ثانوية سلمان الفارسي
قسم الرياضيات

الصف الثانى عشر علمى
الفصل الدراسى الثانى
الوحدة السادسة
نسخة محلولة

M.ATA

2023

(1 – 6) المساحات فى المستوى

المساحات

دالة واحدة $f(x)$

فترة واحدة $[a,b]$

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

فترتين $[a,b],[b,c]$

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$$

دالتين $g(x), f(x)$

فترة واحدة $[a,b]$

$$A=\left|\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$

فترتين $[a,b],[b,c]$

$$A=\left|\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل $[a,b]$ يمكن حساب المساحة على الحاسبة مباشرة

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

دالة واحدة f (x)   فترة واحدة [a,b]

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a\,,b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a\,,b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \;,\; x = b$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)\,dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

مثال (2)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحـل

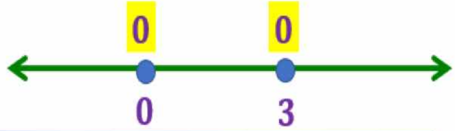
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$x^2 - 3x = 0$ MOD53

إما $x = 0$ أو $x = 3$



2) فترات التكامل : $[0,3]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_0^3 f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 3.\frac{1}{2}x^2\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}(3)^3 - 3.\frac{1}{2}(3)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - 3.\frac{1}{2}(0)^2\right]\right| = 4.5$$

وحدة مربعة

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

الحـل

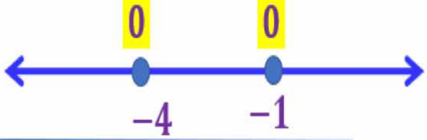
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات:

بوضع :

$$f(x) = 0$$
$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

MOD53

إما $x = -4$ أو $x = -1$



2) فترات التكامل : $[-4, -1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-4}^{-1} (x^2+5x+4)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 + 5.\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{-1}\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{3}(-1)^3+5.\frac{1}{2}(-1)^2+4(-1)\right]-\left[\frac{1}{3}(-4)^3+5.\frac{1}{2}(-4)^2+4(-4)\right]\right| = 4.5$$

وحدة مربعة

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

مثال (1)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

ومحور السينات والمستقيمين $x = 2 \ , \ x = 5$

الحـل

الحـــل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط نقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \text{MOD53}$$

$$x = 2 \qquad 2 \notin (2,5)$$

2) فترات التكامل : $[2,5]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_2^5 f(x)\,dx\right| = \left|\int_2^5 (x^2 - 4x + 4)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 4.\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_2^5\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_2^5\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}(5)^3 - 2(5)^2 + 4(5)\right] - \left[\frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 4(2)\right]\right|$$

$$= \left|\frac{35}{3} - \frac{8}{3}\right| = 9$$ **وحدة مربعة**

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_2^5 |x^2 - 4x + 4| \ dx = 9$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

دالة واحدة f (x) | **فترتين [a,b],[b,c]**

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c\in(a,b)$ حيث $f(c)=0$
فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^2+4-4x$
ومحور السينات والمستقيمين $x=4$, $x=-1$

الحـل

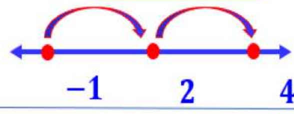
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

$f(x)=0$

$x^2-4x+4=0$ MOD53

$x=2$ $2\in(-1,4)$

بوضع :



2) فترات التكامل : $[-1,2]$, $[2,4]$

3) المساحة :

$$A=\left|\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{4} f(x)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{2}(x^2-4x+4)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{4}(x^2-4x+4)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-\cancel{4}.\frac{1}{\cancel{2}}x^2+4x\right]_{-1}^{2}\right|+\left|\left[\frac{1}{3}x^3-\cancel{4}.\frac{1}{\cancel{2}}x^2+4x\right]_{2}^{4}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2^3}{3}-2(2)^2+4(2)\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2+4(-1)\right]\right|+\left|\left[\frac{4^3}{3}-2(4)^2+4(4)\right]-\left[\frac{2^3}{3}-2(2)^2+4(2)\right]\right|$$

$$=\frac{35}{3}$$ **وحدة مربعة**

$$A=\int_{-1}^{4}\left|x^2-4x+4\right|\,dx=\frac{35}{3}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

لايوجد مستحيل

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \ , \ \frac{3}{2}\right]$

الحـل

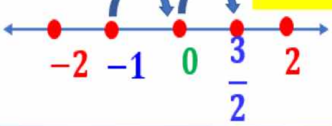
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$x^3 - 4x = 0$ MOD54

إما $x = 0 \in (-1, \frac{3}{2})$ أو $x = -2 \notin (-1, \frac{3}{2})$ أو $x = 2 \notin (-1, \frac{3}{2})$



2) فترات التكامل : $[-1,0] \ , \ \left[0, \frac{3}{2}\right]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x) \ dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x) \ dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\cancel{\frac{0^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{4(-1)^2}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{(\frac{3}{2})^4}{4} - \frac{4(\frac{3}{2})^2}{2}\right] - \left[\cancel{\frac{0^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}}\right]\right| = 4.98$$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x^3 - 4x| \ dx = 4.98$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$

الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$$f(x) = 0$$
$$x^3 - 9x = 0$$

MOD54

إما $x = 0 \ \in (-2,1)$ أو $x = -3 \ \notin (-2,1)$ أو $x = 3 \ \notin (-2,1)$

$-3 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3$

2) فترات التكامل : $[-2,0]\ ,\ [0,1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)\ dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 9x)\ dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 9.\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 9.\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|\cancel{\left[\frac{0^4}{4} - \frac{9(0)^2}{2}\right]} - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9(-2)^2}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{1^4}{4} - \frac{9(1)^2}{2}\right] - \cancel{\left[\frac{0^4}{4} - \frac{9(0)^2}{2}\right]}\right|$$

$$= 18.25$$ **وحدة مربعة**

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_{-2}^{1} |x^3 - 9x|\ dx = 18.25$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

ثق في نفسك

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{2}\right]$

الحـل

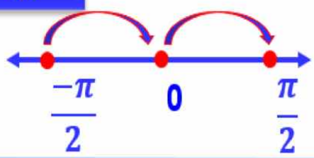
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط نقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$\sin x = 0$ Shift sin(0)

$x = 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



2) فترات التكامل : $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right] \, , \, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx\right|$$

$$= \left|[-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|[-\cos 0] - \left[-\cos\frac{-\pi}{2}\right]\right| + \left|\left[-\cos\frac{\pi}{2}\right] - [-\cos 0]\right|$$

$$= |-1 - 0| + |0 - (-1)|$$

$$= 2$$ **وحدة مربعة**

الالة الحاسبة(راديان)

