بنك الأسئلة

الإحصاء

الصف الثاني عشر أدبي

مدرسة التميز النموذجية

(ابتدائي - متوسط - ثانوي)

12
أدبي

2022/ 2023

الفصل الدراسي الثاني

الرياضيات والاحصاء

مدرسة التميز النموذجية

(أ) عند القاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين ، اذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن "عدد الكتابات" فأوجد :

(١) فضاء العينة (ف).

(٢) مدى المتغير العشوائي س.

(٣) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س

(٤) التوقع μ للمتغير العشوائي س.

الحل :

(١) فضاء العينة (ف)= { (ص ،ص) ،(ص ،ك)، (ك ،ص) ،(ك ،ك) }

(٢) مدى المتغير العشوائي س = { ٠ ، ١ ، ٢ }

(٣) د(٠) = $\frac{١}{٤}$ ، د(١) = $\frac{١}{٢}$ ، د(٢) = $\frac{١}{٤}$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

(٤) التوقع $\mu = \sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

= ٠ × $\frac{١}{٤}$ + ١ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ × $\frac{١}{٤}$

= ٠ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

تراعى الحلول الاخرى

(ب) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين ،
ليكن المتغير العشوائي سـ يعبر عن " عدد الكتابات "
فأوجد ما يلي :

(١) فضاء العينة
(٢) مدى المتغير العشوائي سـ

الحل :

(١) فضاء العينة (ف) = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

(٢)

عناصر فضاء العينة	عدد الكتابات في كل عنصر
(ص ، ص)	٠
(ص ، ك)	١
(ك ، ص)	١
(ك ، ك)	٢

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ }

(أ) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,١	٠,٢	٠,١٥	٠,٠٥

أوجد :

(١) التوقع (μ)

(٢) التباين (σ^2)

(٣) الانحراف المعياري (σ)

الحل :

(١) التوقع (μ) = $\sum$ سر د(سر)

= ١×٠,٥ +٢×٠,١ + ٣×٠,٢ + ٤×٠,١٥ +٥×٠,٠٥

= ٢,١٥

(٢) التباين (σ^2) = $\sum$ س^{2}ر د(سر) - μ^2

=(١)^2×٠,٥ +(٢)^2×٠,١ + (٣)^2×٠,٢ + (٤)^2×٠,١٥ +(٥)^2×٠,٠٥ - (٢,١٥)^2

= ٦,٣٥ – ٤,٦٢٢٥ = ١,٧٢٧٥

(٣) الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$

= $\sqrt{١,٧٢٧٥}$ = ١,٣١٤٣

تراعى الحلول الاخرى

(ب) يبين الجدول التالي دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,١	٠,٣	٠,٥	٠,١

أوجد : ١) التوقع (μ).

٢) التباين (σ^2).

٣) الانحراف المعياري (σ)

الاجابة

١) التوقع (μ) = $\sum$ سر د (سر)

= ٢ × ٠,١ + ٣ × ٠,٣ + ٤ × ٠,٥ + ٥ × ٠,١

= ٠,٢ + ٠,٩ + ٢ + ٠,٥

= ٣,٦

٢) التباين = $\sum$ سر^2 د (سر) - μ^2

= $(٢)^2$ × ٠,١ + $(٣)^2$ × ٠,٣ + $(٤)^2$ × ٠,٥ + $(٥)^2$ × ٠,١ - $(٣,٦)^2$

= ١٣,٦ - ١٢,٩٦

= ٠,٦٤

٣) الانحراف المعياري(σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{٠,٦٤}$

≈ ٠,٨

(ب) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س

س	٣	٤	٥
د (س)	٠,٥	٠,٣	٠,٢

أوجد : ت (٣) ، ت (٤,٥) ، ت (٥)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س

الحل:

ت (٣) = ل (س ≤ ٣) = ل (س < ٣) + ل (س = ٣)

= ل (س < ٣) + د (٣)

= ٠ + ٠,٥ = ٠,٥

ت (٤,٥) = ل (س ≤ ٤,٥)

= د (٤,٥) + د (٤) + د (٣)

= ٠ + ٠,٣ + ٠,٥ = ٠,٨

ت (٥) = ل (س ≤ ٥)

