١٢ وحدها العاشر ٢٤.

متتالية حسابية حدها الأول -٧ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًّا منها.

ب أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ٠٠٠، ٩٥).

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتاليّة الهندسيّة: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًّا ثابتًا غير صفري،

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = ر$ حيث $ح_{ن} \neq ٠$.

لكل ن $\in$ صـ$_{+}$، ر عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio

لتكن (ح$_{ن}$) متتالية حيث ح$_{ن}$ = ٣^{ن}.

أ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (ح$_{ن}$).

ب أثبت أن (ح$_{ن}$) متتالية هندسية.

أثبت أن المتتالية (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = (٢)^{ن}، هي متتالية هندسية.

الحد النوني للمتتالية الهندسية

$$ح_{ن} = ح_{ك} \times ر^{ن - ك}$$

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.

متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$. اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى منها.

متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

(ح) متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨.
أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

عبد السلام البيومي

الأوساط الهندسية بين عددين

إذا كوَّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ ومنه $ب^{٢}$ = أجـ

∴ ب = ± $\sqrt{أجـ}$.

٥ أوجد وسطًا هندسيًّا بين العددين في كل ما يلي:

أ −٣ ، −٧٢

ب ٢٠ ، ٨٠

جـ ٣ ، ١٨,٧٥

أدخل خمسة أوساط هندسيّة موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.

أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤

مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية

قانون

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \dots + ح_ن$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١ $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن ح_١$

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).

أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...)

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي $\frac{٨}{٩}$. أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية $\left(٤، \blacksquare، ١، \blacksquare، \frac{١}{٤}، \ldots\right)$