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx = 2$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \, , \, \pi]$

الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

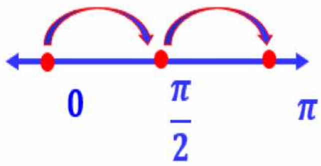
بوضع :

$f(x) = 0$

$\cos x = 0$ Shift cos(0)

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$



2) فترات التكامل : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \, , \, \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx\right|$$

$$= \left|[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\left[\sin\frac{\pi}{2}\right] - [\sin 0]\right| + \left|[\sin \pi] - \left[\sin\frac{\pi}{2}\right]\right|$$

$$= |1 - 0| + |0 - 1|$$

$$= 2$$ وحدة مربعة

الالة الحاسبة(راديان)

باستخدام الالة الحاسبة:

$A = \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx = 2$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

كن طموح وحقق اهدافك

دالتين $f(x), g(x)$ | فترة واحدة $[a,b]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من f , g متصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

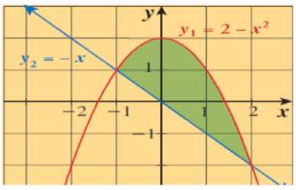
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)dx \right|$$

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$



الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$y_1 = y_2$$
$$-x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

MOD53

إما $x = 2$ أو $x = -1$

0 0
-1 2

2) فترات التكامل : $[-1, 2]$

3) المساحة :

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)dx \right| = \left| \left[2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[2(2) - \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[2(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2\right] \right|$$

$$= \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-1}^{2} |2 - x^2 - (-x)| \; dx = \frac{9}{2}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

حاول أن تحل

6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x+5 \quad , \quad y_1 = x^2+2$

الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$y_1 = y_2 \Longrightarrow x^2+2 = -2x+5$$

$$x^2+2+2x-5=0 \Longrightarrow x^2+2x-3=0$$

MOD53

0 0

-3 1

إما $x=-3$ أو $x=1$

2) فترات التكامل : $[-3,1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-3}^{1}(y_1-y_2)dx\right| = \left|\int_{-3}^{1}(x^2+2-(-2x+5))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3+2.\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{-3}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}(1)^3+2.\frac{1}{2}(1)^2-3(1)\right]-\left[\left[\frac{1}{3}(-3)^3+2.\frac{1}{2}(-3)^2-3(-3)\right]\right]\right|$$

$$= \frac{32}{3}$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_{-3}^{1}\left|x^2+2-(-2x+5)\right| dx = \frac{32}{3}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 9$

الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 9$

$x^2 + 1 + x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0$

إما $x = -2$ أو $x = 2$

بوضع :

MOD53   0   0

$-2 \quad 2$

2) فترات التكامل : $[-2, 2]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} (x^2 + 1 - (-x^2 + 9))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)dx\right| = \left| \left[2.\frac{1}{3}x^3 - 8x\right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[2.\frac{1}{3}(2)^3 - 8(2)\right] - \left[\left[2.\frac{1}{3}(-2)^3 - 8(-2)\right)\right] \right|$$

$$= \frac{64}{3}$$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-3}^{1} \left|x^2 + 1 - (-x^2 + 9)\right| \; dx = \frac{64}{3}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

نحن من نصنع مصائرنا

حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

الحـل

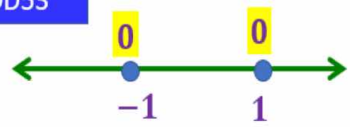
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow -2x^2 + 2 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 1 + 2x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

MOD53



إما $x = -1$ أو $x = 1$

2) فترات التكامل : $[-1, 1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2 - (x^2 - 1))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{-1} (3x^2 - 3)dx\right| = \left|\left[\cancel{3}.\frac{1}{\cancel{3}}x^3 - 3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|[(1)^3 - 3(1)] - [[(-1)^3 - 3(-1))]\right|$$

$= 4$ وحدة مربعة

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-3}^{1} \left|-2x^2 + 2 - (-x^2 - 1)\right| \, dx = 4$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

دالتين f(x), g(x) فترتين [a,b],[b,c]

مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g حيث:

$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$

الحـل

معلق

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقا

بوضع :

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 1 = x - 1$

$x^3 - 1 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0$ MOD54

إما $x = 0$ أو $x = -1$ أو $x = 1$

$-1 \quad 0 \quad 1$

2) فترات التكامل : $[-1,0] \ , \ [0,1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\, dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^2\right] - \left[\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^2\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{2}(1)^2\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^2\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-3}^{1} \left|x^3 - 1 - (x - 1)\right| \, dx = \frac{1}{2}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

حاول أن تحل

8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$$

الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

معلق

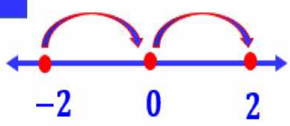
بوضع :

$$f(x) = g(x) \implies 1 - x^3 = -4x + 1$$

$$-4x + 1 - 1 + x^3 = 0 \implies x^3 - 4x = 0$$

MOD54

إما $x = 0$ أو $x = -2$ أو $x = 2$



2) فترات التكامل : $[-2,0]$, $[0,2]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\, dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (f(x) - g(x))\, dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$= \left|\cancel{\left[\frac{1}{4}(0)^4 - 4.\frac{1}{2}(0)^2\right]} - \left[\frac{1}{4}(-2)^4 - 4.\frac{1}{2}(-2)^2\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{4}(2)^4 - 4.\frac{1}{2}(2)^2\right] - \cancel{\left[\frac{1}{4}(0)^4 - 4.\frac{1}{2}(0)^2\right]}\right|$$

$= 8$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-2}^{2} |1 - x^3 - (-4x + 1)|\, dx = 8$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$

الحـل

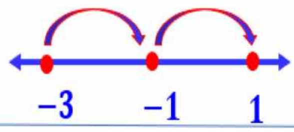
معلق

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع : $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 - x = 3 - 3x^2$

$x^3 - x - 3 + 3x^2 = 0 \Longrightarrow \underline{x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0}$ MOD54

إما $x = -3$ أو $x = -1$ أو $x = 1$



2) فترات التكامل : $[-3,-1] \ , \ [-1,1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x))\ dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\ dx\right|$$

$$= \left|\int_{-3}^{-1} (x^3+3x^2 - x - 3)\ dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \cancel{3}\frac{1}{\cancel{3}}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \cancel{3}.\frac{1}{\cancel{3}}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 3(-1)\right] - \left[\frac{1}{4}(-3)^4 - (-3)^3 - \frac{1}{2}(-3)^2 - 3(-3)\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{4}(1)^4 - (1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 - 3(1)\right] - \left[\frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 3(-1)\right]\right|$$