= د (٥) + د (٤) + د (٣)

= ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٥ = ١

(ب) الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع سـ:

س	١-	٣	٥	٧
ت(س)	٠,١	٠,٤٥	٠,٧	١

أوجد :

(١) ل(٣ < سـ ≤ ٧)

(٢) ل(سـ > ٥)

الحل :

(١) ل(٣ < سـ ≤ ٧) = ت(٧) − ت(٣)

= ١ − ٠,٤٥

= ٠,٥٥

(٢) ل(سـ > ٥) = ١ − ل(سـ ≤ ٥)

= ١ − ت(٥)

= ١ − ٠,٧

= ٠,٣

(أ) يبين الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع س

س	١	٢	٣	٥
ت(س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٦	١

أوجد : (١) ل(٢ < س ≤ ٥)

(٢) ل(س > ٣)

الاجابة

١) ل (٢ < س ≤ ٥) = ت (٥) - ت (٢)

= ١ - ٠,٢

= ٠,٨

٢) ل (س > ٣) = ١ - ل(س ≤ ٣)

= ١ - ت (٣)

= ١ - ٠,٦

= ٠,٤

إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا ودالة كثافة الإحتمال له هي:

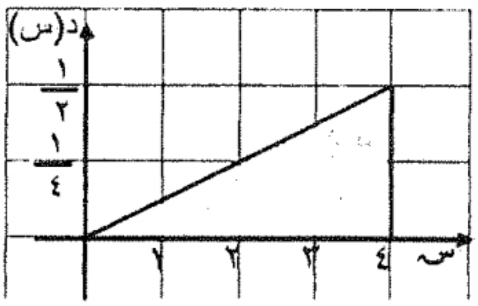
$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} س & : \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \\ \text{صفر} & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

١) ل (٠ ≤ س ≤ ٤)

٢) ل (س < ٢)

٣) ل (س = ١)



الاجابة

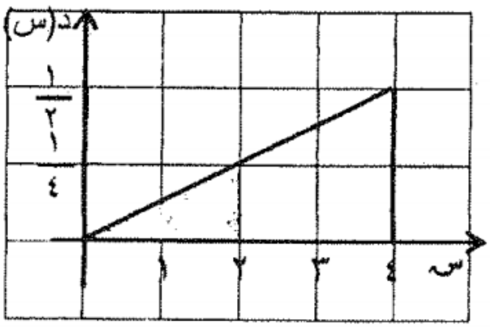
١) نرسم بيان الدالة د (س)

ل (٠ ≤ س ≤ ٤) = مساحة المنطقة المظللة

(مساحة المنطقة المثلثة)

$$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٢}$$

$$= ١$$



٢) ل (س < ٢) = مساحة المنطقة المظللة

= ل (س ≤ ٢)

$$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١}{٤}$$

٣) ل (س = ١) = صفر

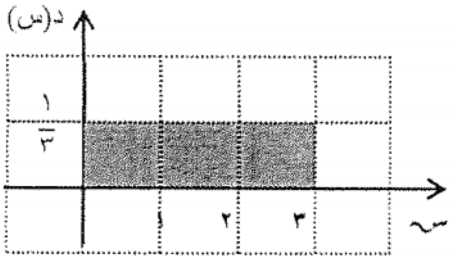
اذا كانت د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣} & : \quad ٠ \leq س \leq ٣ \\ صفر & : \quad فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

١) أثبت ان الدالة د هي داله كثافة احتمال.

٢) اوجد ل ($١ \leq س \leq ٢$) .

٣) اوجد التوقع والتباين.



الحل:

١) لإثبات ان الدالة هي داله احتمال كثافة احتمال يجب اثبات ان

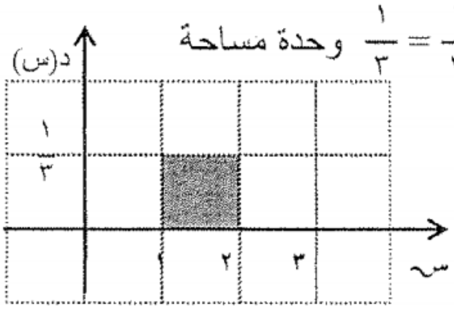
المساحة تحت المنحنى تساوي ١

مساحة المنطقة المستطيلة $= ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$

