نماذج أجابة أسئله أمتحان تقييمى ثانى

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

حلل المقام

$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$

اصفار المقام $\Rightarrow$ 0 ، $-\frac{1}{2}$ ، 3

بالضرب في $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2-2 = A(2x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(2x+1) \qquad 1$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$-2 = A(2(0)+1)(0-3) + \cancel{B(0)} + \cancel{C(0)} \qquad A = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-0.5$

$$(-0.5)^2-2 = \cancel{A(0)} + B(-0.5)(-0.5-3) + \cancel{C(0)} \qquad B = -1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=3$

$$(3)^2-2 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(3)(2(3)+1) \qquad C = \frac{1}{3}$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$A = \frac{2}{3}$

$B = -1$

$C = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

(2)

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

حلل المقام $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$

اصفار المقام: 0 ، 1 مكرر

الأصفار	0	1	1
المقامات	x	$x-1$	$(x-1)^2$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2-4x+1 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$ 1

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$1 = A(0-1)^2+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)}$$ A= 1

بالتعويض في 1 بـ $x=1$

$$4(1)^2-4(1)+1 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(1)$$ C = 1

بالتعويض في 1 بـ $x=2, A=1, C=1$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و A, C من الحل

$$4(2)^2-4(2)+1 = (1)(2-1)^2+B(2)(2-1)+(1)(2)$$ B = 3

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

A = 1 ، B = 3 ، C = 1

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx+\int \frac{3}{x-1}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}+C$$

(3)

حلل المقام

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

$$x^3+4x^2 = x^2\,(x+4)$$

اصفار المقام: 0 مكرر ، -4

الأصفار	0	0	-4
المقامات	x	x^2	$x+4$

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2 \quad (1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$0^2+1 = \cancel{A(0)} + B(0+4) \cancel{+C(0)} \qquad B = \frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$

$$(-4)^2+1 = \cancel{A(0)} \cancel{+B(0)} + C(-4)^2 \qquad C = \frac{17}{16}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1\,,\,B=\frac{1}{4}\,,\,C=\frac{17}{16}$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و $B\,,C$ من الحل

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2 \qquad A = \frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$A = \frac{-1}{16}$

$B = \frac{1}{4}$

$C = \frac{17}{16}$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

(4)

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$$

∵ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \quad \longleftarrow \text{ناتج القسمة} \\ \hline x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -\ (x^2-4x+4) \\ \hline & x+3 \quad \longleftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2+3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

(5)

بأستخدام القسمه المطولة:

A)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore \quad A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore \quad A_1 = 9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

B)

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore \quad A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore \quad A_2 = -2$

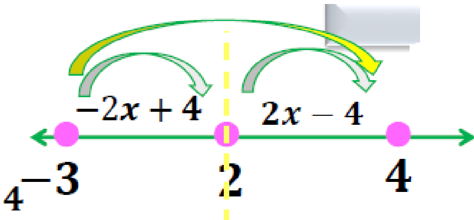
$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

(6)

$$\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$$



$$2x-4=0$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$\int_{-3}^{2} |2x-4|\ dx + \int_{2}^{4} |2x-4|\ dx =$$

$$\int_{-3}^{2} (-2x+4)\ dx + \int_{2}^{4} (2x-4)\ dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^2}{2}+4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2}-4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= \left[-x^2+4x\right]_{-3}^{2} + \left[x^2-4x\right]_{2}^{4} =$$

$$[-(2)^2+4(2)] - [-(-3)^2+4(-3)] + [4^2-4(4)] - [2^2-4(2)]$$

$$= 29$$

(7)

$$\boxed{\int_{-2}^{3} (x|x| + 3)\, dx}$$

$$= \int_{-2}^{0} (x|x| + 3)\ dx + \int_{0}^{3} (x|x| + 3)\ dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2 + 3) dx\ +\ \int_{0}^{3} (x^2 + 3) dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x\right]_{0}^{3}$$

$$= -\left[\frac{8}{3} - 6\right] + [9 + 9 - 0]$$

$$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21,3333$$

(8)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

الحل:

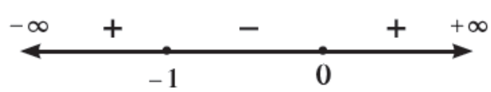
بفرض $f(x) = x^2 + x$

وهي دالة متصلة على $[3,5]$

نضع

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$



$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$\because \quad [3,5] \subseteq [0, \infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3,5]$

$\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

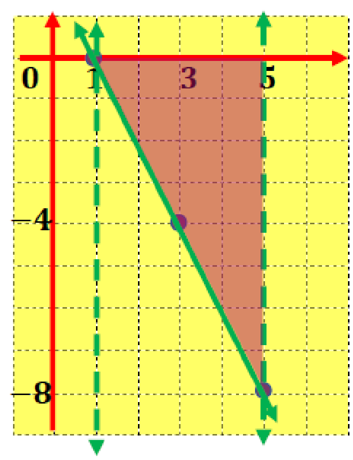
(9)

أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x)dx$ بيانيًّا.