$= 8$ وحدة مربعة

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-3}^{1} \left|x^3 - x - (-3 - 3x^2)\right|\ dx = 8$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

حاول أن تحل

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $g(x)=\frac{x}{2}$ ، $f(x)=\sqrt{x}$

والمستقيمين $x=9$ ، $x=0$

الحـل

معلق

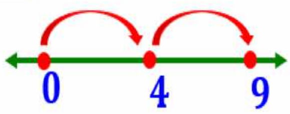
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x)=g(x) \Longrightarrow \sqrt{x}=\frac{x}{2} \xrightarrow{\text{بتربيع الطرفين}} (\sqrt{x})^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{x}{1}=\frac{x^2}{4} \Longrightarrow x^2=4x \Longrightarrow x^2-4x=0 \quad \text{MOD53}$$

إما $x=0 \notin (0,9)$ أو $x=4 \in (0,9)$



2) فترات التكامل : $[0,4]$, $[4,9]$

3) المساحة :

$$A=\left|\int_0^4 (f(x)-g(x))\,dx\right| + \left|\int_4^9 (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

$$A=\left|\int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right)dx\right|+\left|\int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right)dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^4\right|+\left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_4^9\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}-\frac{0^2}{4}\right]\right|+\left|\left[\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}-\frac{9^2}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{4}\right]\right|$$

$=4.917$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A=\int_0^9 \left|\sqrt{x}-\left(\frac{x}{2}\right)\right|\,dx=4.917$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

دالتين f , g غير متقاطعتين

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=e^{x}$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=-1-x^{2}$
والمستقيمين $x=3$, $x=0$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين f,g غير متقاطعين.

الحـل

1) f , g دالتين غير متقاطعتين في الفترة [0,3] ∴

2) فترات التكامل : $[0,3]$

3) المساحة :

$$A=\left|\int_{0}^{3}(f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_{0}^{3}(e^{x}-(-1-x^{2}))\,dx\right|$$

$$=\left|\int_{0}^{3}(e^{x}+1+x^{2})\,dx\right|=\left|\left[e^{x}+x+\frac{1}{3}x^{3}\right]_{0}^{3}\right|$$

$$=\left|\left[e^{3}+3+\frac{1}{3}(3)^{3}\right]-\left[e^{0}+0+\frac{1}{3}(0)^{3}\right]\right|$$

$$=\left|\left[e^{3}+12\right]-[1]\right|$$

$$=e^{3}+11$$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A=\int_{0}^{3}\left|e^{x}-(-1-x^{2})\right|\,dx=31.08$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = -x^2 - 3$

والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

الحـل

1) $\because$ f , g دالتين غير متقاطعتين في الفترة $[-1,1]$

2) فترات التكامل : $[-1, 1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}(x^2 + 1 - (-x^2 - 3))\, dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1}(x^2+1 + x^2 + 3)dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}(2x^2+4)\, dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}(1)^3+4(1)\right] - \left[\frac{2}{3}(-1)^3+4(-1)\right]\right|$$

$$= \frac{28}{3}$$ وحدة مربعة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \int_{-1}^{1}\left|x^2 + 1 - (-x^2 - 3)\right|\, dx = \frac{28}{3}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [0\,,1]$

الحـل

1) $\because f(x) > g(x) \ \forall x \in [0,1]$

$\therefore$ $f\ ,\ g$ دالتين غير متقاطعتين في الفترة $[0,1]$

2) فترات التكامل : $[0,1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2+2 - \sqrt[3]{x})\ dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (x^2+2 - x^{\frac{1}{3}})\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}(1)^3+2(1) - \frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}}\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) - \frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}}\right]\right|$$

$= \dfrac{19}{12}$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_0^1 \left|x^2 + 2 - (\sqrt[3]{x})\right|\ dx = \frac{19}{12}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

حاول أن تحل

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^2+3$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=x^2+1$ والمستقيمين $x=-1$, $x=1$ علمًا بأن: $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[-1,1]$

الحل

(1 $\because f(x)>g(x)\ \forall x\in[-1,1]$

$\therefore$ f , g دالتين غير متقاطعتين في الفترة $[-1,1]$

(2 فترات التكامل : $[-1,1]$

(3 المساحة :

$$A=\left|\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_{-1}^{1}[x^2+3-(x^2+1)]dx\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{1}[x^2+3-x^2-1]\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{1}2\,dx\right|$$

$$=2\,(1-(-1))$$

$=4$ وحدة مربعة

$$\int_a^b k\,dx=k(b-a)$$

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A=\int_{-1}^{1}\left|x^2+3-(x^2+1)\right|\,dx=4$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

اشكر ثلاث اشخاص غدا

(2 – 6) حجوم الاجسام الدورانية

الحجوم

فترة واحدة $[a,b]$

دالة واحدة $f(x)$

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2 \; dx$$

فترة واحدة $[a,b]$

دالتين $g(x), f(x)$

$$V=\pi\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right] dx$$

$f(x)\ge g(x)\ge 0$ **حيث** $f(x)\le g(x)\le 0$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل $[a,b]$ يمكن حساب الحجم على الحاسبة مباشرة

دالة واحدة $f(x)$

$$V=\pi\left|\int_a^b (f(x))^2 \; dx\right|$$

دالتين $g(x), f(x)$

$$V=\pi\left|\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right] dx\right|$$

ملحوظة : مسائل الحجوم تكون علي فترة واحدة فقط

دالة واحدة f (x)

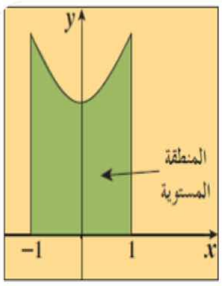
إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

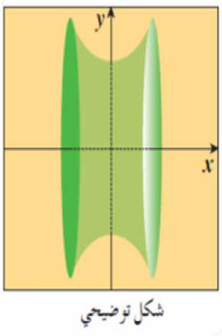
$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

الحـل





شكل توضيحي

1) فترة التكامل : $[-1,1]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4) \; dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + 4.\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{5}(1)^5 + 4.\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)\right] - \left[\frac{1}{5}(-1)^5 + 4.\frac{1}{3}(-1)^3 + 4(-1)\right]\right)$$

$$= \frac{166}{15}\pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)^2 \; dx = \frac{166}{15}\pi$$