∴ الدالة د هي دالة كثافة احتمال

٢) ل ($١ \leq س \leq ٢$) = مساحة المنطقة المظللة

$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$ وحدة مساحة



٣) التوقع $\mu = \frac{أ+ب}{٢} = \frac{٠+٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$

التباين $\sigma^٢ = \frac{(ب-أ)^٢}{١٢} = \frac{(٣-٠)^٢}{١٢} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

اذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٣} & : \quad ٢ \le \text{س} \le ٥ \\ \text{صفر} & : \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(١) ل(س ≤ ٤)

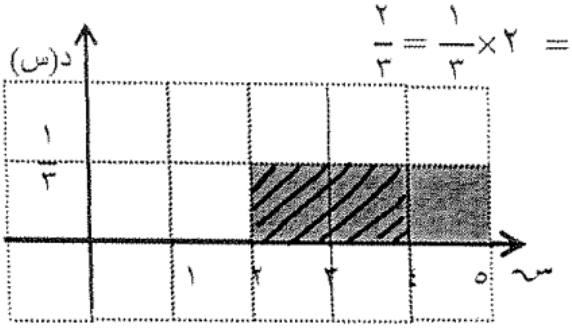
(٢) ل (٣≤ س ≤ ٤)

الحل :

١) ل (س ≤ ٤) = مساحة المنطقة المظللة

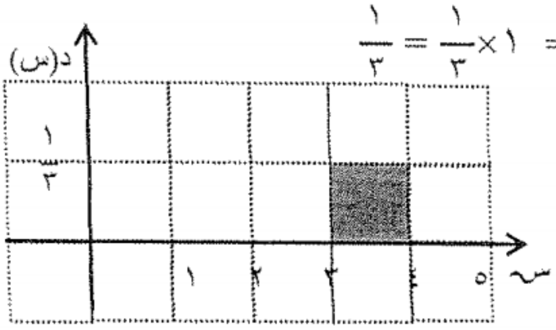
= مساحة المنطقة المستطيلة

$= ٢ \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$



٢) ل (٣≤ س ≤ ٤) = مساحة المنطقة المظللة

$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$



(ب) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ١٠ مرات متتالية ، احسب احتمال ظهور صورة ٥ مرات .

الاجابة

١) ∵ $\text{ن} = ١٠$ ، $\text{ل} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{س} = ٥$

∴ $\text{ل}(\text{س} = \text{س}) = \text{د}(\text{س}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}}\ \text{ل}^{\text{س}}\ (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}}$

∴ $\text{ل}(\text{س} = ٥) = \text{د}(٥)$

$= {}^{١٠}\text{ق}_{٥}\ \text{ل}^{٥}\ (١ - \text{ل})^{١٠ - ٥}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$

$= ٠,٢٤٦٠$

عند القاء حجر نرد منتظم ٨ مرات متتالية.
أوجد احتمال ظهور العدد ٢ خمس مرات.

الحل:

ن = ٨ ، ل = $\frac{١}{٦}$ ، س = عدد مرات ظهور العدد ٢ = ٥

ل (س~ = س) = د(س)

ل(س~=٥) = $^{ن}ق_{س}$ ل ^{س} (١ - ل) $^{ن-س}$

= $^{٨}ق_{٥}$ $(\frac{١}{٦})^{٥}$ $(١ - \frac{١}{٦})^{٣}$

= $\frac{٨×٧×٦×٥×٤}{٥!}$ × $(\frac{١}{٦})^{٥}$ × $(\frac{٥}{٦})^{٣}$

≃ ٤,١٦٨

(أ) ينتج مصنع الألبان ٢٥٠٠ علبة يوميا فاذا كانت نسبة انتاج العلب الفاسدة ٠,٠٥
أوجد التوقع والانحراف المعياري لعدد العلب الفاسدة في أحد الايام.

