الإجابات :- هالة لبيب

H.L

أوراق العمل

الصف الحادي عشر علمي

الفترة الدراسية الثانية

مادة الرياضيات

٢٠٢٣/٢٠٢٢

مراجعة الوحدة التاسعة

الإسم :

تطبيقات على حساب

W.R.E

المثلثات

إثبات صحة متطابقة مثلثية

تذكر ما يلي :

المتطابقات المثلثية الأساسية — **Trigonometric Identities**

• متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) — Quotient Identities (Tangent and) Cotangent

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

• متطابقات المقلوب — Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

• متطابقات فيثاغورث — Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

H.L.

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

فرق بين مربعين

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \tan^2\theta$$

∴ الطرفان متساويان .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 88 رقم 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

بتوحيد المقامات :

$$\frac{\sin\theta \cdot \sin\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} + \frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)} =$$

$$\frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} =$$

$$\frac{1 + 2\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} =$$

$$\frac{1 + 2\cos\theta + 1}{(1+\cos\theta)\sin\theta} =$$

$$\frac{2 + 2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta} = 2\csc\theta$$

∴ الطرفان متساويان

H.L.

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 2 :

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$

بتوحيد المقامات :

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

$$= \frac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$$

$$= \frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

$$= 2\sec x \cdot \cot^2 x$$

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2\cot x \ \csc x$$

∴ الطرفان متساويان

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 89 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{(1+\sin x)^2 - (1-\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{(1+2\sin x+\sin^2 x) - (1-2\sin x+\sin^2 x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cancel{1}+2\sin x+\cancel{\sin^2 x}-\cancel{1}+2\sin x-\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{4\sin x}{\cos^2 x} = \frac{4\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 4\tan x \cdot \sec x$$

∴ الطرفان متساويان

كتاب الطالب مثال صـ 89 رقم 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cancel{\cos} x(1+\sin x)}{\cos^{\cancel{2}} x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

∴ الطرفان متساويان

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$

$= \frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}$

$= \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}$

$= \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$

$= (\csc x - \cot x)^2$

∴ الطرفان متساويان

كتاب الطالب مثال صـ 90 رقم 4 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الطرف الأيسر

$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$

$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$

$= \csc\theta - 1$

الطرف الأيمن

$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) =$

$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) =$

$= \frac{1}{\sin x} - 1$

$= \csc\theta - 1$

∴ الطرفان متساويان

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 4 :

أثبت أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

الطرف الأيسر

$\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} =$

$\frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x}{1}} =$

تابع الحل

الطرف الأيمن :

$\sin x + \sin x \tan^2 x =$

$\sin x (1 + \tan^2 x) =$

$\sin x \sec^2 x =$

$\sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

H.L.

$$\frac{\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}{\left(\frac{\cos x+\cos x\sin x}{\sin x}\right)}=$$

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x+\cos x\sin x}=$$

$$\frac{1+\cancel{\sin x}}{\cos x}\quad\frac{\sin x}{\cos x(1+\cancel{\sin x})}=$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

∴ الطرفان متساويان

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

H.L.

كراسة التمارين صـ 36 رقم 5 :

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^{2} x}{\cancel{\sin x}\cos x} + \frac{2\cancel{\sin x \cos x}}{\cancel{\sin x \cos x}} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + 2 + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \tan x + 2 + \cot x$$

$$= \tan x + \cot x + 2$$

∴ الطرفان متساويان

كراسة التمارين صـ 36 رقم 5 :

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$$

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{(1+\cos x) + (1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1 + \cancel{\cos x} + 1 - \cancel{\cos x}}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$$

∴ الطرفان متساويان

H.L.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$
(b) $\sin x \sec^2 x$
(c) $\cos x \sec^2 x$
(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$
(b) 2
(c) -2
(d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$
(b) $\sec x \sin x$
(c) $\sec x \cos x$
(d) $\sin x \cos x$

H.L. إجابات تمرينوي

١ ، ٢ ← بالتعويض عن X بأي زاوية :
الطرفان غير متساويين.

٣

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x$$

$$= \tan x \sin x \quad \text{a}$$

٥

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x}$$

$$= \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sin x \sec^2 x \quad \text{b}$$

H.L.