$\because f(x) = 2 - 2x$

x	1	3	5
$f(x)$	0	-4	-8

$f(x) \leq 0 \quad \forall \ x \in [1, 5]$



$\int_1^5 f(x)dx =$ سالب مساحة المنطقة المثلثة

سالب نصف طول القاعدة ضرب الإرتفاع

$$= -\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = -16$$

(10)

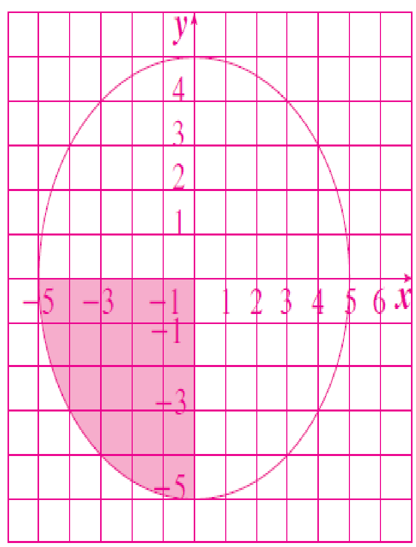
$y = -\sqrt{25 - x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25 - x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$



(11)

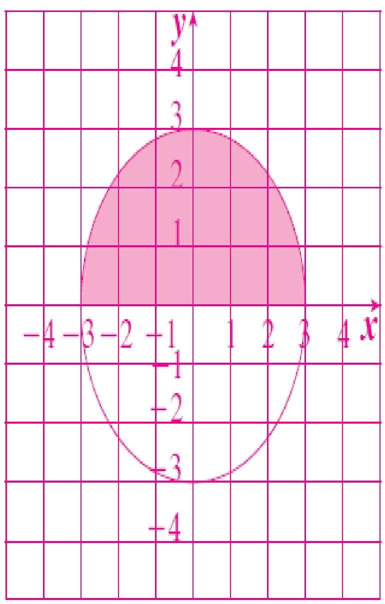
$y=\sqrt{9-x^2} \ \therefore\ y^2=9-x^2 \ \therefore\ y^2+x^2=9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y=\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore\ \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\pi(3)^2=\frac{9}{2}\pi$



(12)

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$$

بأستخدام الكسور الجزئيه:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+2)}$$

$$4 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$$

عوّض عن x بـ -2 $\quad \therefore \quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 2 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x+2|\right]_{-1}^{1} = -2\ln 3$$

(13)

بأستخدام الكسور الجزئيه:

$$\boxed{\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx}$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$5x-1 = A(x+3) + B(x-1)$$

عوض عن $\xrightarrow{x=1}$ $4 = 4A$ $\xrightarrow{\text{ينتج}}$ $A = 1$

عوض عن $\xrightarrow{x=-3}$ $-16 = -4B$ $\xrightarrow{\text{ينتج}}$ $B = 4$

$$= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{4}{(x+3)}\right) dx$$

$$= [\ln|x-1|]_{-2}^{0} + 4ln[|x+3|]_{-2}^{0}$$

$$= 3\ln 3$$

(14)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \ \ dx$$

$u = \tan x \ \Rightarrow du = \sec^2 x \ dx$

$u = \tan(0) = 0 \qquad \Leftarrow \quad x = 0$ عندما

$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad \Leftarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$ عندما

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \ \ dx = \int_0^1 u \ \ du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

(15)

$$\boxed{\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\quad dx = \int_1^e \frac{(\ln\ x)^6}{x}\ dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\ dx$$

$$x \xrightarrow{=} e \qquad u \xrightarrow{=\ln e} 1$$

$$x \xrightarrow{=} 1 \qquad u \xrightarrow{=\ln 1} 0$$

$$\int_0^1 u^6\ du$$

$$\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(16)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \overset{u}{x}\ \overset{dv}{sec^2x\ dx} =$$

نحل كتكامل غير محدد بالتجزيء
ثم وضع حدود التكامل بعد الحصول على الحل النهائي

نفرض أن

تفاضل	تكامل
$u = x$	$dv = sec^2x\ dx$
$du = dx$	$v = tan\,x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x\ sec^2x\ dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$

$$= x\tan x + ln|cosx| + C$$

$$\int tanx\,dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx$$

$u = cosx$
$du = -sinx\,dx$
$-du = sinx\,dx$

$$\int tanx\,dx = \int -\frac{1}{u}du$$

$$= -ln|u| + C$$

$$= -ln|cosx| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ sec^2x\ dx = [xtanx + ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}tan\frac{\pi}{4} + ln\left|cos\frac{\pi}{4}\right|\right] - [(0)tan(0) + ln|cos(0)|]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}(1) + ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right] - [\cancel{(0)}(0) + \cancel{ln}|1|] = \frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(17)