الحل:

ن = ٢٥٠٠ ، ل = نسبة انتاج العلب الفاسدة = ٠,٠٥

١ – ل = ١ – ٠,٠٥ = ٠,٩٥

التوقع (μ) = ن ل = ٢٥٠٠ × ٠,٠٥

= ١٢٥

التباين ($σ^{٢}$) = ن ل (١ – ل)

= ٢٥٠٠ × ٠,٠٥ × ٠,٩٥

= ١١٨,٧٥

الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$

= $\sqrt{١١٨,٧٥}$ ≃ ١٠,٨٩٧٢

(أ) ينتج مصنع سيارات ٢٠٠ سيارة يوميا ، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠,٠١ فأوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد .

الحل:

∵ ن = ٢٠٠ ، س = عدد السيارات المعيبة في اليوم الواحد

ل = نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد = ٠,٠١

١ ـ ل = ١ ـ ٠,٠١ = ٠,٩٩

∴ التوقع (μ) = ن ل = ٢٠٠ (٠,٠١) = ٢

التباين σ^2 = ن ل (١ ـ ل)

= ٢٠٠ (٠,٠١) (٠,٩٩)

= ١,٩٨

الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{١,٩٨}$

≈ ١,٤١

يمثل المتغير العشوائي س درجات الطلاب في مادة الرياضيات ، فاذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي توقعه μ= ٤٠ وانحرافه المعياري σ= ٨ فأوجد:

ل(٣٠ < س < ٦٠)

الحل :

$$\text{بوضع } س_{١} = ٣٠ \Longleftarrow و_{١} = \frac{س_{١} - \mu}{\sigma} = \frac{٣٠ - ٤٠}{٨} = \frac{-١٠}{٨} = -١,٢٥$$

$$\text{بوضع } س_{٢} = ٦٠ \Longleftarrow و_{٢} = \frac{س_{٢} - \mu}{\sigma} = \frac{٦٠ - ٤٠}{٨} = \frac{٢٠}{٨} = ٢,٥$$

ل(و < -١,٢٥) = ٠,١٠٥٦٥

ل(و < ٢,٥) = ٠,٩٩٣٧٩

ل(٣٠ < س < ٦٠) = ل(و < ٢,٥) - ل(و < -١,٢٥)

= ٠,٩٩٣٧٩ - ٠,١٠٥٦٥

= ٠,٨٨٨١٤

يمثل المتغير العشوائي سـ الزمن الذي يستغرقه أحد الطلاب للوصول الى المدرسة ويتبع التوزيع الطبيعي وتوقعه μ = ١٥ و σ^2 = ٩

فأوجد : ل (١٢ > سـ > ١٥) .

الحل:

μ = ١٥ ، σ^2 = ٩ ، σ

بوضع س$_1$ = ١٢ ⟸ ص$_1$ = $\frac{\text{س}_1 - \mu}{\sigma}$ = $\frac{١٢ - ١٥}{٣}$ = - $\frac{٣}{٣}$ = -١

بوضع س$_2$ = ١٥ ⟸ ص$_2$ = $\frac{\text{س}_2 - \mu}{\sigma}$ = $\frac{١٥ - ١٥}{٣}$ = صفر

ل(ص > -١) = ٠,١٥٨٦٦

ل(ص > صفر) = ٠,٥٠٠٠٠

ل(١٢ > سـ > ١٥) = ل(ص > صفر) - ل(ص > -١)

= ٠,٥٠٠٠٠ - ٠,١٥٨٦٦

= ٠,٣٤١٣

(ب) مثل بيانيا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

٢ س + ص < ٢
ص − س ≥ −٤

الحل :

(١) نرسم خط الحدود للمتباينة : ٢ س + ص < ٢

المعادلة المناظرة : ٢س + ص = ٢

س	٠	١	١-
ص	٢	٠	٤

نعوض بالنقطة (٠،٠) في المتباينة فنجد ان ٠ + ٠ < ٢ عبارة صحيحة

نظلل المنطقة التي تحوي (٠،٠)