ملحوظة: مربع الدالة داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

ابتسم للحياة

حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

الحـل

1) فترة التكامل : $[1, 5]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_{1}^{5} (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{1}^{5} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{1}^{5} (x-1) \quad dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{5}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{2}(5)^2 - 5\right] - \left[\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right] \right)$$

$= 8\pi$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \quad dx = 8\pi$$

ملحوظة: مربع الدالة داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

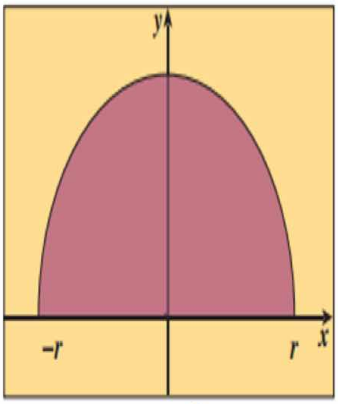
تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

ساصير يوما ما ما اريد

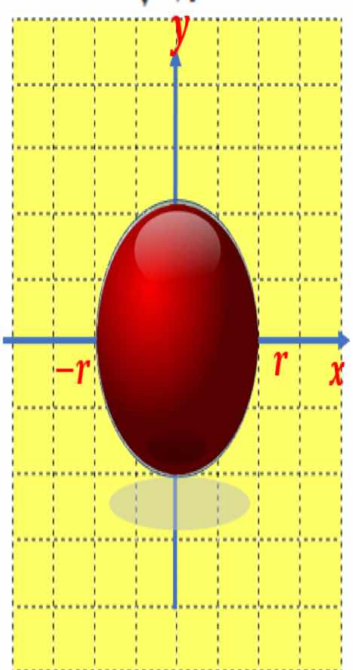
مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

الحـل



شكل توضيحي



تمثل معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها r $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة نصف قطرها r

1) فترة التكامل : $[-r, r]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (y)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \pi \left(\left[r^2(r) - \frac{1}{3}(r)^3\right] \boxed{-} \left[r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3\right]\right)$$

$$= \pi \left(\left[r^3 - \frac{1}{3}r^3\right] - \left[-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right]\right)$$

$$= \pi r^3 \left(\left[1 - \frac{1}{3}\right] - \left[-1 + \frac{1}{3}\right]\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$ وحدة مكعبة

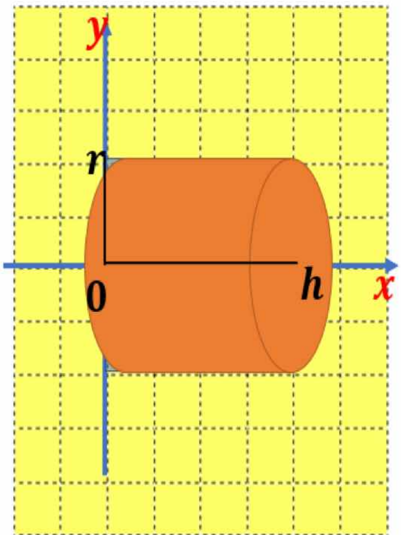
احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

الحـل

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو أسطوانة طول نصف قطرها r وارتفاعها h



1) فترة التكامل : $[0, h]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^h (r)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^h r^2\,dx$$

$$= \pi \left[r^2 x \right]_0^h$$

$$= \pi \left[r^2 h - r^2 (0) \right]$$

$= \pi r^2 h$ وحدة مكعبة

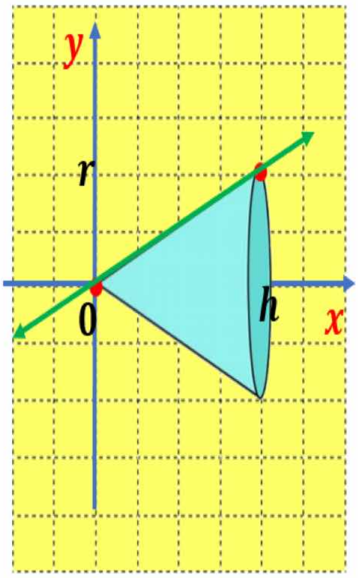
في لفظ القمة شيء يقول لك قم

باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.
(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x)=\frac{r}{h}x$ في الفترة $[0,h]$)

الحـل

معلق

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دور [illegible] خروط دائري طول نصف قطره r وارتفاعه h



1) فترة التكامل : $[0,h]$

$$V=\pi\int_0^h (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$$

$$=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}.x^2\,dx=\pi.\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx$$

$$=\pi.\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\pi.\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{3}0^3\right]$$

$$=\pi.\frac{r^2}{h^2}.\frac{1}{3}h^3=\frac{1}{3}\pi\ r^2\ h$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}\pi\ r^2\ h}$$ وحدة مكعبة

تعود على العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

دالتين f(x), g(x)

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين $x = a , x = b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a , b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

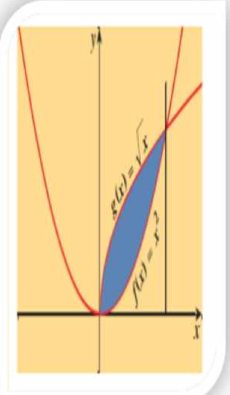
حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين

$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} : g$

الحـل



1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x}$ بتربيع الطرفين $x^4 = x$

$x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$ mod54

إما $x = 0$ أو $x = 1$

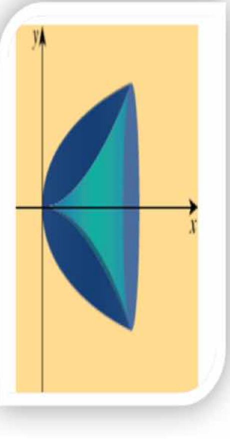
2) فترة التكامل : $[0, 1]$

3) القيمة الاختيارية:

نأخذ قيمة اختيارية $x = 0.5 \in (0 , 1)$

$g(0.5) = \sqrt{0.5} \approx 0.71 \qquad f(0.5) = 0.5^2 = 0.25$

$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$



4) الحجم :

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) \, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{5}(1)^5\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{5}(0)^5\right]\right)$$

$$= \frac{3}{10}\pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \pi \int_0^1 \left|(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right| dx = \frac{3}{10} \pi$$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

حاول أن تحل

3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \quad , \quad g(x)=\frac{x}{2}+2$$

الحـل

1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2 \xrightarrow{\text{بالضرب في } 2} x^2+2=x+4$$

$$x^2+2-x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \quad \text{mod53}$$