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$$

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 3 \qquad x = -3$$

$$0 \in (-2, 1) \qquad 3 \notin (-2, 1) \qquad -3 \notin (-2, 1)$$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x)dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 9x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9}{2}(-2)^2\right] \right| + \left| \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{9}{2}(1)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2\right] \right| = \frac{73}{4} \text{ square units}$$

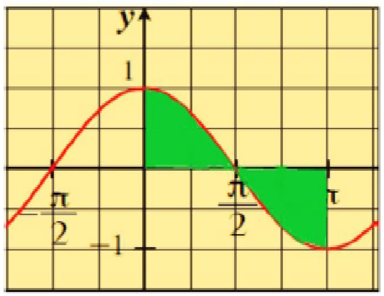
(18)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \,,\, \pi]$

الحل :

نرسم منحنى الدالة f



نلاحظ أنه في الفترة $[0,\pi]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx \right|$$

$$= \left| [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (\sin x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin(\frac{\pi}{2})\right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \right| = 2 \quad \textit{square units}$$

(19)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x$ ، والمستقيمين $x = 8$, $x = 1$.

الحل :

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$$x = \sqrt[3]{x}$$

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = -1$ $\quad$ $x = 1$

$0 \notin (1,8)$ $\quad$ $-1 \notin (1,8)$ $\quad$ $1 \notin (1,8)$

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(1,8)$ و لتكن $x = 3$

$f(3) = 3$, $g(3) = \sqrt[3]{3} \cong 1.44$

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [1,8]$$

تابع للحل :

$$A = \int_1^8 (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_1^8 (x - \sqrt[3]{x})dx$$

$$= \int_1^8 \left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)dx$$

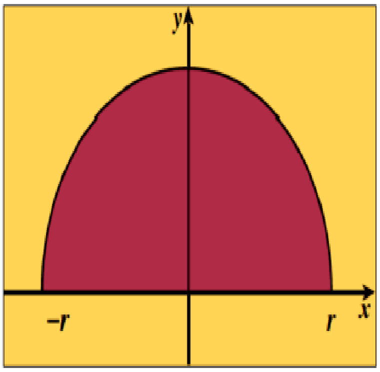
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8$$

$$= [\frac{(8)^2}{2} - \frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}}] - [\frac{(1)^2}{2} - \frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}}] = 20.25 \qquad units\ \ square$$

ملاحظة : يمكن الحل باستخدام القيمة المطلقة .

<u>(20)</u>

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة



شكل توضيحي

حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

الحل :

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ و طول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left(\left[r^2(r) - \frac{1}{3}(r)^3 \right] - \left[r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right] \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ cubic units}$$

(21)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

الحل :

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2} - (5)\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - (1)\right]\right)$$

$$= 8\pi \quad cubic\ units$$

(22)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين

$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$: g

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

نحصل على: $x = 0 \;,\; x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \;,\; -3 < 0$$

$\because$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{(x)})^2 - (x^2)^2]dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

(23)

أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$y_1 = \sqrt{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 4$

الحل : نضع $y_2 = g(x)$, $y_1 = f(x)$

نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0$$

حدود التكامل $x = 0\,, x = 4$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(0,4)$ و لتكن $x = 1$

$f(1) = \sqrt{1} = 1$ ، $g(1) = 0$

$f(x) \ge g(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0\,,4]$

$$V = \pi \int_0^4 \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right)dx = \pi \int_0^4 \left((\sqrt{x})^2 - (0)^2\right)dx$$

$$= \pi \int_0^4 (x)dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\left(\left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]\right) = 8\pi \quad units\ \ cube$$

(24)

اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+1\ ,\ g(x)=\frac{x}{2}+2$$

الحل : نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$$

$$\frac{x^2}{2}+1-\frac{x}{2}-2=0$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-1=0$$

$$x=2\ ,\qquad x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1,2)$ و لتكن $x=0$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{2}+1=1$$

$$g(0)=\frac{(0)}{2}+2=2$$

$$g(x)\geq f(x)\geq o \quad \forall\, x\ \in[-1\,,2\,]$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}((g(x))^2-(f(x))^2)dx=\pi\int_{-1}^{2}((\frac{x}{2}+2)^2-(\frac{x^2}{2}+1)^2)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right))dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(\frac{x^2}{4}+2x+4-\frac{x^4}{4}-x^2-1)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+2x+3)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{4}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\pi(\left[-\frac{32}{20}-2+4+6\right]-\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+1-3\right])$$

$$=\frac{81}{10}\pi\ cubic\ units$$