٦

$$(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=$$

$$\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x-(\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x)=$$

$$\cancel{\cos^2 x}+2\sin x\cos x+\cancel{\sin^2 x}-\cancel{\cos^2 x}+2\sin x\cos x-\cancel{\sin^2 x}=$$

$$4\sin x\cos x$$

d

$$\frac{1}{\tan x}+\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}+\tan x$$

٧

$$=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}$$ توحيد المقامات

$$=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\csc x\ \sec x$$

$$=\sec x\ \csc x$$

a

H.L.

إثبات صحة متطابقة مثلثية – البنود الموضوعية

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$
(b) $\cot^2 x$
(c) $\tan^2 x \sin^2 x$
(d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $1 + \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x}$ متطابق مع المقدار:

(a) 1
(b) -1
(c) 2
(d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$
(b) $-\tan x$
(c) $\tan x \sin x$
(d) $\tan x$

الإجابات بالتفصيل في الصفحة التالية

كراسة التمارين صـ 36 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

H.L.

٨

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$$

عامل مشترك

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$$

$$= \sin^2 x \left(\sec^2 x - 1 \right)$$

$$= \sin^2 x \tan^2 x$$

c

٩

$$\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1 = \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x + 1$$

$$= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x} + 1$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

c

١٠

$$\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$= -\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -\sin x \tan x$$

$$= -\tan x \sin x$$

a

حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 93 رقم 1 :

حل المعادلة : $\sqrt{2}\cos x = 1$

$\sqrt{2}\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

بفرض أن α زاوية الإسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$

$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\because \cos x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

عندما تقع x في الربع الأول :

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

عندما تقع x في الربع الرابع :

$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة هو :

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

السؤال بالكتاب $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

كتاب الطالب مثال صـ 93 رقم 1 :

حل المعادلة : $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$2\cos x = -\sqrt{3}$

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

بفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$

$= \left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

سالبة $\because \cos x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما تقع x في الربع الثاني :

$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

عندما تقع x في الربع الثالث :

$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 94 رقم 2 :

حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

$5\sin\theta - 3 = \sin\theta$
$5\sin\theta - \sin\theta = 3$
$4\sin\theta = 3$
$\sin\theta = \frac{3}{4}$
$\sin\alpha = |\sin\theta|$
$= \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$
$\therefore \alpha \approx 0.848$ radian
$\because \sin\theta > 0$
$\therefore$ θ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

$[0, 2\pi)$

عندما تقع θ في الربع الأول :

$\theta = 0.848 + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

عندما تقع θ في الربع الثاني :

$\theta = \pi - \alpha + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$
$= \pi - 0.848 + 2k\pi$
$= 2.2935 + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة هو :

$\theta = 0.848 + 2k\pi$ أو
$\theta = 2.2935 + 2k\pi$

كتاب الطالب مثال صـ 94 رقم 2 :

حل المعادلة : $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$
$4\sin\theta - \sin\theta = -1$
$3\sin\theta = -1$
$\sin\theta = \frac{-1}{3}$
$\sin\alpha = |\sin\theta|$
$= \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3}$
$\therefore \alpha = 0.34$ radian
$\therefore \sin\theta < 0$
$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

عندما تقع θ في الربع الثالث :

$\theta = \pi + 0.34$
$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$

عندما تقع θ في الربع الرابع :

$\theta = 2\pi - 0.34$
$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة :

$\theta \approx 3.4816$ أو $\theta \approx 5.9432$

H.L.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 95 رقم 3 :

حل المعادلة : $\tan x = 1$

$\tan\alpha = |\tan x|$
$= |1|$
$= 1$
$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

نفرض ان α هي زاوية الاسناد للزاوية x
$\because \tan x > 0$
$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث
الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π
فيكون : $\tan(\pi + x) = \tan x$
حل المعادلة :
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad : k \in Z$

كتاب الطالب مثال تحل صـ 95 رقم 3 :

حل المعادلة : $\tan x = \sqrt{3}$

$\tan\alpha = |\tan x|$
$= |\sqrt{3}|$
$= \sqrt{3}$
$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

نفرض ان α هي زاوية الاسناد للزاوية x
$\because \tan x > 0$
$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث
الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π
فيكون : $\tan(\pi + x) = \tan x$
$\therefore$ حل المعادلة هو :
$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad : k \in Z$

تابع حل معادلات مثلثية

H.L.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 96 رقم 4 :

حل المعادلة : $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = 1$

$\cos\theta = 0$

$\therefore \theta$ زاوية ربعية

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أو

$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ حيث

$\sin\theta = 1$

$\therefore \theta$ زاوية ربعية

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة :

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أو

$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

كتاب الطالب مثال صـ 96 رقم 4 :

حل المعادلة : $2\cos\theta \ \sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta = -1$

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = \frac{-1}{2}$

$\sin\theta = 0$

$\therefore \theta$ زاوية ربعية

$\therefore \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ حيث

أو $\cos\theta = \frac{-1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\therefore \cos x = |\cos\theta|$

$= |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore$ تقع θ في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$= (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

عندما تقع θ في الربع الثالث:

$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$= (\pi + \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة:

$\theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ حيث

تابع حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 97 رقم 5 :

حل المعادلة : $cos^2\theta + 3cos\theta + 2 = 0$

$\cos^2\theta + 3\cos\theta + 2 = 0$

$(\cos\theta + 1)(\cos\theta + 2) = 0$

$\cos\theta + 1 = 0$ أو $\cos\theta + 2 = 0$

$\cos\theta = -1$ $\qquad$ $\cos\theta = -2$

θ : زاوية ربعية $\qquad$ $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\therefore \theta = \pi + 2k\pi$ $\qquad$ $\therefore -2 \notin [-1, 1]$

حيث $k \in Z$ $\qquad$ ∴ ليس لها حل

كتاب الطالب مثال صـ 96 رقم 5 :

حل المعادلة : $4sin^2x - 8sinx + 3 = 0$

$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$2\sin x = 1$ $\qquad$ $2\sin x = 3$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{3}{2}$

$\boxed{\sin x = \frac{1}{2}}$

نفرض α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x|$

$= |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin x > 0$

∴ x تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

عندما تقع x في الربع الأول :

$x = \alpha + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad : k \in Z$

عندما تقع x في الربع الثاني

$x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

$= (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad : k \in Z$

$\boxed{\sin x = \frac{3}{2}}$

$y = \sin x$

مداها $[-1, 1]$

$\therefore \frac{3}{2} \notin [-1, 1]$

$\therefore \sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

∴ حل المعادلة : $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

حيث $k \in Z$

H.L.

الإجابات بالتظليل في الصفحات التالية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$\because \sin x > 0 \leftarrow x$ تقع في الربع الأول أو الثاني

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو

(a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

$\sqrt{2} \approx 1.414$ ليس لها حل

(a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. ← لها حلان

$\tan x < 0 \leftarrow$ تقع x في الربع الثاني أو الرابع

(a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

(a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

(a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

كراسة التمارين صـ 38 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

H.L.

٣

$\tan x = -\sqrt{3}$

$\tan\alpha = |\tan x|$

$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\because \tan x < 0$

∴ تقع x في الربع الثاني أو الربع الرابع

$x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad , k \in Z$

أو $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k\pi$

$= \frac{5\pi}{3} + k\pi \quad , k \in Z$

٤

$\sin x \tan^2 x = \sin x$

$\sin x \tan^2 x - \sin x = 0$

$\sin x(\tan^2 x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ أو $\tan^2 x - 1 = 0$

$\therefore x = 0$

$0 \notin (0, \pi)$

أو $x = \pi$

$\pi \notin (0, \pi)$

$\tan^2 x = 1$

$\tan x = \pm 1$

$\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in (0, \pi)$

or $x = \frac{5\pi}{4} \notin (0, \pi)$

$\tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$

أو $x = \frac{3\pi}{4} \notin (0, \pi)$

H.L.

5

$2\sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

أو $x = \frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

أو $x = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

6

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\cos x}{\cos x}$

$\tan x = -1$

$\therefore \tan x < 0$

∴ x تقع في الربع الثاني

أو

الربع الرابع

7

$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x + 1) = 0$

$2\sin x + 1 = 0$ أو $\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -1$

x تقع في الربع الثالث أو الرابع $\qquad$ ∴ x زاوية ربعية

$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{7\pi}{6}} \in [0, 2\pi]$ $\qquad$ $x = \boxed{\frac{3\pi}{2}} \in [0, 2\pi]$

أو

$x = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$= \boxed{\frac{11\pi}{6}} \in [0, 2\pi]$

H.L.

(8)

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$$

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sin x) - (\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$$

$$2\sin x(\sqrt{2}\cos x - 1) - (\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$$

$$(\sqrt{2}\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 1 = 0$

$$\sqrt{2}\cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

∴ تقع x في الربع الأول أو الرابع

$$x = \boxed{\frac{\pi}{4}} \in [0, 2\pi)$$

أو

$$\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$= \boxed{\frac{7\pi}{4}} \in [0, 2\pi)$$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

∴ تقع x في الربع الأول أو الثاني

$$x = \boxed{\frac{\pi}{6}} \in [0, 2\pi)$$

أو

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \boxed{\frac{5\pi}{6}} \in [0, 2\pi)$$

متطابقات الدوال المتكافئة

H.L.