إما $x=-1$ أو $x=2$

2) فترة التكامل : $[-1,2]$

3) القيمة الاختيارية: نأخذ قيمة اختيارية $(-1,2) \ni 0 = x$

$$g(0)=0+2=2 \qquad f(0)=0+1=1$$

$$g(x)\ge f(x)\ge 0 \quad \forall x\in[-1,2]$$

4) الحجم :

$$V=\pi\int_{-1}^{2}[(g(x))^2-(f(x))^2]dx=\pi\int_{-1}^{2}[(\frac{x}{2}+2)^2-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2]\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}[\frac{x^2}{4}+2x+4-(\frac{x^4}{4}+x^2+1)]dx=\pi\left[\frac{1}{4}.\frac{1}{3}x^3+2.\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{1}{4}.\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\pi\left(\left[\frac{1}{12}(2)^3+(2)^2+4(2)-\frac{1}{20}(2)^5-\frac{1}{3}(2)^3-(2)\right]-\left[\frac{1}{12}(-1)^3+(-1)^2+4(-1)-\frac{1}{20}(-1)^5-\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)\right]\right)$$

$$=\frac{81}{10}\pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A=\pi\int_{-1}^{2}\left|\left(\frac{x}{2}+2\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2\right|dx=\frac{81}{10}\pi$$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

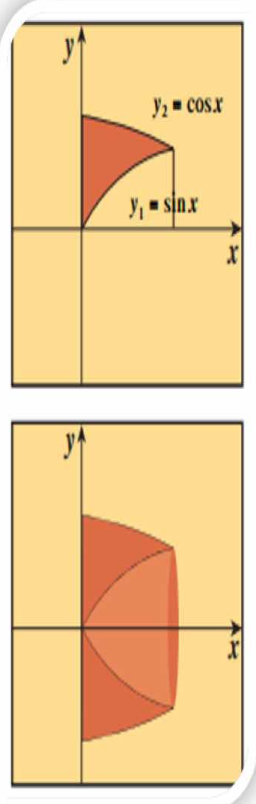
مثال (4)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $y_1 = \sin x$ ، $y_2 = \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

الحـل

معلق

1) فترة التكامل : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$



2) القيمة الاختيارية: نأخذ قيمة اختيارية $x = 0.3 \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

$y_1(0.3) = sin(0.3) = 0.296$ $\qquad$ $y_2(0.3) = cos(0.3) = 0.955$

$y_2 \geq y_1 \geq 0 \quad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

3) الحجم :

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(y_2)^2 - (y_1)^2]\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [cos^2 x - sin^2 x]\, dx$$

$cos^2 x - sin^2 x = \cos 2x$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos 2x)\, dx = \pi \left[\frac{1}{2} sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{2} sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} sin(2 \times 0)\right]\right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

$= \frac{1}{2}\pi$ وحدة مكعبة

الالة الحاسبة(راديان)

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|(cos\, x)^2 - (sin\, x)^2\right| dx = \frac{1}{2}\pi$$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

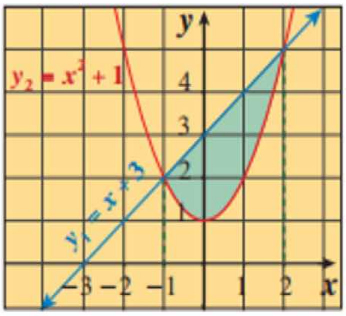
تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

تستطيع ان تفعلها

حاول أن تحل

4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين: $y_1 = x + 3 \ , \ y_2 = x^2 + 1$

الحـل



1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$y_1 = y_2$$

$$x + 3 = x^2 + 1 \Longrightarrow x^2 + 1 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{mod53}} \text{إما } x = -1 \text{ أو } x = 2$$

2) فترة التكامل : $[-1, 2]$

3) القيمة الاختيارية: نأخذ قيمة اختيارية $x = 0 \in (-1,2)$

$$y_1(0) = 0 + 3 = 3 \qquad y_2(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 \ge y_2 \ge 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

4) الحجم :

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(y_1)^2 - (y_2)^2]dx = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] \ dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} [x^2 + 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1)]dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 6.\frac{1}{2}x^2 + 9x - \frac{1}{5}x^5 - 2.\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 9(2) - \frac{1}{5}(2)^5 - 2.\frac{1}{3}(2)^3 - (2)\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9(-1) - \frac{1}{5}(-1)^5 - 2.\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right] \right)$$

$$= \frac{117}{5}\pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \pi \int_{-1}^{2} \left|(x+3)^2 - (x^2+1)^2\right| dx = \frac{117}{5}\pi$$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

كراسة التمارين

أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات المحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$y = x \ , \ y = 1 \ , \ x = 0$

الحـل

1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع : **بوضع :**

$y_1 = y_2$

$x = 1$

2) فترة التكامل : $[0, 1]$

3) القيمة الاختيارية: نأخذ قيمة اختيارية $x = 0.6 \in (0,1)$

$y_2(0.6) = 1$ $\quad$ $y_1(0.6) = 0.6$

$y_2 \geq y_1 \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

4) الحجم :

$$V = \pi \int_0^1 [(y_2)^2 - (y_1)^2] \ dx = \pi \int_0^1 [(1)^2 - (x)^2] \ dx$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - x^2) \ dx = \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\left[1 - \frac{1}{3}(1)^3 \right] - \left[0 - \frac{1}{3}(0)^3 \right] \right) = \frac{2}{3}\pi$$ وحدة مكعبة

$y = \sqrt{x} \ , \ y = 0 \ , \ x = 4$

الحـل

$y = 0$ هي معادلة محور السينات

معلوم احد المستقيمان الرأسيان $x = 4$

نوجد المستقيم الآخر

$y_1 = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$

1) فترة التكامل : $[0, 4]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_0^4 (y)^2 \ dx$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \ dx$$

$$= \pi \int_0^4 x \ dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{2}(4)^2 \right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 \right] \right) = 8\pi$$ وحدة مكعبة

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

(3 – 6) طول القوس

طول القوس

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$$

1) نوجد $f'(x)$ ← نوجد المشتقة

2) نوجد $\left(f'(x)\right)^2$ ← تربيع

3) تعويض بالقانون $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$

4) اختيار احدى طرق التكامل لإيجاد قيمة التكامل المحدد يمكن استخدام هذه الطريقة

يمكن استخدام هذه الطريقة لحل معظم المسائل

$$\int (ax+b)^n\ dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+c$$

M ATA

(3 – 6) طول القوس

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

مثال (1)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0 , 4]$

الحـل

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

حاول أن تحل

1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3 , 8]$

الحـل

الامال العظيمة تصنع الاشخاص العظماء

مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0 , 6]$

الحـل

بالسؤال يتعلم الانسان

حاول أن تحل

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2 , 5]$

الحـل

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

كراسة التمارين

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f ، $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ في الفترة $[1,2]$.