(٢) نرسم خط الحدود للمتباينة : ص − س ≥ −٤

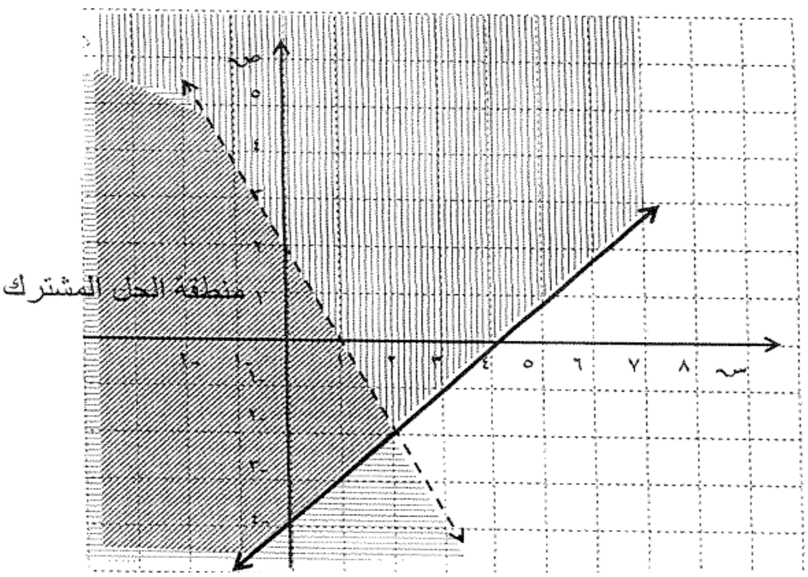
المعادلة المناظرة : ص − س = -٤

س	٠	١	٤
ص	٤-	٣-	٠

نعوض بالنقطة (٠،٠) في المتباينة فنجد ان ٠ + ٠ ≥ -٤ عبارة صحيحة

نظلل المنطقة التي تحوي (٠،٠)

(٣) نحدد منطقة الحل المشترك



مثل بيانيا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

س – ٢ص > ٢
٢ س + ٣ ص ≤ ٦

الحل :

(١) نرسم خط الحدود للمتباينة : س – ٢ص > ٢
المعادلة المناظرة : س - ٢ ص = ٢

س	٠	١	٢
ص	-١	$-\frac{١}{٢}$	٠

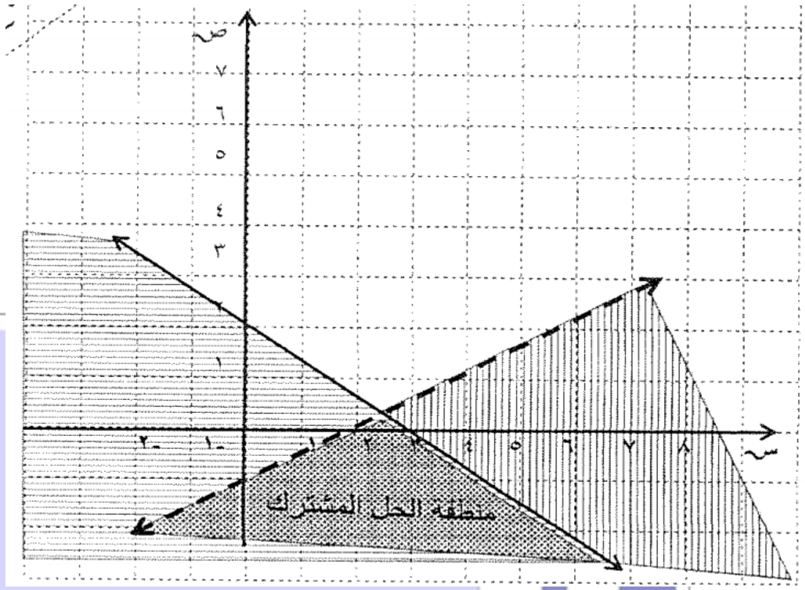
نعوض بالنقطة (٠،٠) في المتباينة فنجد ان ٠ + ٠ > ٢ عبارة غير صحيحة
نظلل المنطقة التي لا تحوي (٠،٠)

(٢) نرسم خط الحدود للمتباينة : ٢ س + ٣ص ≤ ٦
المعادلة المناظرة : ٢س + ٣ ص = ٦

س	٠	١	٣
ص	٢	$\frac{٤}{٣}$	٠

نعوض بالنقطة (٠،٠) في المتباينة فنجد ان ٠ + ٠ ≤ ٦ عبارة صحيحة
نظلل المنطقة التي تحوي (٠،٠)

(٣) نحدد منطقة الحل المشترك



مدرسة التميز النموذجية