متطابقات الدوال المتكافئة :

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 100 رقم 1 :

أثبت أن : $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=-\cos\theta$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 100 رقم 2 :

أثبت أن : $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sec\theta$

$$\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=-\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=-\sec\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 101 رقم 2 :

أثبت أن : $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sec\theta$

$$\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sin-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{-1}{\cos\theta}=-\sec\theta$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 101 رقم 2 :

أثبت أن : $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

$$\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sec\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\cos-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

H.L.

متطابقات المجموع و الفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 103 رقم 3 :

أوجد دون استخدام الالة الحاسبة كلا مما يلي :

$a)\ \sin 15$ $\qquad$ $b)\ \cos 75$ $\qquad$ $c)\ \tan 105$

a) $\because 15^\circ=(45^\circ-30^\circ)$

$\therefore \sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12$

$=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

b) $\because 75^\circ=45^\circ+30^\circ$

$\therefore \cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$

$=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12$

$=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

c) $\because 105^\circ=45^\circ+60^\circ$

$\therefore \tan105^\circ=\tan(45^\circ+60^\circ)$

$=\frac{\tan45^\circ+\tan60^\circ}{1-\tan45^\circ\tan60}$

$=\frac{1+\sqrt3}{1-(1)(\sqrt3)}=-2-\sqrt3$

تابع متطابقات المجموع و الفرق

H.L.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 104 رقم 4 :

إذا كان :

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{-12}{13} \quad , \quad \pi > \beta > \frac{3\pi}{2}$$

أوجد كلا مما يلي : $c)\ \sin(\beta - \alpha)$ $\quad b)\ \tan(\alpha + \beta)$ $\quad a)\ \cos(\alpha + \beta)$

$\because \sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ تقع α في الربع الأول

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$= \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}}$

$\because \cos\alpha > 0$

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$

$= \frac{4}{3}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\tan\alpha = \frac{4}{3}$

$\because \cos\beta = \frac{-12}{13} , \pi > \beta > \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ تقع β في الربع الثالث

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2$

$= \frac{25}{169}$

$\sin\beta = \sqrt{\frac{25}{169}}$

$\because \sin\beta < 0$

$\therefore \sin\beta = -\frac{5}{13}$

$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$= \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$

$= \frac{5}{12}$

$\therefore \sin\beta = -\frac{5}{13}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}$

$\tan\beta = \frac{5}{12}$

تابع الحل

H.L.

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{-5}{13}\right)$

$= -\frac{16}{65}$

b) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}$

$= \frac{63}{16}$

c) $\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$= \frac{-5}{13}\cdot\frac{3}{5} - \left(\frac{-12}{13}\right)\cdot\frac{4}{5}$

$= \frac{33}{65}$

H.L.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

باستخدام الآلة الحاسبة

(3) $\cos(h+\frac{\pi}{2}) = -\cos h$ (a) (b)

$L_S = \cos h \cos\frac{\pi}{2} - \sin h \sin\frac{\pi}{2} = 0 - \sin h \times 1$
$= -\sin h$

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$ (a) (b)

$= (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2$
$= 14$

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

باستخدام الآلة الحاسبة

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

$= \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

(a) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

$$= \frac{\tan h + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \cdot \tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h \times 1}$$

$$= \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

H.L.

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

$= \cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}$

$= \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}$

عامل مشترك

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94°\cos 18° + \sin 94°\sin 18°$ تساوي:

باستخدام الآلة الحاسبة

أو:

$= \cos(94° - 18°)$

$= \cos 76°$

(a) $\cos 112°$ (b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$ (d) $\sin 76°$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

أو:

$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}\right)$

$= \sin\frac{4\pi}{21}$

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

أو:

$= \tan\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

كراسة التمارين صـ 40 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

H.L.

متطابقات ضعف الزاوية

$$\boxed{\cos 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta}$$

كتاب الطالب مثال صـ 105 رقم 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية : $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية : $\cos 2\theta = 1 - 2sin^2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta$

$= 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2cos^2\theta - 1\\ \cos 2\theta &= 1 - 2sin^2\theta\end{aligned}}$$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 2:

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$= 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$

$= 2 \cdot \frac{9}{25} - 1$

$= -\frac{7}{25}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 2 :

إذا كان $sin\, x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$= 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - 2 \cdot \frac{25}{169}$

$= 1 - \frac{50}{169}$

$= \frac{119}{169}$

تابع متطابقات ضعف الزاوية

H.L.

$$\boxed{\sin 2\theta = 2sin\theta\ cos\theta}$$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 3 :

إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. $sin\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ فأوجد $sin\,2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{2}$

$\because \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \cos\theta < 0$

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ (متطابقة جيب ضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$= 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 3 :

إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $cos\,\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $sin\,2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$= \frac{16}{25}$

$\sin\theta = \sqrt{\frac{16}{25}}$

$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{24}{25}$

$$\boxed{tan2\,\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 4 :

إذا كان : $\tan\theta = \sqrt{3}$ استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

H.L.

تابع متطابقات ضعف الزاوية

كتاب الطالب مثال صـ 107 رقم 5:

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 2\theta = \frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}$

الطرف الأيمن :

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \cos^2\theta-\sin^2\theta = \cos 2\theta$$

∴ الطرفان متساويان

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 5 :

أثبت صحة المتطابقة : $2cos\, 2\theta = 4\, cos^2\theta - 2$

الطرف الأيسر :

$$2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)$$ متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية

$$= 4\cos^2 - 2$$

∴ الطرفان متساويان

تابع متطابقات ضعف الزاوية

H.L.

كتاب الطالب مثال صـ 108 رقم 6 :

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الطرف الأيسر :

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\
&= \cos\theta \cos 2\theta - \sin\theta \sin 2\theta \\
&= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + \cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

∴ الطرفان متساويان

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 108 رقم 6 :

أثبت صحة المتطابقة : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

الطرف الأيسر :

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\
&= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\
&= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

∴ الطرفان متساويان

H.L.

متطابقات نصف الزاوية

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 109 رقم 7 :

إستخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد cos 15

$\because \frac{\alpha}{2}=15^\circ$

$\therefore \alpha=30^\circ$

تقع α في الربع الأول

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\therefore \sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

كتاب الطالب مثال صـ 109 رقم 8 :

إذا كانت : $180<\theta<270$, $\sin\theta=\frac{-24}{25}$ فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ متطابقة فيثاغورث

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{-24}{25}\right)^2$

$=\frac{49}{625}$

$\cos\theta=\sqrt{\frac{49}{625}}=\frac{-7}{25}$

لأن $180^\circ<\theta<270^\circ$

$\because 180^\circ<\theta<270^\circ$

قسمة الأطراف الثلاثة ÷ 2

$\therefore 90^\circ<\frac{\theta}{2}<135^\circ$

$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}}$

$=\frac{4}{5}$

حيث تقع θ في الربع الثاني

H.L.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 109 رقم 8 :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$. $\sin\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\tan\frac{\theta}{2}$. $\cos\frac{\theta}{2}$

$\because 180^\circ < \theta < 270^\circ$

$\therefore$ تقع θ في الربع الثالث

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{-24}{25}\right)^2$

$= \frac{49}{625}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{49}{625}} \rightarrow \because \cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{-7}{25}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \rightarrow \because \cos\frac{\theta}{2} < 0$

$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = -\frac{3}{5}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \rightarrow \because \tan\frac{\theta}{2} < 0$

$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}} = -\frac{4}{3}$

H.L.

تابع متطابقات نصف الزاوية - البنود الموضوعية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الإجابات بالتفصيل في الصفحة التالية

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ (a) (b)

(2) $\sin 4x = -4\cos x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin x$ (a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$ (b) $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$ (d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

كراسة التمارين صـ 43 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8

H.L.

(1) $\sin 4x = \sin 2(2x)$

$= 2\sin(2x)\cos(2x)$

(2) $\sin 4x = 2\sin(2x)\cos(2x)$

$= 2(2\sin x\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 4\sin x\cos^3 x - 4\cos x\sin^3 x$

$= -4\cos x\sin^3 x + 4\sin x\cos^3 x$

(3) $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

بتربيع الطرفين :

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ قانون ضعف الزاوية

(5) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

H.L.

⑥ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\therefore 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$$

⑦ $\cos \frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)$

$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$,

$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

H.L.

(8) $\because \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \pi < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{2}$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}$$

$$= -\frac{3}{5}$$