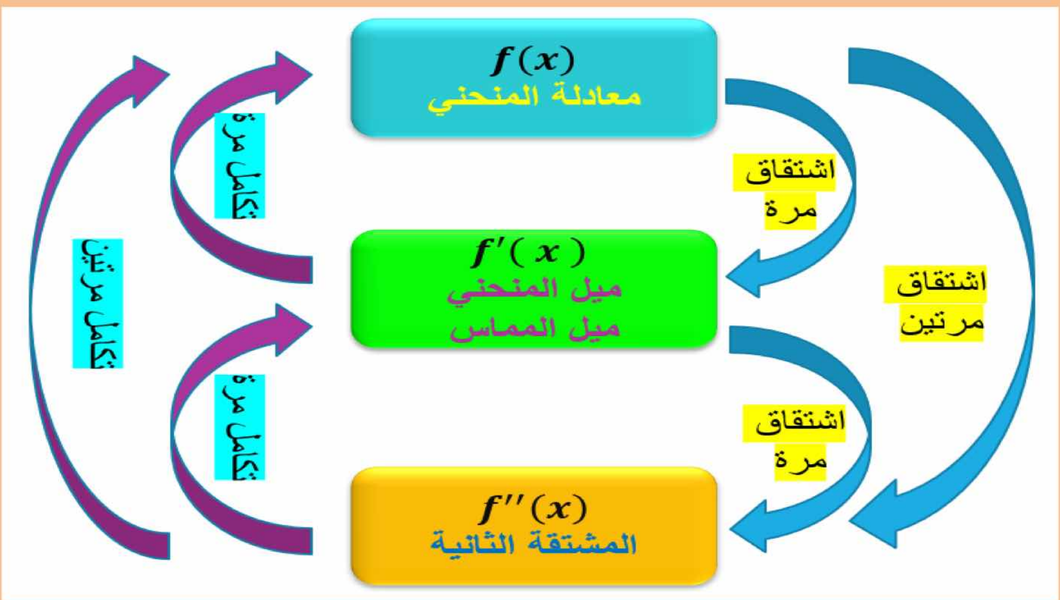
الحـل

معلق

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

(3 – 6) معادلة منحنى دالة

معادلة المنحنى



الحالة الاولى

بمعلومية:

$f'(x)$، نقطة (a,b)

خطوات الحل

تكامل مرة واحدة

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

نستخدم $f(a)=b$ لإيجاد الثابت

ثم معادلة المنحني

الحالة الثانية

بمعلومية:

ميل العمودي ، نقطة (a,b)

$\frac{-1}{\text{ميل العمودي على المنحنى}} = f'(x)$ ميل المنحني

خطوات الحل

تكامل مرة واحدة

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

نستخدم $f(a)=b$ لإيجاد الثابت

ثم معادلة المنحني

الحالة الثالثة

بمعلومية:

$f''(x)$، نقطة حرجة (a,b)

خطوات الحل

تكامل مرتين

$f'(x)=\int f''(x)\,dx$

نستخدم $f'(a)=0$ لإيجاد الثابت C_1

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

نستخدم $f(a)=b$ لإيجاد الثابت C_2

ثم معادلة المنحني

M ATA

(3 – 6) معادلة منحنى دالة

مثال (3)

$f'(x)$

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1, 2)$

المطلوب

الحالة الاولي

الحـل

ميل المنحني :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$f(x) = 3.\frac{1}{3}x^3 - 4.\frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

الدالة تمر بالنقطة (2 , 1)A

$$f(1) = 2$$

$$(1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C = 2$$

Shift solve

$$\boxed{C = 2}$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل

$f'(x)$

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

المطلوب

الحـل

الحالة الاولى

ميل المنحني :

$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = \int (-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4)dx$$

$$f(x) = -8.\frac{1}{4}x^4 + 3.\frac{1}{3}x^3 - 2.\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + C$$

الدالة تمر بالنقطة A(-1 , -5)

$$f(-1) = -5$$

$$-2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + C = -5$$

Shift solve

$$\boxed{C = 3}$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

تستيطيع ان تفعلها مهما كانت

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

المطلوب

الحـل

الحالة الثانية

ميل العمودي : $\sqrt{5-4x}$

ميل المماس : $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{5-4x}}$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}dx = \int \frac{-1}{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$f(x) = \int -(5-4x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$f(x) = -1 \times \frac{1}{-4} \times \frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

الدالة تمر بالنقطة A(-5 , 3)

$$f(-5) = 3$$

$$\frac{1}{2}(5-4(-5))^{\frac{1}{2}} + C = 3$$

Shift solve

$$\boxed{C = \frac{1}{2}}$$

معادلة المنحنى هي : $f(x) = \dfrac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}$

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

حاول أن تحل

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) هو $2x-1$ فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1 , 0)$

المطلوب

الحـل

الحالة الثانية

ميل العمودي :

ميل المماس :

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x-1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x-1}\,dx$$

$$f(x) = -1 \times \frac{1}{2} \times ln|2x-1| + C$$

$$f(x) = -0.5\, ln|2x-1| + C$$

الدالة تمر بالنقطة B(1 , 0)

$$f(1) = 0$$

$$-0.5\, ln|2(1)-1| + C = 0$$

Shift solve

$$C = 0$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = -0.5\, ln|2x-1|$$

وفقك الله دائما

مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $(-1 \,,\, 15)$ نقطة حرجة للدالة.

المطلوب

الحـل

الحالة الثالثة

معلق

A(-1,

$$f(-1) = 15$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

تكامل اول مرة

$$f'(x) = \int (6x-6)\ dx$$

$$f'(x) = 6.\frac{1}{2}x^2 - 6x + C_1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + C_1$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3(-1)^2 - 6(-1) + C_1 = 0$$

Shift solve

$$C_1 = -9$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

يتبع

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

تكامل ثاني مرة

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x - 9)\ dx$$

$$f(x) = 3.\frac{1}{3}x^3 - 6.\frac{1}{2}x^2 - 9x + C_2$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C_2$$

$$f(-1) = 15$$

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + C_2 = 15$$

Shift solve

$$C_2 = 10$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

حاول أن تحل

6 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2\ ,\ -2)$ نقطة حرجة للدالة.

المطلوب

الحالة الثالثة

الحـل

معلق

P(2, -2

$f(2) = -2$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6$$

تكامل ثاني مرة

$$f(x) = \int \left(\frac{5}{2}x^2 - 2x - 6\right)\ dx$$

$$f(x) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 6x + C_2$$

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + C_2$$

$f(2) = -2$

$$\frac{5}{6}(2)^3 - 2^2 - 6(2) + C_2 = -2$$

Shift solve

$$C_2 = \frac{22}{3}$$

معادلة المنحنى هي : $f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$

$f'(2) = 0$

$$f''(x) = 5x - 2$$

تكامل اول مرة

$$f'(x) = \int (5x - 2)\ dx$$

$$f'(x) = 5.\frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x + C_1$$

$f'(2) = 0$

$$\frac{5}{2}(2)^2 - 2(2) + C_1 = 0$$

Shift solve

$$C_1 = -6$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6$$

يتبع

لايوجد مستحيل

(4 ـ 6) المعادلات التفاضلية

تعريف (1)
المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.
تستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)
رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)
درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

تدريب:
أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$	الرتبة الأولى	الدرجة الأولى
$y'^2 = \frac{4x}{y}$	الرتبة الأولى	الدرجة الثانية
$y'' = 5y' + xy$	الرتبة الثانية	الدرجة الأولى
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$	الرتبة الثانية	الدرجة الثانية
$y''' = (y')^2 + x^3$	الرتبة الثالثة	الدرجة الأولى

مثال (1) أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

الحل

$$y = e^{x^2}$$
$$y' = e^{x^2}(\cancel{\ln e})(2x)$$
$$y' = 2x\ e^{x^2}$$

الطرف الأيسر $= y' - 2\,x\,y$

$= 2x\,e^{x^2} - 2\,x\,e^{x^2} = 0$

الطرف الأيمن $= 0$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

الدالة $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة $y' - 2\,x\,y = 0$

حاول أن تحل 1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

الحل

$$y = 2e^{3x} + 1$$
$$y' = 2\,e^{3x}\,(\cancel{\ln e})(3) + 0$$
$$y' = 6\ e^{3x}$$

الطرف الأيسر $= y' + 3 = 6\,e^{3x} + 3$

الطرف الأيمن $= 3y = 3(2e^{3x} + 1) = 6e^{3x} + 3$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

الدالة $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة $y' + 3 = 3y$

المعادلات التفاضلية

y' في الطرف الأيسر بمفردها

الحالة الاولى

y' دالة في x

$y' = f(x)$

حل المعادله:

$y = \int y'\,dx$

تكامل مرة

$y'' = f(x)$

حل المعادله:

$y' = \int y''\,dx$

تكامل مرتين

الحالة الثانية

y' دالة في y

$y' = a\,y + b$

حل المعادله:

$a \neq 0$
$b \neq 0$

$y = k\,e^{ax} + \frac{b}{a}$

$a \neq 0$
$b = 0$

$y = k\,e^{ax}$

الحالة الثالثة

y' دالة في $x\,,y$

$y' = f(x).h(y)$

ترتيب الخطوات

$$\frac{dy}{dx} = f(x).h(y)$$

ثم فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{h(y)} = f(x)\,dx$$

باخذ تكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int f(x)\,dx$$

نكمل الحل بالطريقه العاديه

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$ ، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحالة الاولى

الحـل

$$y' = 3x^2 - 1$$

الحل (تكامل مرة)

$$y = \int (3x^2 - 1)\ dx$$

$$y = 3.\frac{1}{3}x^3 - x + C$$

$$y = x^3 - x + C$$

$y = 2$ عند $x = 1$

SHIFT SOLVE

$$2 = (1)^3 - (1) + C$$

$$C = 2$$

حل المعادلة هو :

$$y = x^3 - x + 2$$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$ ، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

الحالة الاولى

الحـل

$$y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$$

الحل (تكامل مرة)

$$y = \int (8x^3 - 3x^2 + 4)\ dx$$

$$y = 8.\frac{1}{4}x^4 - 3.\frac{1}{3}x^3 + 4x + C$$

$$y = 2x^4 - x^3 + 4x + C$$

$y = 5$ عند $x = 1$

SHIFT SOLVE

$$5 = 2(1)^4 - (1)^3 + 4(1) + C$$

$$C = 0$$

حل المعادلة هو :

$$y = 2x^4 - x^3 + 4x$$

حاول ان تصنع النجاح

مثال (7)

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

الحالة الاولى

الحل

$$y'' = 3x^2 - 2x$$

الحل (تكامل مرتين)

$$y' = \int (3x^2 - 2x)\ dx$$

$$y' = 3.\frac{1}{3}x^3 - 2.\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y' = x^3 - x^2 + C_1$$

$$y = \int (x^3 - x^2 + C_1)\ dx$$

حل المعادلة هو :

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

الحالة الاولى

الحل

$$y'' = -3x^2 + 6x$$

الحل (تكامل مرتين)

$$y' = \int (-3x^2 + 6x)\ dx$$

$$y' = -3.\frac{1}{3}x^3 + 6.\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y' = -x^3 + 3x^2 + C_1$$

$$y = \int (-x^3 + 3x^2 + C_1)\ dx$$

حل المعادلة هو :

$$y = \frac{-1}{4}x^4 + 3.\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحالة الثانية

الحـل

$$2y' + y = 1$$

$$2y' = -y + 1$$ بالقسمة علي 2

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$ بطرف y'

$$a = -\frac{1}{2} \quad , \quad b = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \div \frac{-1}{2} = -1$$

$$y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y = k\,e^{\frac{-1}{2}x} - (-1)$$

$y = 2$ عند $x = -1$

$$2 = k\,e^{\frac{-1}{2}(-1)} + 1 \Rightarrow 2 - 1 = k\,e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 = k\,e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = k \Rightarrow k = e^{\frac{-1}{2}}$$

حل المعادلة هو : $y = e^{\frac{-1}{2}}\ e^{\frac{-1}{2}x} + 1$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

الحالة الثانية

الحـل

$$3y' - 2y = 4$$

$$3y' = 2y + 4$$ بالقسمة علي 3

$$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$$ بطرف y'

$$a = \frac{2}{3} \quad , b = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \div \frac{2}{3} = 2$$

$$y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y = k\,e^{\frac{2}{3}x} - 2$$

$y = 3$ عند $x = 0$

$$3 = k\,e^{\frac{2}{3}(0)} - 2 \Rightarrow 3 + 2 = k\,e^{0} \Rightarrow k = 5$$

حل المعادلة هو : $y = 5\,e^{\frac{2}{3}x} - 2$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (5) أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

الحالة الثانية

الحـل

y' بطرف

$$y' = 4y$$

$$a = 4 \quad , b = 0$$

$$y = k\, e^{ax}$$

$$y = k\, e^{4x}$$

$y = 2$ عند $x = 0$

$$2 = k\, e^{4(0)} \Rightarrow 2 = k$$

حل المعادلة هو :

$$y = 2\, e^{4x}$$

حاول أن تحل 5 أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

الحالة الثانية

الحـل

y' بطرف

$$y' = -2y$$

$$a = -2 \quad , b = 0$$

$$y = k\, e^{ax}$$

$$y = k\, e^{-2x}$$

$y = 3$ عند $x = 0$

$$3 = k\, e^{-2(0)} \Rightarrow 3 = k$$

حل المعادلة :

$$y = 3\, e^{-2x}$$

اذا لم تجد طريق اصنع واحدا

مثال (4) حل المعادلة التفاضلية: (a) $y' - 2xy = 0$

الحالة الثالثة

الحـل

y' بطرف

$$y' = 2\,x\,y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,y$$

فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = 2\,x\,dx$$

باخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\,x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$|y| = e^{x^2+c}$$

$$|y| = e^{x^2}.\,e^{c}$$

نضع $k = \pm e^{c}$

$$y = \pm e^{c}.\,e^{x^2}$$

حل المعادلة هو :

$$y = k\,e^{x^2}$$

الياس ليس من شيم الابطال

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحالة الثالثة

الحـل

y' بطرف

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

باخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$ln|y| = 2ln|x| + c$$

$$|y| = e^{2ln|x|+c}$$

$$|y| = e^{2ln|x|}.\, e^{c}$$

$$y = \pm e^{c}.\, e^{2ln|x|}$$

نضع $k = \pm e^{c}$

حل المعادلة هو :

$$y = k\, e^{2ln|x|}$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

(1 - 6) المساحات فى المستوى

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \;,\; x = b$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ — (a) ☺

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ — ☺ (b)

(3) إذا كانت: $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ — ☺ (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$ ، $x = 3$. فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^3 f(x)\,dx$ — (a) ☺

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة — (a) ☺

في التمارين (10—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2
(c) 3π units^2 ☺ $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$ ☺ $-2\int_0^2 g(x)\,dx$
(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

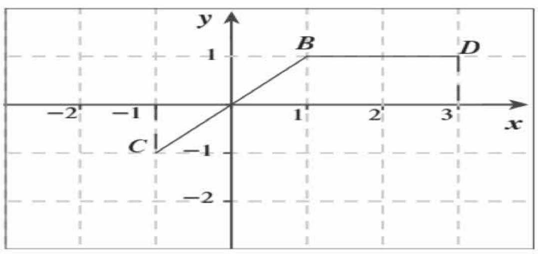
(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2
☺ $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

(9) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = x + 2$ هي:

معلق

☺ $\pi - 2$ units^2 (b) π units^2
(c) $\pi + 2$ units^2 (d) 2 units^2

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = -1 \;,\; x = 3$ هي:



☺ 3 units^2 (b) 4 units^2 (c) 2 units^2 (d) 5 units^2

(2 – 6) حجوم الاجسام الدورانية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V=\pi\int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2\,dx$ (a)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_0^4 4x\,dx-\pi\int_0^1 4x\,dx$ (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ هو: $V=\pi\int_0^2 \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$ (a)

(4) حجم المجسم ال... دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة

معلق

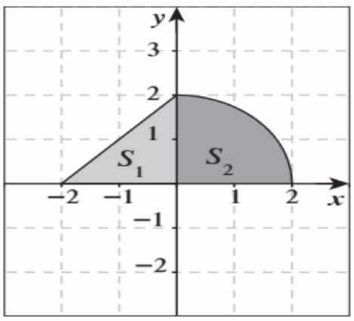
بم... $f($ ... ومنحنى الدالة g : $g(x)=8$, $x=0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h: $h(x)=-8$, $x=0$ (b)

في التمارين (5–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 18π (d) 81π

(6) المنطقة المظللة $S=S_1\cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.



حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4+2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=-\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ والمستقيمات $x=1$, $x=2$, $y=0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x+1}$ والمستقيمين $x = 3$, $x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

(10) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $= 0$ معلق ـدالة f : $f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 16π 8π (d) 2π

(11) حجـ معلق ـران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين

$\sqrt{x}$

(a) $\int_0^4 \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ (b) $\pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right) dx$ (c) $\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$ $\pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$

(12) حجـ الـ معلق ـوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y = \sqrt{x}$

و

(a) $\frac{64\pi}{15}$ units^3 (b) $\frac{32\pi}{15}$ units^3 (c) $\frac{64\pi}{5}$ units^3 $\frac{8\pi}{3}$ units^3

(3 – 6) طول القوس

(3 – 6) معادلة منحنى دالة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,1]$ هو $L = \frac{2}{3}$ وحدة طول.

(a) (b)

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: x^3+2 ويمر بالنقطة $A(2,6)$ معادلته: $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 2$

(a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{3}$

(a) (b)

(4) لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

(a) (b)

في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

(a) 7 units (b) 6 units (c) 5 units (d) 1 unit

(6) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = x - 3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

(a) $\sqrt{2}$ units (b) $2\sqrt{2}$ units (c) $3\sqrt{2}$ units (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{2} + 3x - 4$ (b) $\ln|3-x| + 3$ (c) $-\frac{x^2}{2} + 3x + 4$ (d) $3 - \ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x - 3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

(a) $x^2 + 2\sqrt{x^3} - 2$ (b) $x^2 - 2\sqrt{x^3}$ (c) $x^2 - 2\sqrt{x^3} - 2$ (d) $\frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x^3} + 2$

(9) إذا ... A نقطة حرجة لمنحنى الدالة f : $f''(x) = 12x - 6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى لل...

معلق

(a) $B(-2,0)$ (b) $B(0,-2)$ (c) $B(1,-1)$ (d) $B(1,1)$

(4 – 6)المعادلات التفاضلية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ ، $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a)

(4) إذا كان $y = 1$, عند $x = 0$, $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a)

(5) إذا كان $y'' + 2y' + 2y = 0$ فإن $y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{-x}$ معـلـق (b)

(6) إذا كان $y'' + y = 0$ فإن $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ معـلـق (b)

(7) إذا كان $y'' - y = 0$ فإن $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ معـلـق (b)

في التمارين (14—8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

$y = x^2 - 3$

(a) $y = x^2 + 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x$

$y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

$y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$

(12) إذا كان $y'' - 3y' + 2y = 0$ فإنّ: معـلـق

(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

(a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

(d) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

(c) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل