مذكرة الصف التاسع غير محلولة وشاملة
الفصل الدراسي الثاني ٢٠٢٢-٢٠٢٣
إعداد أ / أحمد جمال عزمي

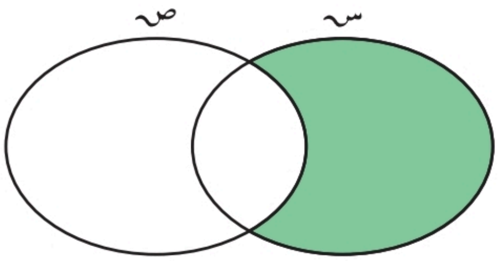
امسح الرمز لمشاهدة فيديوهات شرح المذكرة

٦-١ مجموعة الفرق
Difference Set

مجموعة الفرق بين مجموعتين

س - ص

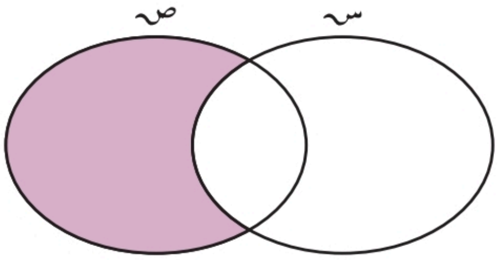
وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .



س - ص = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ص

أما ص - س

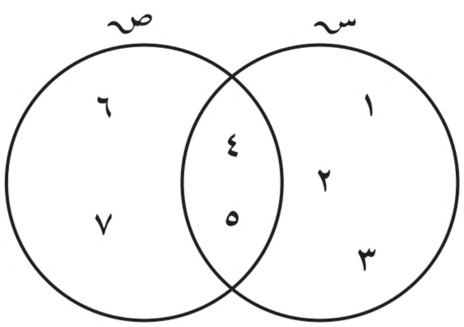
تُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .



ص - س = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ص ولا تنتمي إلى س

تدرّب (١) ص٣٢

من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلاًّ ممّا يلي :



أ س - ص = ...

ب ص - س = ...

جـ ماذا تلاحظ ؟ ....

تدرّب (٢) ص ٤٤

إذا كانت س = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ،

ع = { ب : ب ∈ ص ، -١ ≤ ب ≤ ٤ } ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي:

ع = ...

س − ع = ...

ع − س = ...

مثِّل كلًّا من س ، ع بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع − س .

ص ٤٧

إذا كانت س = مجموعة مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ٩ ،

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

س = ...

س − ص = ...

ص − س = ...

مثِّل كلًّا من س ، ص بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ص − س .

ص ٤٨

إذا كانت ع = { أ : أ ∈ ص ، ١ ≤ أ < ٥ } ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

ح = { ب : ب عامل من العوامل الأوّلية للعدد ٣٠ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

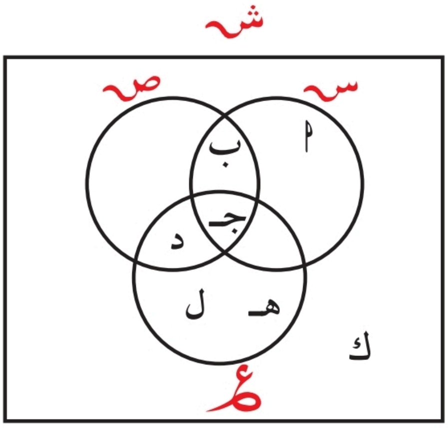
ع = ...

ح = ...

ع − ح = ...

مثِّل كلًّا من ع ، ح بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع − ح .

٦-٢ المجموعة الشاملة – المجموعة المتمِّمة
Overall Set – Complement of a Set

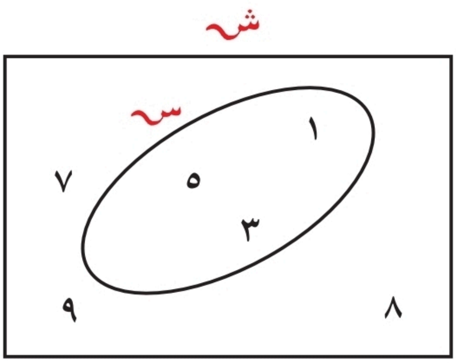


نرمز إلى المجموعة الشاملة بالرمز شـ .

لتكن شـ = { ﻫ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، ك }
المجموعة الشاملة لكلّ من سـ ، صـ ، ع
وتُمثَّل بشكل ڤن المقابِل .

تدرّب (١) ص٨

من الشكل المقابِل :



أ أُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

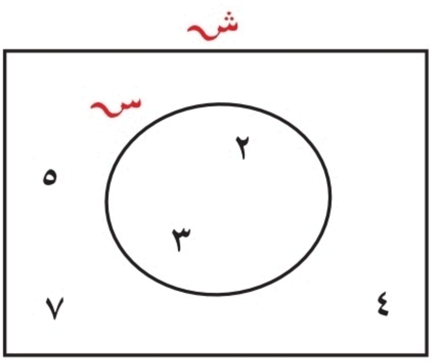
شـ = ...

سـ = ...

شـ – سـ = ...

ب أكمِل : .... ∈ (شـ – سـ) ، .... ∌ (شـ – سـ)

تدرّب (٢) ص٩



من الشكل المقابِل ، أُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

شـ = ...

سـ = ...

$\overline{\text{سـ}}$ = شـ – سـ

= ....

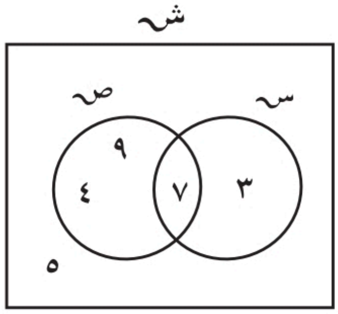
سـ ∩ $\overline{\text{سـ}}$ = ...

سـ ∪ $\overline{\text{سـ}}$ = ... = ...

$\overline{\overline{\text{سـ}}}$ = شـ – .... = ...

= ....

تدرّب (٣) ص ٣٠



من الشكل المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ش = ...

س = ...

ص = ...

$\overline{\text{س}}$ = ...

$\overline{\text{ص}}$ = ...

$\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$ = ...

س ∪ ص = ...

$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = ...

ماذا تلاحظ؟ ....

$\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$ = ...

س ∩ ص = ...

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = ...

تدرّب (٤) ص ٣١

إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

س = { أ : أ ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ٢ ≤ أ < ٤ } ،

ص = { ب : ب ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ب عامل من عوامل العدد ٤ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

س = ...

ص = ...

$\overline{\text{س}}$ = ...

$\overline{\text{ص}}$ = ...

($\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$) = ...

($\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$) = ...

($\overline{\overline{\text{س} \cap \text{ص}}}$) = ...

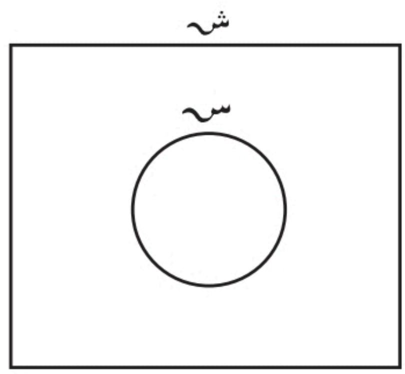
....

مثِّل كلًّا من ش ، س ، ص بشكل ڤن .

تدرّب (٥) ص٣١

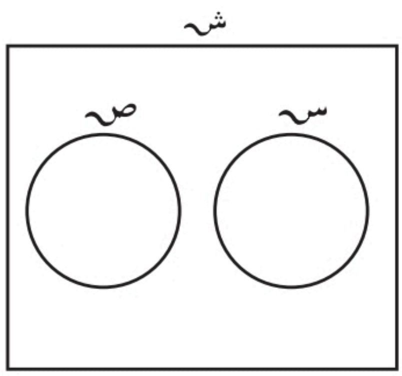
ظلّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

أ



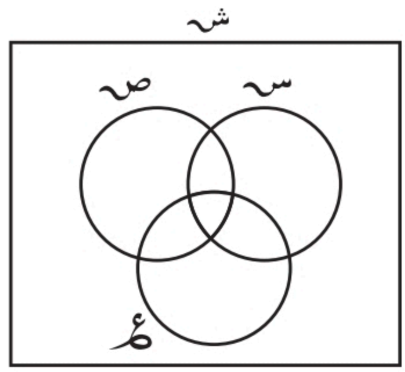
$\overline{\text{س}}$

ب



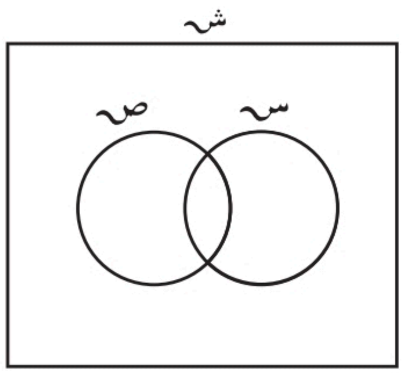
$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$

جـ



$(\overline{\text{س} \cap \text{ص} \cap \text{ع}})$

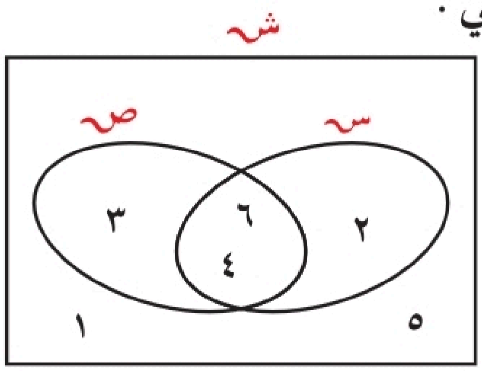
د



$(\overline{\text{س} - \text{ص}})$

ص٣٢

من شكل فن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



ش = ...

س = ...

ص = ...

$\overline{\text{س}}$ = ... ، $\overline{\text{ص}}$ = ...

$(\overline{\text{س} \cap \text{ص}})$ = ...

....

$(\overline{\text{س} \cup \text{ص}})$ = ...

....

إذا كانت المجموعة الشاملة شـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

م = مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ١ والأصغر من ٧ ،

ك = { أ : أ عدد زوجي ، ١ < أ < ٦ } ،

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

م = ...

ك = ...

$\overline{\text{م}}$ = ...

$\overline{\text{ك}}$ = ...

$\overline{(\text{م} \cap \text{ك})}$ = ...

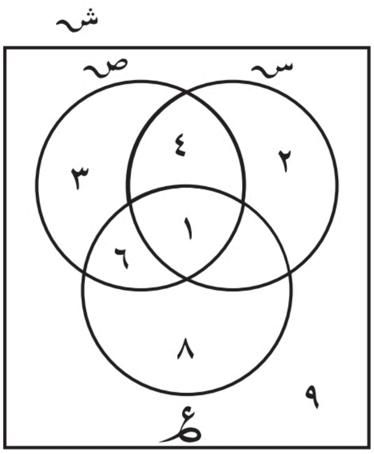
م − ك = ...

$\overline{(\text{م} - \text{ك})}$ = ...

مثِّل كلًّا من شـ ، م ، ك بشكل ڤن ، ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل $\overline{(\text{م} \cap \text{ك})}$.

ص٣٤

من شكل ڤن المقابل ، أكمل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ) شـ = ...

ب) ص = ...

جـ) $\overline{\text{س}}$ = ...

د) ص − ع = ...

هـ) $\overline{(\text{س} \cap \text{ص})}$ = ...

ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل $\overline{(\text{س} - \text{ع})}$.

التطبيق وأنواعه
Mapping and its Kind

سوف تتعلّم : التطبيق (الدالّة) وأنواعه .

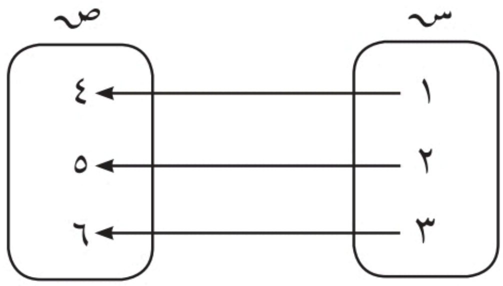
درست فيما سبق : أنّ العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي تطبيق (دالّة) إذا ارتبط كلّ عنصر من س بعنصر واحد وواحد فقط من ص . وتُسمّى س « المجال » ، ص « المجال المقابِل » وتُسمّى مجموعة صور عناصر المجال « المدى » .

التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابِل يُسمّى « تطبيق شامل » .

التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابِل يُسمّى « تطبيق متباين » .

التطبيق الشامل والمتباين يُسمّى « تطبيق تقابل » .

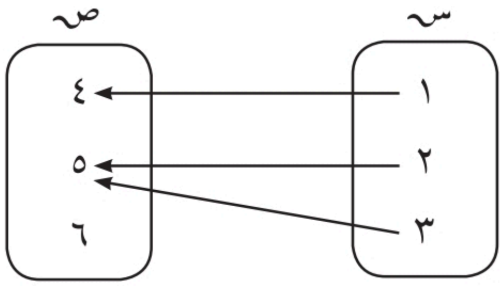
أيّ التطبيقات التالية شامل وأيّها ليس شاملًا ؟ أُذكر السبب :



ت : س ⟵ ص

ت تطبيق ....

السبب : ....



ن : س ⟵ ص

ن تطبيق ....

السبب : ....

في التطبيق ت : س ⟵ ص

ت (١) = ...

ت (٢) = ...

ت (٣) = ...

هل صور عناصر المجال مختلفة ؟

....

في التطبيق ن : س ⟵ ص

ن (١) = ...

ن (٢) = ...

ن (٣) = ...

هل صور عناصر المجال مختلفة ؟

....

تدرَّب (٢)

إذا كانت سـ = { -٣ ، ٠ ، ٣ } ، صـ = { - ٩ ، ٠ ، ٩ } ،
التطبيق ت : سـ ⟵ صـ ، حيث ت (س) = ٣ س

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ت (س) = ٣ س

ت (-٣) = ...

ت (٠) = ...

ت (٣) = ...

المدى = ...

ب أُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

....

جـ مثِّل التطبيق ت بمخطَّط سهمي .

د بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ت تطبيق .... لأنَّ : ....

ت تطبيق .... لأنَّ : ....

ت تطبيق .... لأنَّه : ....

تدرّب (٣)

ليكن التطبيق ت : { -٢ ، -١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٠ ، ٣ ، ٨ } ، حيث ت(س) = س^{٢} − ١

أ أوجِد مدى التطبيق **ت** .

ب مثِّل التطبيق **ت** بمخطَّط بياني .

جـ بيِّن نوع التطبيق **ت** من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

تمــرَّنْ : ص ٤٠

١ إذا كانت سـ = { -٢ ، ٠ ، ٢ } ، صـ = { -٤ ، ٢ ، ٨ } ،
التطبيق ν : سـ ⟵ صـ ، حيث ν (س) = ٣ س + ٢

أ أوجِد مدى التطبيق ν .

ب اُكتب التطبيق ν كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ مثِّل التطبيق ν بمخطَّط سهمي .

د بيِّن نوع التطبيق ν من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ص ٤١

إذا كانت ل = { ١ ، -١ ، ٣ } ، م = { ٢ ، ٥ ، ١٠ } ،
التطبيق ه : ل ⟵ م ، حيث ه (س) = س^{٢} + ١

أ أوجِد مدى التطبيق ه .

ب أُكتب التطبيق ه كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ مثِّل التطبيق ه بمخطَّط بياني .

د بيِّن نوع التطبيق ه من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ص ٢٤

إذا كانت سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، صـ = { ٠ ، ١ ، ٨ } ،
التطبيق د : سـ ⟵ صـ ، حيث د (س) = $س^{٣}$

أ أوجِد مدى التطبيق د .

....

....

....

....

....

ب اُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

....

جـ مثِّل التطبيق د بمخطَّط بياني .

د بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

....

....

....

ص٤٢

إذا كانت س = { ١ ، ٤ ، ٩ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

التطبيق ت : س ← ص ، حيث ت (س) = √س

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

....

....

....

....

ب مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .

جـ بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

....

....

....

ص ٤٣

إذا كانت س = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ، التطبيق ك : س ⟵ س ،
حيث ك = { (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) }

أ أوجِد مدى التطبيق ك .

ب مثِّل التطبيق ك بمخطَّط بياني .

جـ بيِّن أنّ التطبيق ك تطبيق تقابل .

٤-٦ الدالّة الخطيّة
Linear Function

الدالّة الحقيقية ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = ا س + ب
حيث ا ، ب ∋ ح تُسمّى « **دالّة خطّية** » (تطبيق خطّي) .

لاحِظ أنّ :

١ ن (س) = ا س + ب
تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : ص = ا س + ب
ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا .

٢ تُسمّى س المتغيّر المستقلّ وتُسمّى ص المتغيّر التابع .

٣ عندما يكون ا = ٠ تكون الدالّة ثابتة ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا (يوازي محور السينات) .

الدالّة الحقيقية ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = ا س + ب
حيث ا ، ب ∋ ح تُسمّى « **دالّة خطّية** » (تطبيق خطّي) .

لاحِظ أنّ :

١ ن (س) = ا س + ب
تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : ص = ا س + ب
ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا .

٢ تُسمّى س المتغيّر المستقلّ وتُسمّى ص المتغيّر التابع .

٣ عندما يكون ا = ٠ تكون الدالّة ثابتة ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا (يوازي محور السينات) .

تدرّب (١) :

أكمِل الجدولين للدالّتين الخطّيتين التاليتين :

أ ص = س + ٣

ص = س + ٣					
س (المتغيّر المستقلّ)	-١	٠	١	٢	٣
ص (المتغيّر ....)					

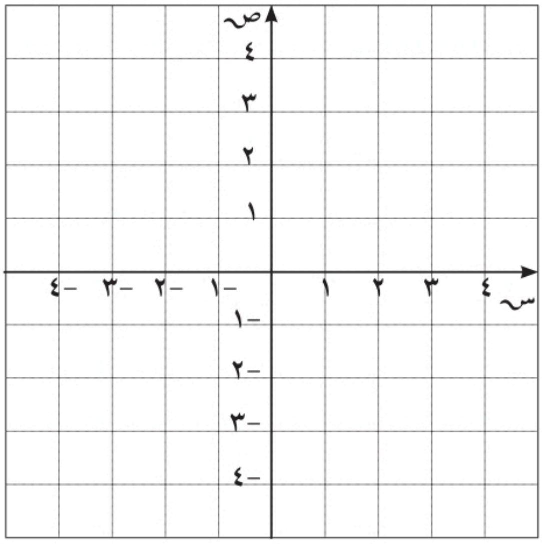
ب ص = ٢ س

ص = ٢ س					
س					
ص					

تدرّب (٢)

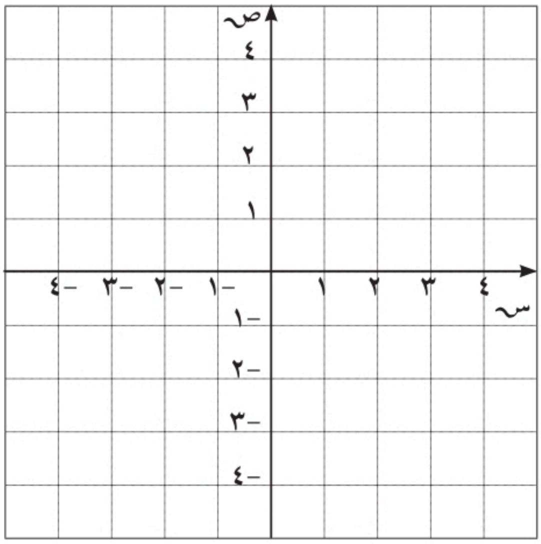
أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣ س – ١

ص = ٣ س – ١			
س			
ص			

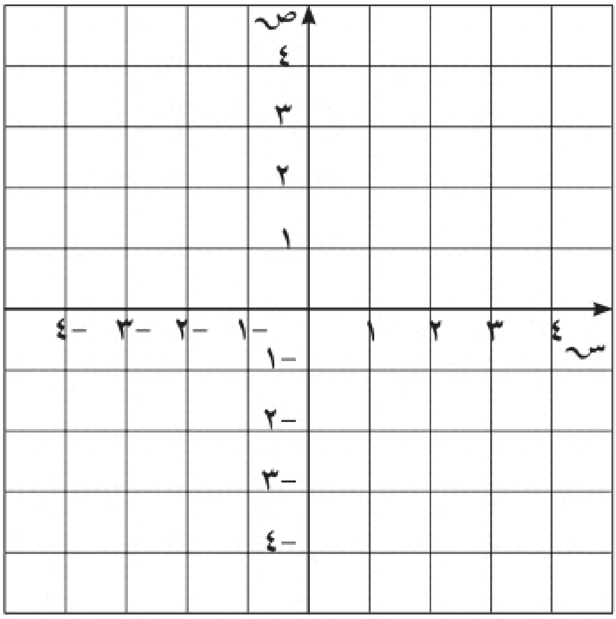


تدرّب (٣)

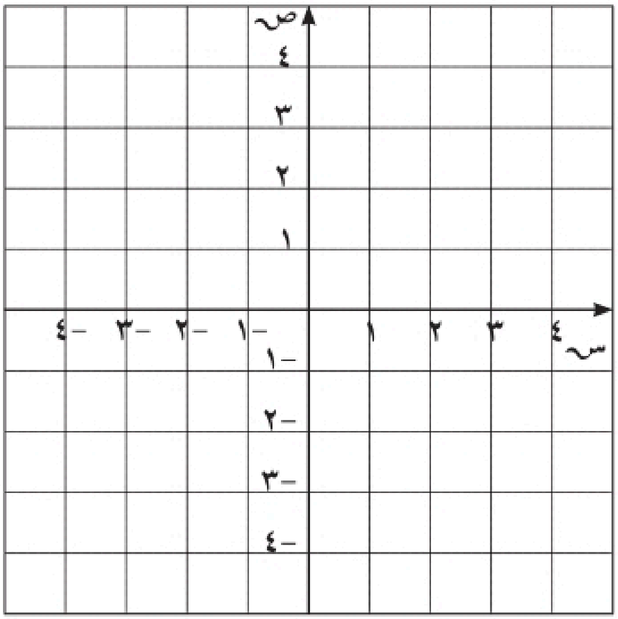
أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ١ – ٢ س



ص = ٤ – س



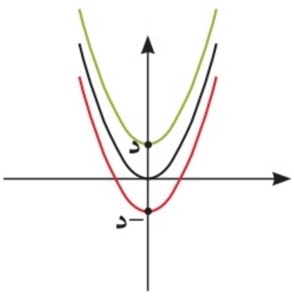
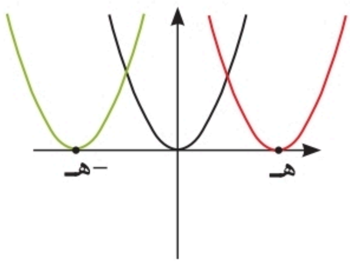
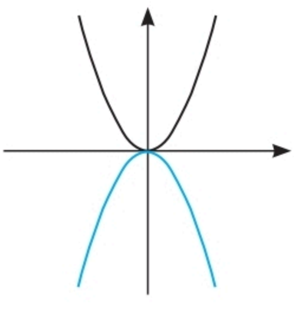
ص = ٣



٦-٥ الدالّة التربيعية
Quadratic Function

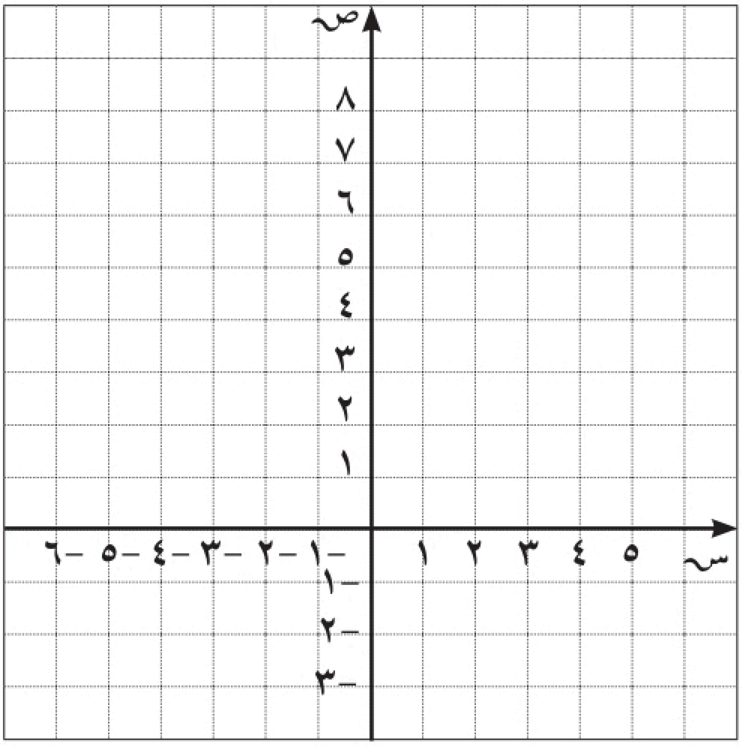
الدالّة الحقيقية التي فيها القوّة الأعلى للمتغيّر المستقلّ تساوي ٢ تُسمّى « **دالّة تربيعية** » .
ويكون الرسم البياني للدالّة التربيعية منحنى على شكل ∪ أو ∩ ويُسمّى « **قطع مكافئ** » .

> الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي :
>
> ص = ﺃ س^{٢} + ب س + جـ حيث ﺃ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، ﺃ ≠ ٠ .
>
> ﺃ س^{٢} : حدّ من الدرجة الثانية ، ب س : حدّ من الدرجة الأولى ، جـ : حدّ ثابت

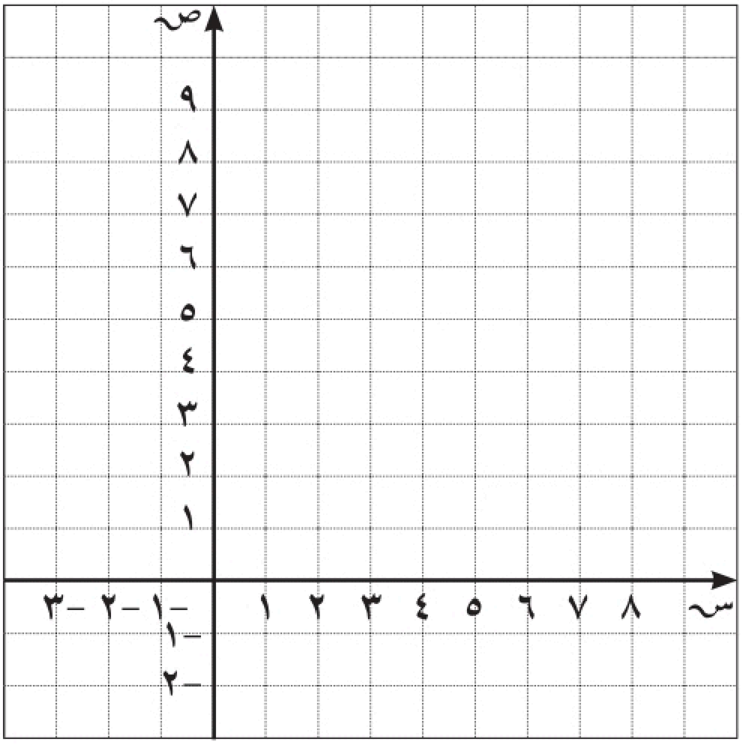
الدالّة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبَّقة على التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}	التمثيل البياني
ص = س^{٢} + د	إزاحة رأسية د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجَبة ، وإزاحة رأسية | د | وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة .	
ص = (س + هـ)^{٢}	إزاحة أفقية هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجَبة ، وإزاحة أفقية | هـ | وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة .	
ص = −س^{٢}	اِنعكاس في محور السينات .	

مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية $ص = س^{٢}$ ، مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوالّ التالية

١ $ص = س^{٢} - ٣$

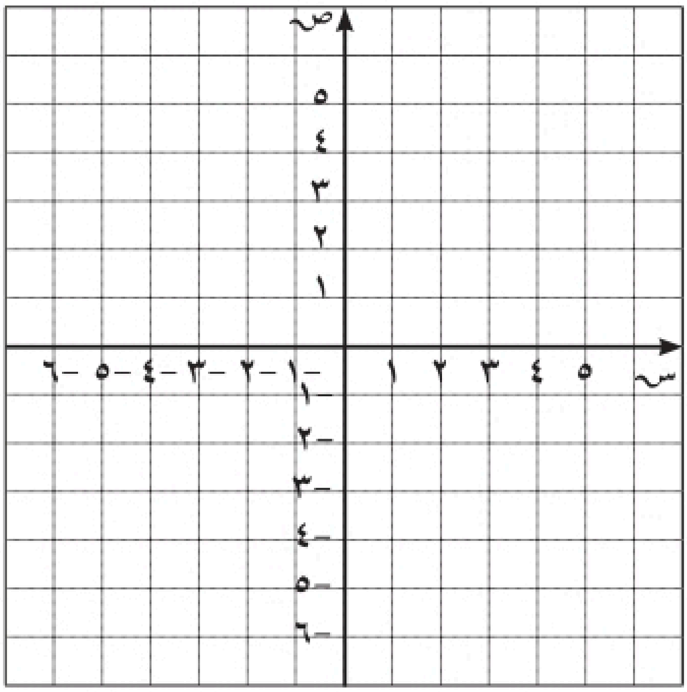


٢ $ص = (س - ٤)^{٢}$

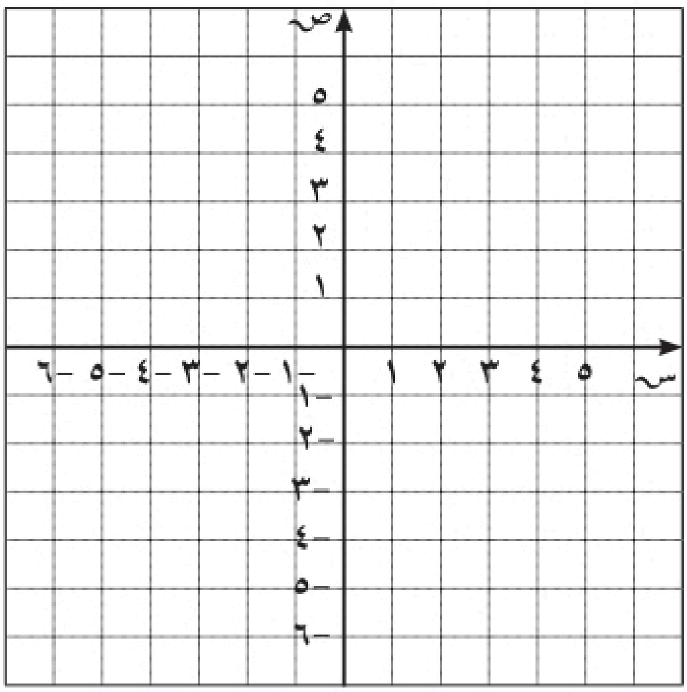


مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} ، مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوالّ التالية

ص = (س – ٢)^{٢} + ١



ص = – (س + ١)^{٢} – ٢



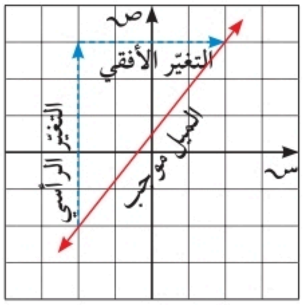
٧-١ الميل
Slope

ملاحظة :
$$\frac{\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}}} = \frac{\text{ص}_{\text{١}} - \text{ص}_{\text{٢}}}{\text{س}_{\text{١}} - \text{س}_{\text{٢}}}$$

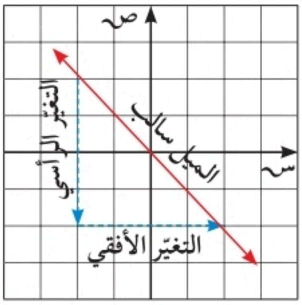
إذا كانت أ ($\text{س}_{\text{١}}$ ، $\text{ص}_{\text{١}}$) ، ب ($\text{س}_{\text{٢}}$ ، $\text{ص}_{\text{٢}}$) نقطتين في المستوى الإحداثي فإنّ :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}}} \quad ، \quad \text{س}_{\text{٢}} \neq \text{س}_{\text{١}}$$

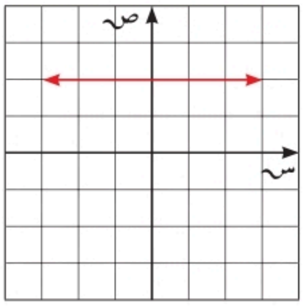
لاحظ أنّ :



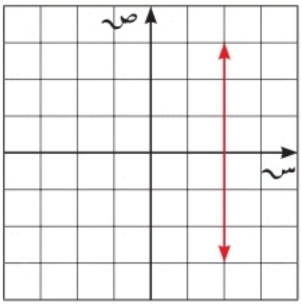
ميل المستقيم موجَب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ مما يلي :

أ) أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤)

ب) د (−١ ، ٦) ، هـ (٤ ، ٥)

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = ٧ س + ١

ب ص = −٥ − ٢ س

جـ ٢ص = − ٩ س

د ٥ س = ٤ − ص

−ص + س + ٢ = ٠

ص = ٩

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = ٣ س + ٤

ب ص = -٣ - ٧ س

جـ ص = ٥ س

د ٢ س + ص = ١

هـ ٣ ص - ٦ س + ٧ = ٠

و ٢ ص = ٣ س + ٨

ليكن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $م_٢$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_٢}$:

- $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢} \Leftrightarrow م_١ = م_٢$
- $\overleftrightarrow{ل_١} \perp \overleftrightarrow{ل_٢} \Leftrightarrow م_١ \times م_٢ = -١$ (أي أن : $م_١ = \frac{-١}{م_٢}$)

أكمِل ما يلي :

ميل $\overleftrightarrow{ل}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٢		
$-\frac{٢}{٣}$		
		-٤
	$\frac{٢}{٥}$	

مثال (١) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ن}$ يمرّ بالنقطتين أ (−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣) ،
وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧ ، فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ن} \parallel \overleftrightarrow{ك}$.

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤ ، أثبت أنّ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ك}}$.

مثال (٣) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ص = ٢ س + ١

أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$.

تدرّب (٢)

إذا كان ميل م ن هو $\frac{١}{٤}$ ، حدِّد أيًّا من المستقيمين التاليين عمودي على م ن .

أ ع م الذي معادلته :

٢ ص − ٨ س − ٣ = ٠

ب أ ب الذي يمرّ بالنقطتين :

أ (٦ ، ٩) ، ب (٧ ، ٥)

تدرّب (٤)

إذا كان أ ب ⊥ جـ د ، أ ب يمرّ بالنقطتين أ (٥ ، ٣) ، ب (٨ ، ٦) .

فأوجِد ميل جـ د .

إذا كان م ن يمرّ بالنقطتين م (٢ ، ٦) ، ن (٧ ، ٦) ،

هـ ط يمرّ بالنقطتين هـ (٢ ، ١) ، ط (٥ ، ١) .

أثبِت أنّ : م ن // هـ ط .

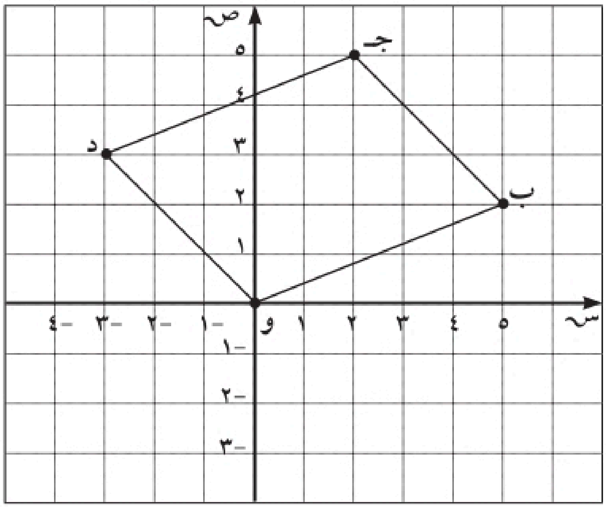
إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = ٤ س + ٣

ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ن}}$: ٤ ص – ١٦ س = ١ ، فهل المستقيمان متوازيان ؟ وضِّح ذلك .

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ}}$ يمرّ بالنقطتين (٨ ، ١) ، (٣ ، ٤)

ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب}}$: ١٠ س – ٦ ص = –٥ ، فهل المستقيمان متعامدان ؟ وضِّح ذلك .

في الشكل الرباعي و ب جـ د ، أثبِت أنّ : $\overline{\text{و ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$.

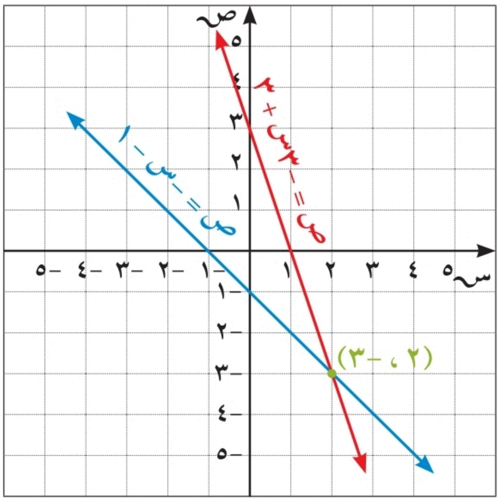


إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ حيث معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ٨ س – ٢ ص = ٩ ،

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

٧-٣ حل معادلتين خطّيتين (من الدرجة الأولى) في متغيّرين

Solving Linear (First degree) Equations with Two Variables



مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص + ٣ س – ٣ = ٠ ، ص + س = –١

الحلّ :

- نكتب معادلتي المستقيمين على الصورة :

ص = – ٣ س + ٣ ، ص = – س – ١

- نرسم بيان المستقيمين :

ص = – ٣ س + ٣			
س	٠	١	٢
ص	٣	٠	–٣

ص = – س – ١			
س	٠	١	٢
ص	–١	–٢	–٣

نلاحظ أنّ : المستقيمين تقاطعا في النقطة (٢ ، –٣)

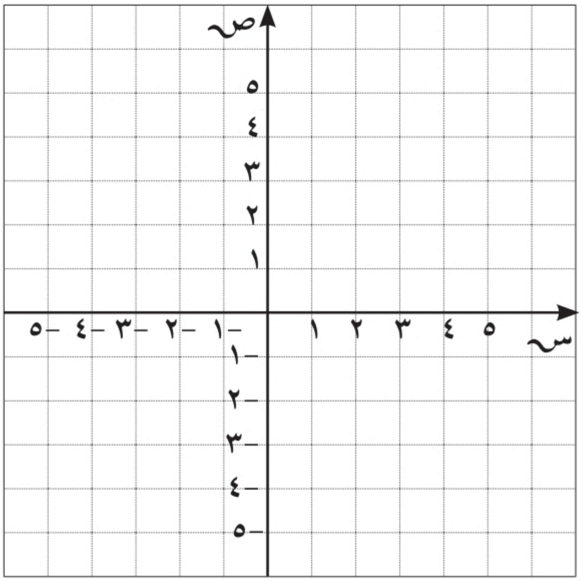
∴ مجموعة الحلّ = { (٢ ، –٣) }

١ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص – ٣ س + ٤ = ٠ ، ص – س = –٤

س			
ص			

س			
ص			



المتباينات الخطّية (منطقة الحل المشترك)
The Graph of Linear Inequalities

خطوات إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا :

(١) نرسم خطّ الحدود للمتباينة باستخدام الخط **المتّصل** في حالة : ≥ ، ≤
والخط **المتقطّع** في حالة : < ، > .

(٢) نقوم بتحديد المنطقة التي تمثّل جانب منطقة حل المتباينة ، ولتحديد هذا الجانب نختار أيّ نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ونعوّض بها في المتباينة ، إذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل ، وإذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل .

(٣) في حالة : ≥ ، ≤ تتكوّن منطقة الحل من مجموعة نقاط خطّ الحدود اتّحاد مجموعة نقاط جانب منطقة الحل ،
وفي حالة : < ، > تتكونّ منطقة الحل من مجموعة نقاط جانب منطقة الحل فقط .

(٤) نظلّل المنطقة التي تمثّل منطقة حل المتباينة .

تدرّب

أُرسم خطّ الحدود للمتباينة : س + ص ≥ ٣

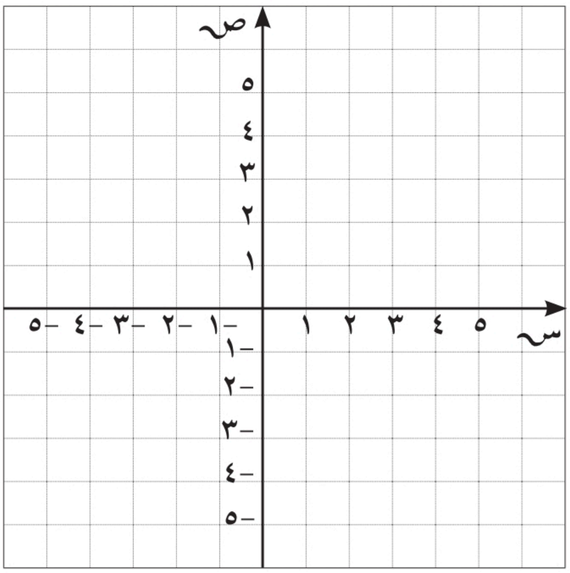
• المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :

....

• كوّن جدولًا لقيم المعادلة المناظِرة :

ص = − س + ٣			
س			
ص			

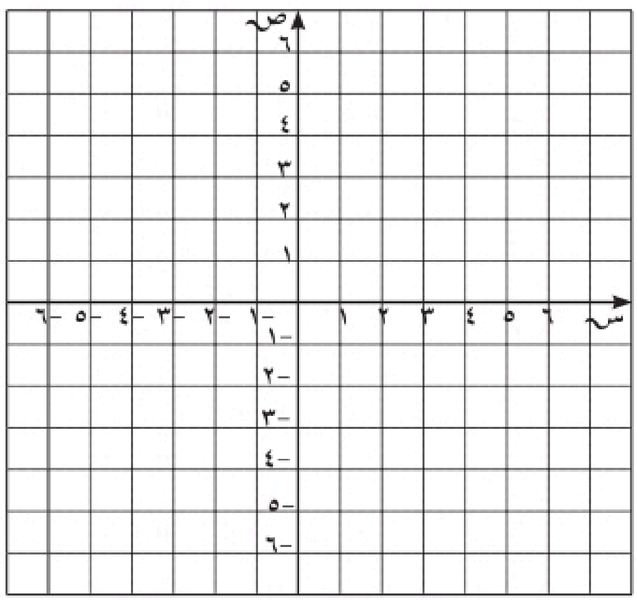
• أُرسم خطّ الحدود (........................) .



تدرّب

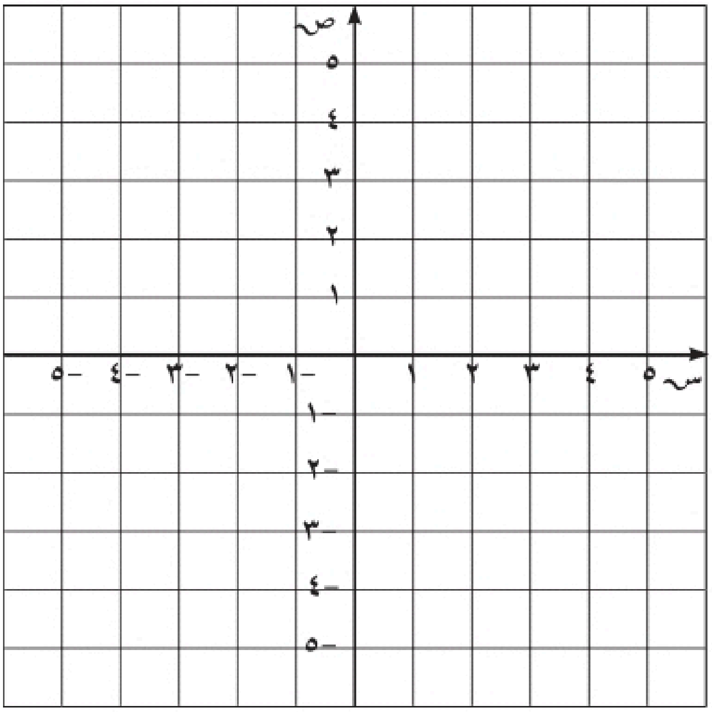
مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

ص < س ، ص ≥ ٢



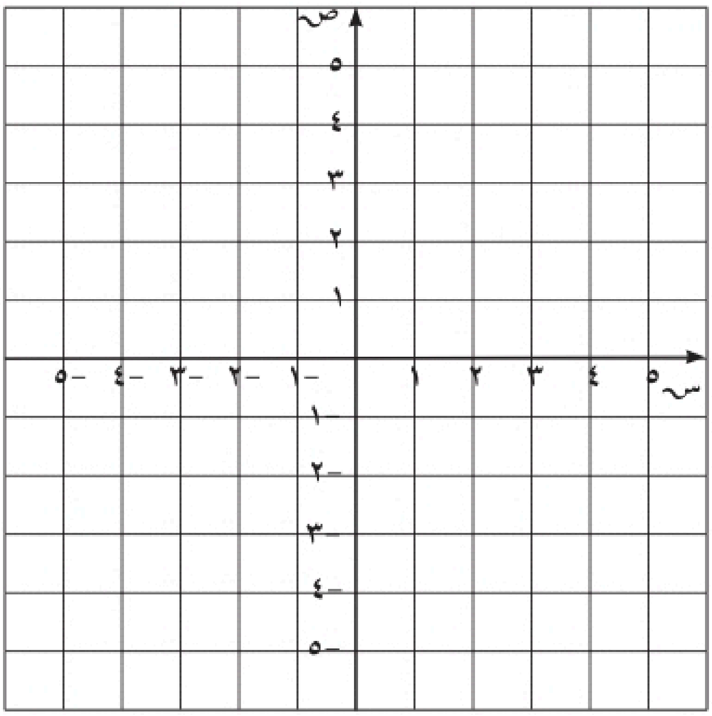
مثل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة :

ص > ٣ س – ١



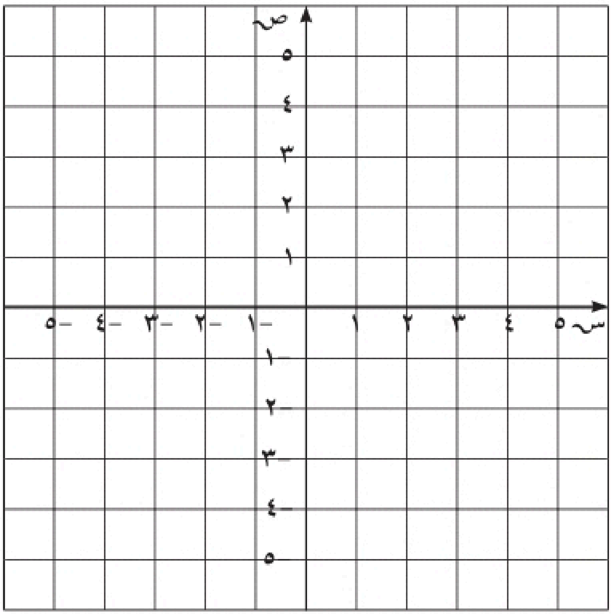
مثل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة :

ص ≤ ٤ – س



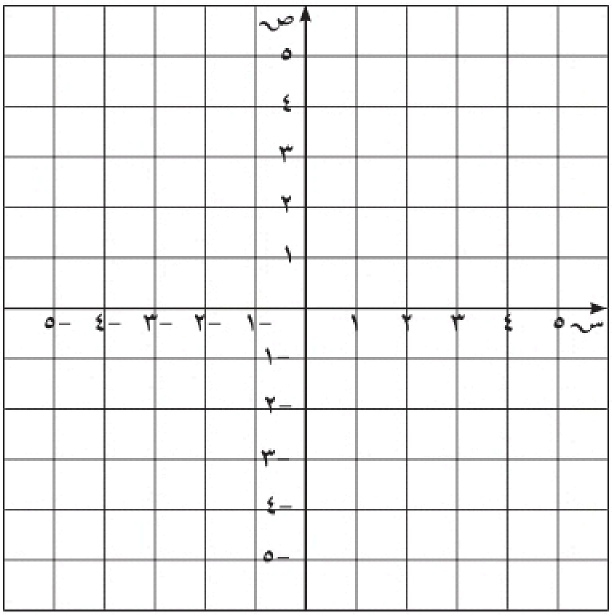
مثل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص > ٢ س ، ص < ١ – س



مثل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص < ٣ س – ٢ ، ص ≤ – ٢



٨-١ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث
Midsegment of Triangle

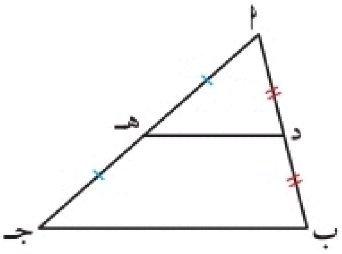
نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

في المثلّث أ ب جـ :

∵ د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

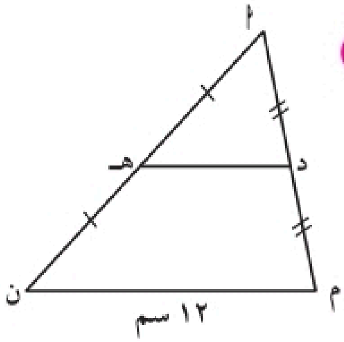
∴ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، دهـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



تدرّب (١) :

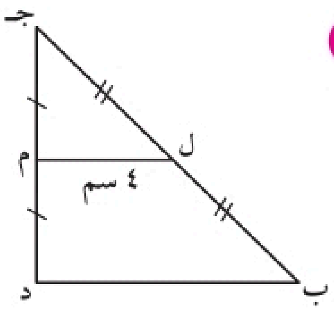
في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



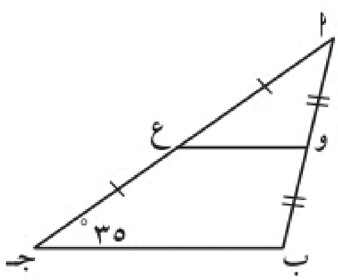
د هـ = ...

ب



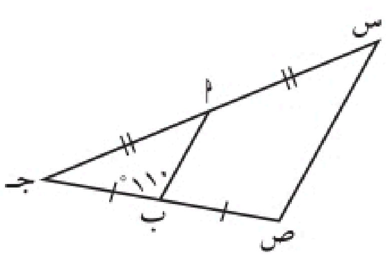
ب د = ...

جـ



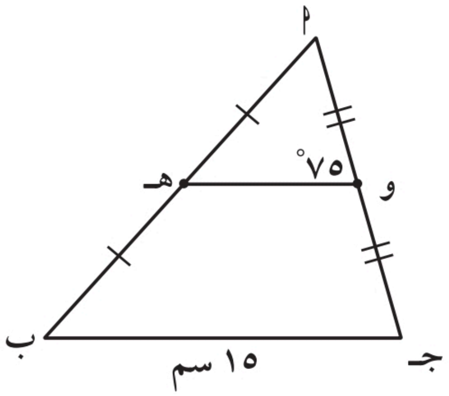
ق (أ$\hat{\text{ع}}$ و) = ...

د



ق ($\hat{\text{ص}}$) = ...

مثال (١) :

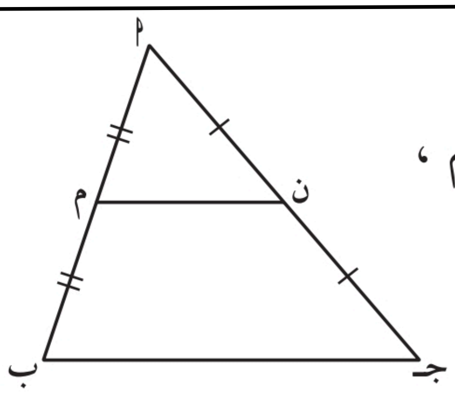


في الشكل المقابل ٲ ب جـ مثلّث فيه :

ٲو = و جـ ، ٲهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ٯ (ٲ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ٯ ($\hat{\text{جـ}}$) .



ٲ ب جـ مثلّث فيه :

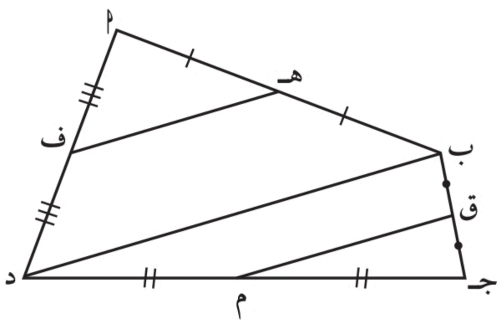
م منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ٲجـ}}$ ، ٲب = ١٠ سم ،

ٲجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١١ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{ن م}}$.

(٢) محيط Δ ٲ ن م .

تدرّب (٣)



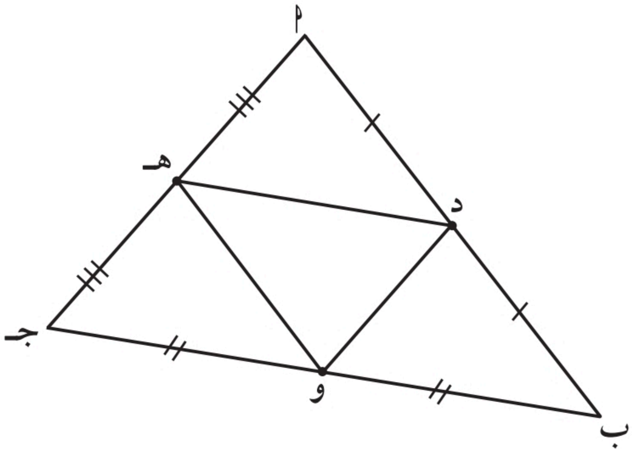
في الشكل الرباعي ٲ ب جـ د :

إذا كان هـ ، ف ، م ، ق منتصفات الأضلاع

ب ٲ ، ٲ د ، د جـ ، جـ ب على الترتيب .

أثبِت أنّ : هـ ف // ق م

تدرّب (٤)



ٲ ب جـ مثلّث فيه :

ٲ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٤ سم ،

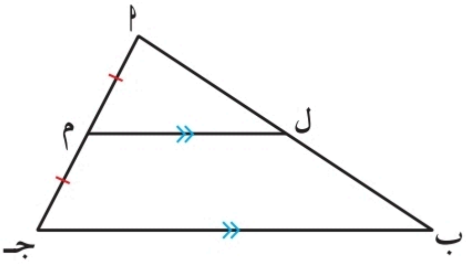
ٲ جـ = ١١ سم ، د ، هـ ، و منتصفات

ٲ ب ، ٲ جـ ، ب جـ على الترتيب .

أوجِد بالبرهان محيط المثلّث د و هـ .

نظرية :

إذا رُسِم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

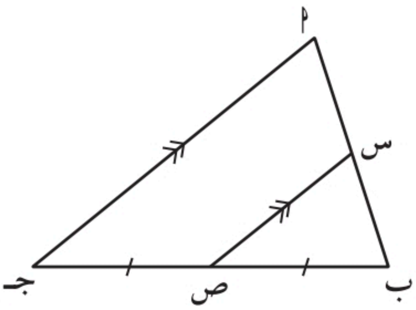


في المثلّث ﻫ ب جـ :

∵ م منتصف $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ل منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$

تدرّب (٥) :

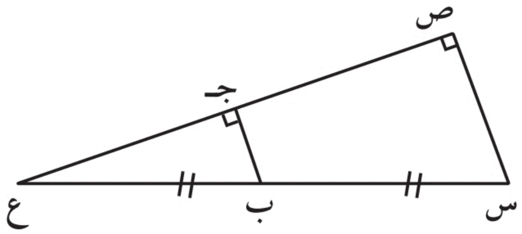


ﻫ ب جـ مثلّث فيه : ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ﻫ}}$ ، ﻫ س = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان ب س .

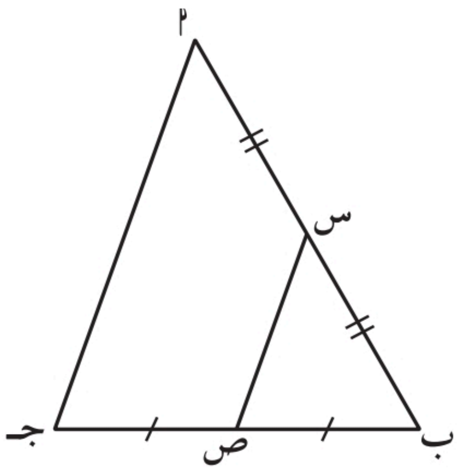
تدرّب (٦)



س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،

ب منتصف س ع ، ب جـ ⊥ ص ع .

أثبِت أنّ : ص جـ = ع جـ .



أ ب جـ مثلّث فيه :

س منتصف أ ب ، ص منتصف ب جـ ،

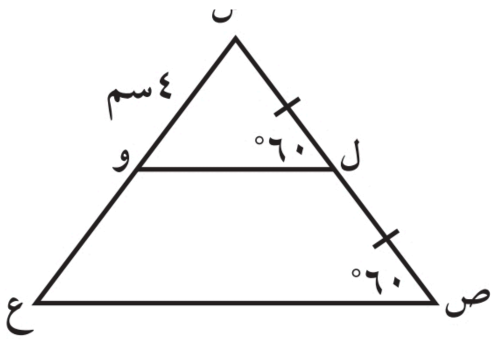
ق (بˆ) = ٦٠° ، ق (أˆ) = ٥٠° .

أوجِد ق (س صˆ ب) .

س ص ع مثلّث فيه : ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،

ق ($\hat{\text{ص}}$) = ق (س $\hat{\text{ل}}$ و) = ٦٠° ، س و = ٤ سم .

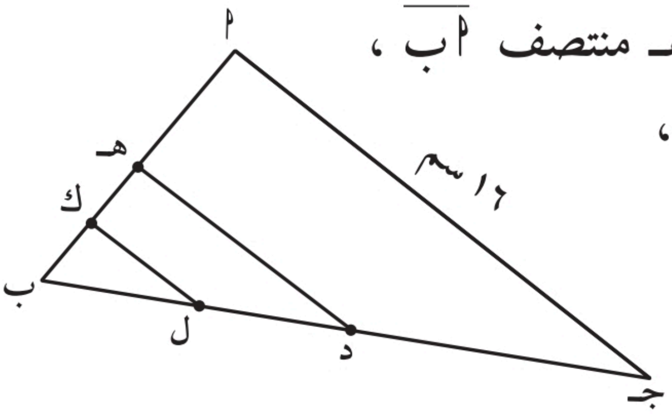
أوجِد طول $\overline{\text{س ع}}$.



ا ب جـ مثلّث فيه : ا جـ = ١٦ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ،

د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ك منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$ ،

$\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$. أوجِد طول $\overline{\text{ك ل}}$.



٨-٢ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

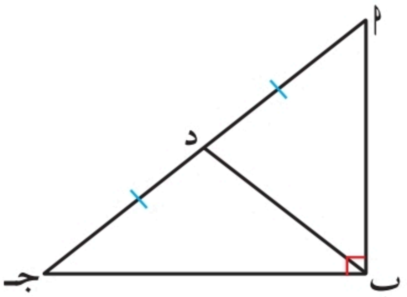
نظرية :

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .

في المثلّث أ ب جـ :

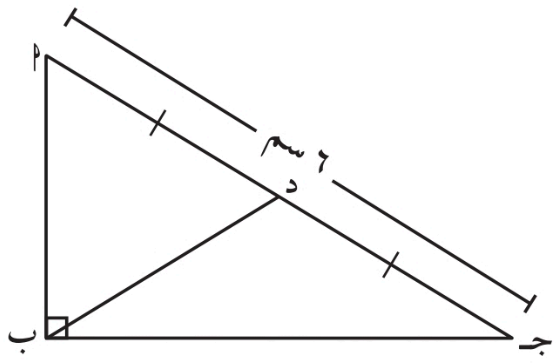
∵ ق (ب̂) = ٩٠°، د منتصف أجـ

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أجـ

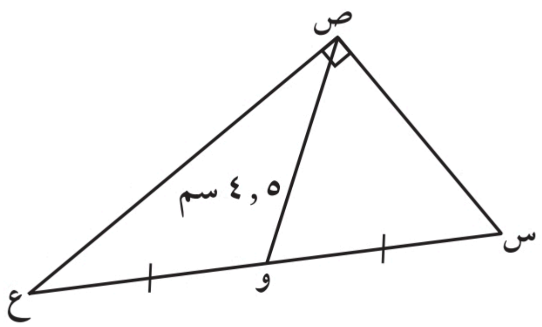


تدرّب (١)

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



طول ب د = ...



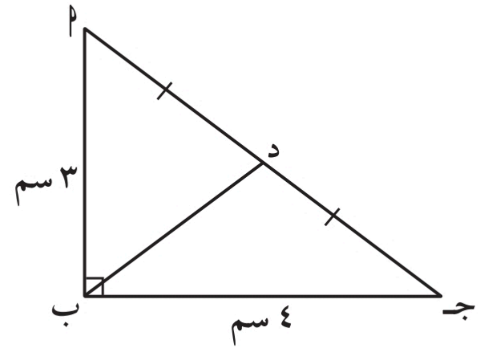
س ع = ...

مثال (١) :

ٮ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ٮ ب = ٣ سم ،

ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{ٮ جـ}}$.

أوجِد بالبرهان طول $\overline{\text{ب د}}$.

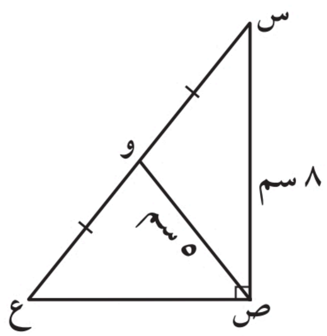


تدرّب (٢)

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،

ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

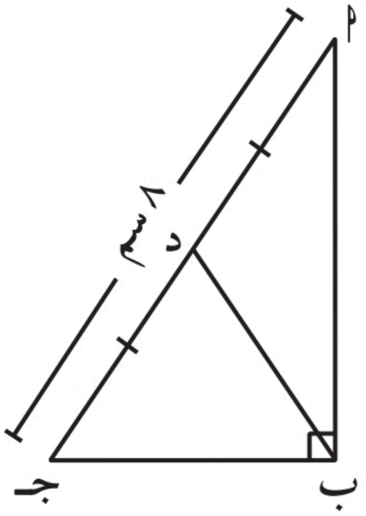
أوجد بالبرهان : (١) س ع (٢) ص ع .



أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،

د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، أجـ = ٨ سم .

أوجد بالبرهان طول $\overline{\text{ب د}}$.



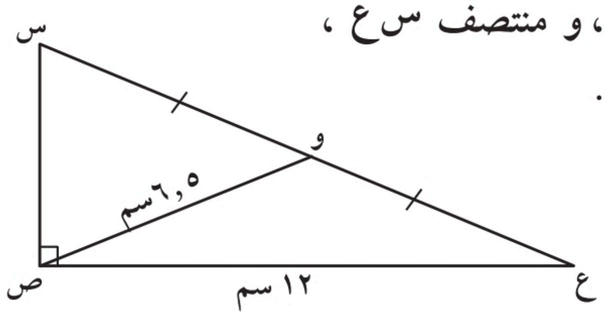
س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،

ص و = ٦,٥ سم ، ع ص = ١٢ سم .

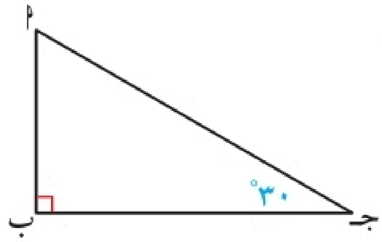
أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) س ع

(٢) س ص



نتيجة (١) : في المثلّث الثلاثيني الستّيني يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر .

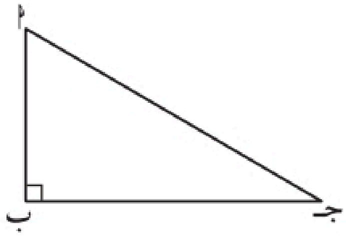


∵ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

وعكس ذلك أيضًا صحيح :

نتيجة (٢) : في المثلّث القائم الزاوية إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة مساوِيًا نصف طول الوتر ، فإنّ قياس الزاوية المقابِلة لهذا الضلع ٣٠° ويُسمّى المثلّث ثلاثينيًّا ستّينيًّا .



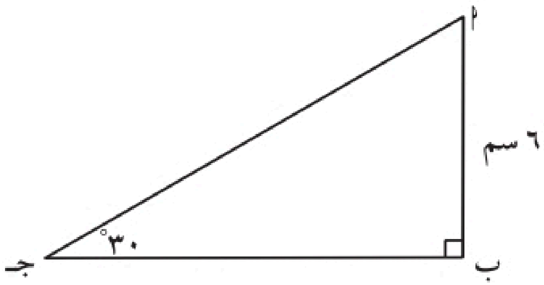
∵ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

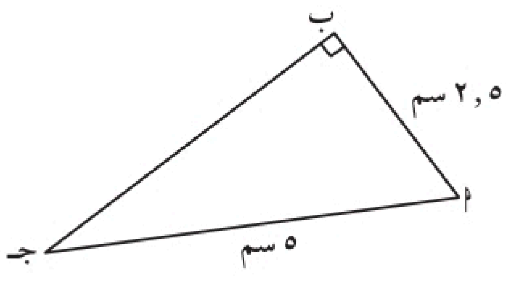
∴ المثلّث أب جـ ثلاثيني ستّيني

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

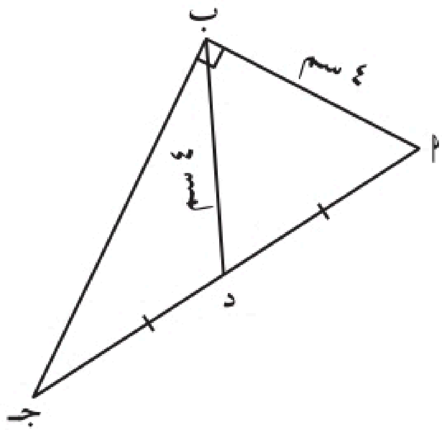


أجـ = ...



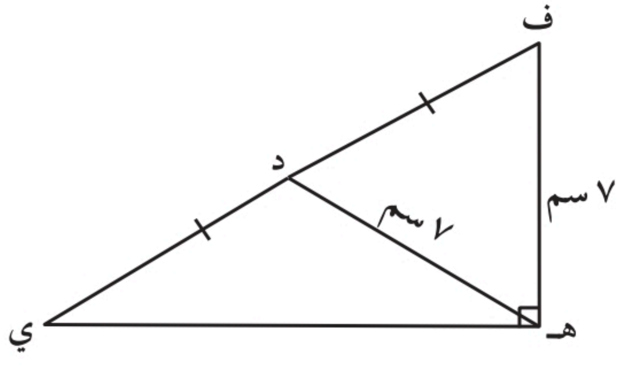
ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ...

مثال



في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان : **(١)** ق (جـ^)   **(٢)** ق (أ^) .

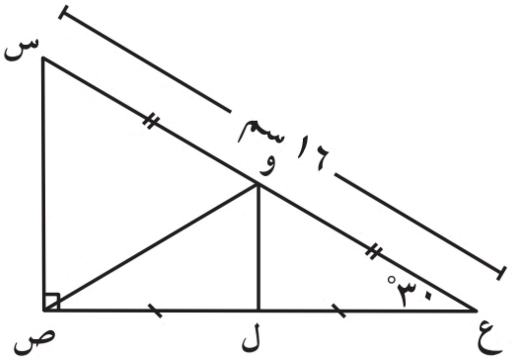


في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) ق (ي^)

(٢) ق (ف^) .



صمّم مهندس جسرًا للمشاة ، فقام برسم المثلّث في الشكل المقابِل كدعامة للجسر حيث س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، س ع = ١٦ سم ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ل منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ ، ق ($\hat{\text{ع}}$) = °٣٠ .

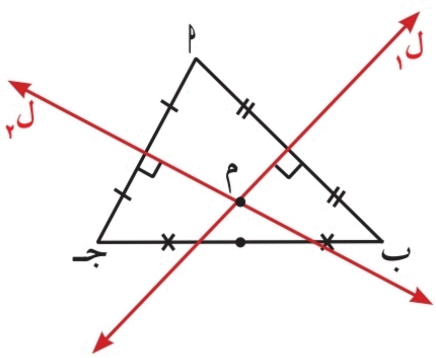
أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ص و

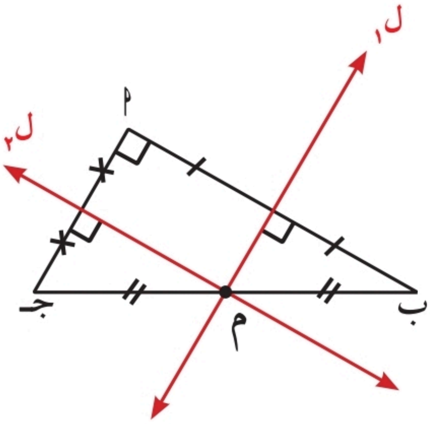
(٢) س ص

(٣) و ل

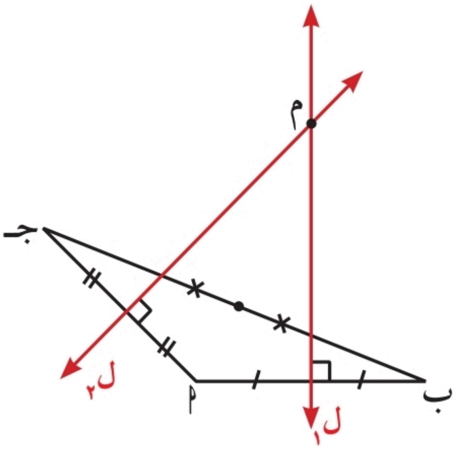
٨-٣ محاور أضلاع المثلّث
Perpendicular Bisectors of a Triangle



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية

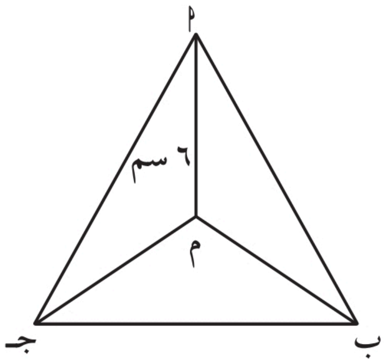


مثلّث منفرج الزاوية

نظرية :
محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

- **نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع داخله .**
- **نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .**
- **نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع خارجه .**

تدرّب (١)



المثلّث ٬ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

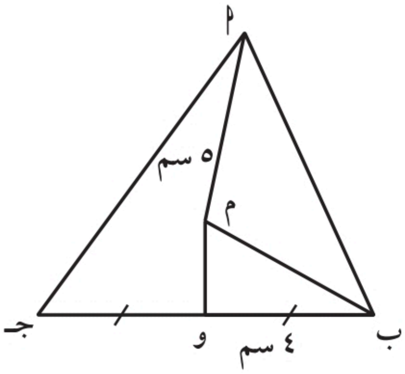
م٬ = ٦ سم .

أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م ب = ...

م جـ = ...

تدرّب (٢)

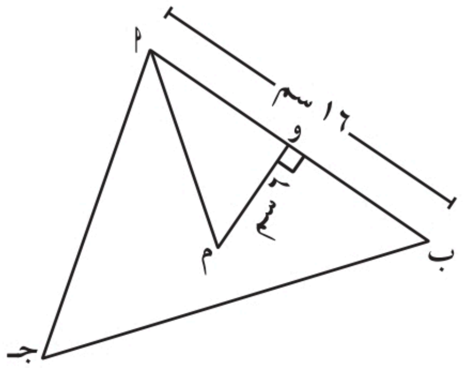


Δ ٬ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

٬م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و .

تدرّب (٣)

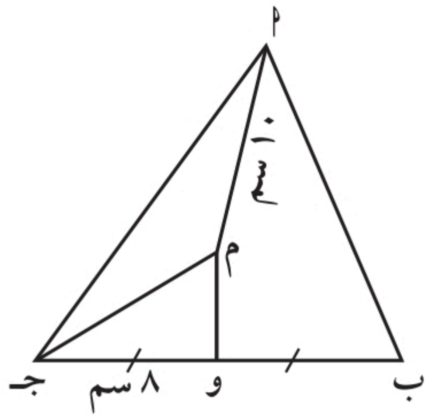


ا ب جـ مثلّث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ا ب جـ ،

$\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ، ا ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم .

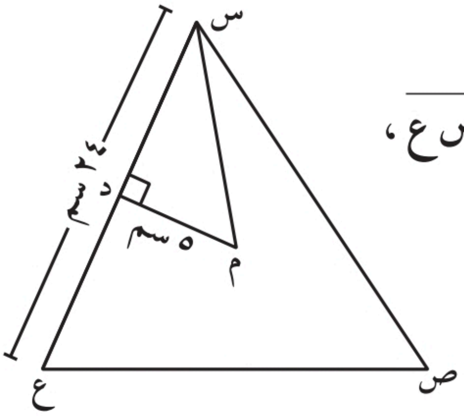
أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) م ب (٢) محيط Δ ا م ب .



Δ ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

ا م = ١٠ سم ، و جـ = ٨ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

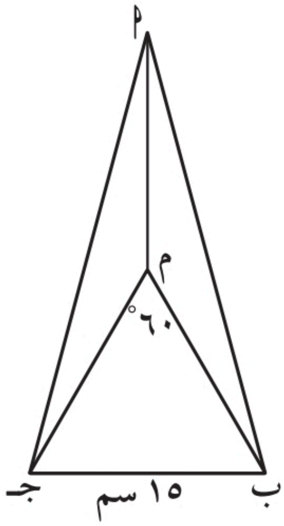
أوجد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{م جـ}}$ (٢) طول $\overline{\text{م و}}$



س ص ع مثلّث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع ، $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{س ع}}$ ،

س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم . أوجِد طول $\overline{\text{م ص}}$.



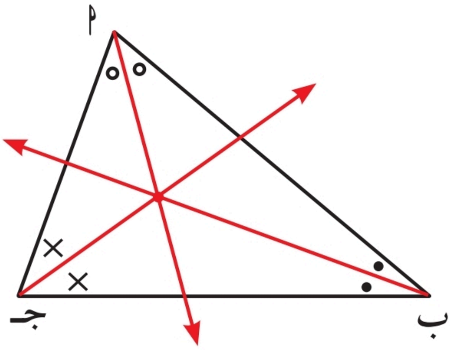
أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

إذا كان ب جـ = ١٥ سم ، ق (ب $\hat{\text{م}}$ جـ) = ٦٠° .

(١) أثبِت أن المثلّث ب م جـ متطابق الأضلاع .

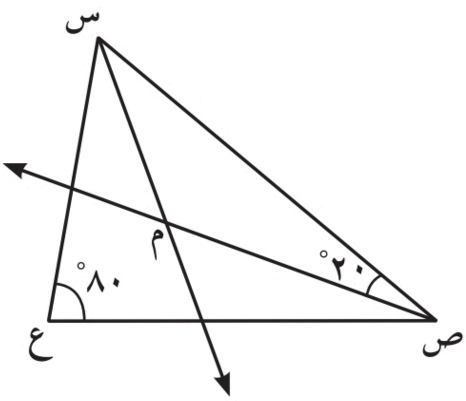
(٢) أوجِد م أ .

٤-٨ منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث
Interior Angles Bisectors of a Triangle



نظرية :
منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

تدرّب (١) :



في الشكل المقابِل :

م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

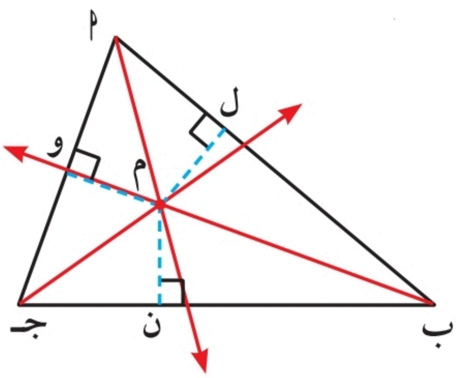
ق (م صَ ع) = ... ، ق (س صَ ع) = ... ،

ق (ص سَ ع) = ... ، ق (ص سَ م) = ...

نتيجة : نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

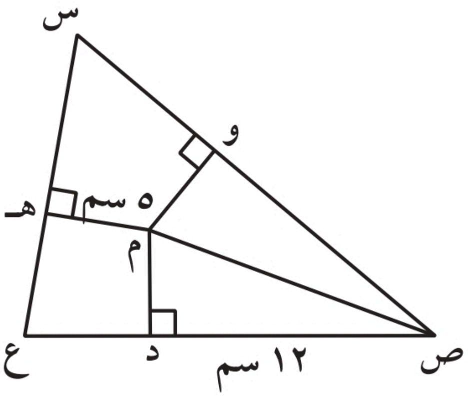
∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

∴ م ل = م ن = م و



معلومة مفيدة :
بعد نقطة عن مستقيم هو طول العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم.

تدرّب (٢)



المثلث س ص ع فيه :

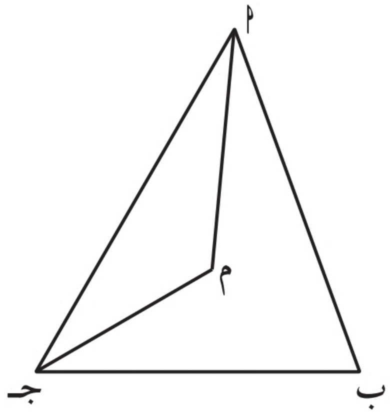
م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

م هـ = ٥ سم ، ص د = ١٢ سم .

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م د = ...

م ص = ...



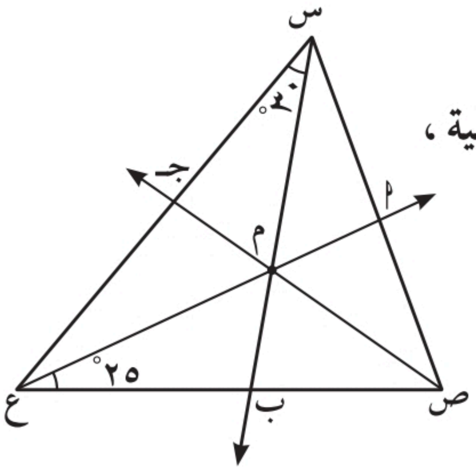
تدرّب (٣)

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٧٠° ، ق (م $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠° .

فأوجِد بالبرهان ق (م $\hat{أ}$ جـ) .

مثال (١) :

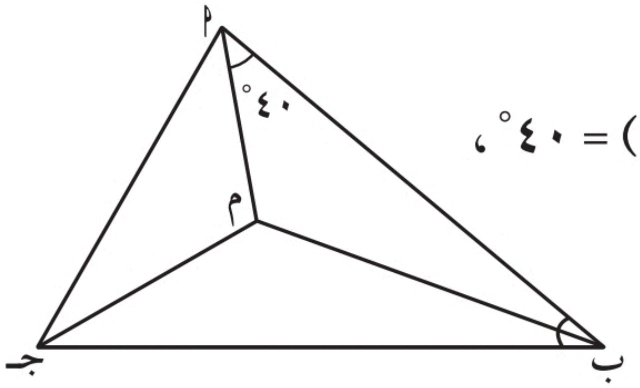


Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م ع̂ ص) = ٢٥° ، ق (م س̂ ع) = ٣٠° ،

فأوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ق (س ص̂ ع)   **(٢)** ق (م ص̂ ع)

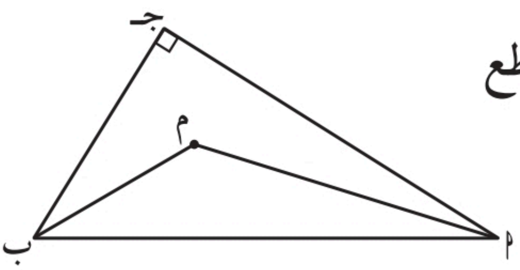


Δ أ ب جـ فيه : ق (أ ب̂ جـ) = ق (ب أ̂ م) = ٤٠° ،

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

أوجِد بالبرهان ق (أ جـ̂ م) .

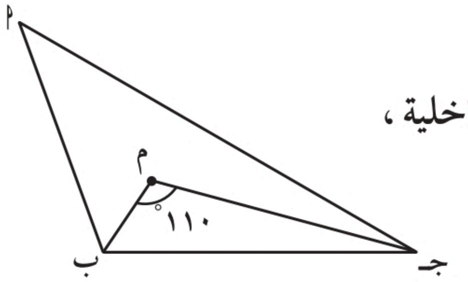
مثال (٢) :



Δ ٱب جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ، فأوجِد بالبرهان ں (ٱ$\hat{م}$ب) .

الحلّ :

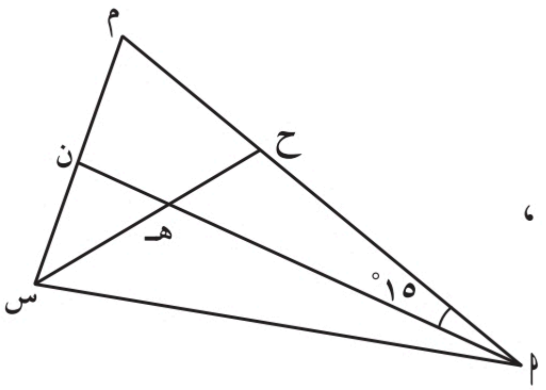
تدرّب (٤)



Δ ٱب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ں (جـ$\hat{م}$ب) = ١١٠° .

فأوجِد بالبرهان ں (جـ$\hat{ٱ}$ب) .

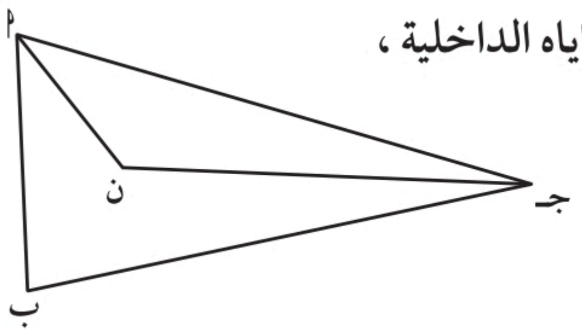


م ا س مثلّث فيه : ق ($\hat{م}$) = ٧٠° ،

ق (م $\hat{ا}$ ن) = ١٥° ، ق (ا $\hat{س}$ ح) = ٤٠° ،

إذا كان $\overleftarrow{سح}$ منصِّف $\hat{س}$ ، $\overline{ان}$ ∩ $\overline{سح}$ = { هـ } ،

فأثبت أنّ هـ نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث م ا س .



٣ Δ ا ب جـ فيه : ن نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان :

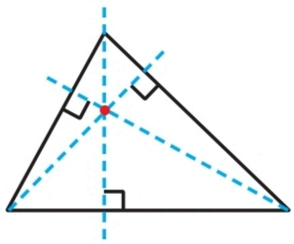
ق (ن $\hat{جـ}$ ا) + ق (ن $\hat{ا}$ جـ) = ٥٠° ،

فأوجِد بالبرهان ق ($\hat{ب}$) .

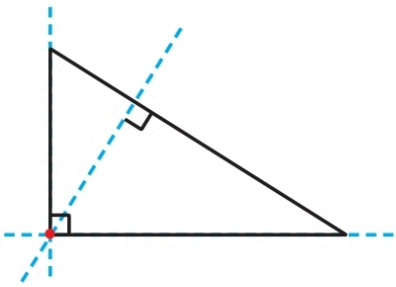
نظرية :

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

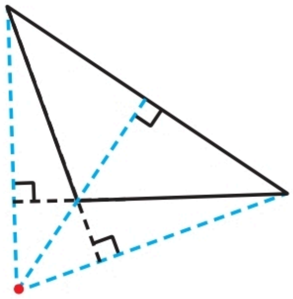
لاحِظ أنّ :



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث الحادّ الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلّث .



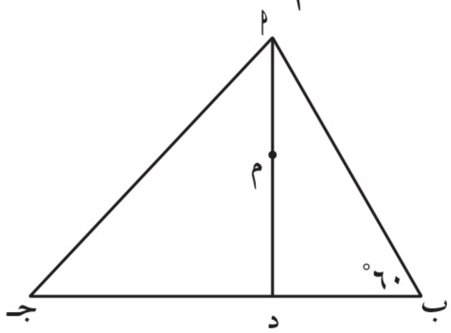
نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث المنفرج الزاوية على أضلاعه تقع خارج المثلّث .

تدرّب (١)

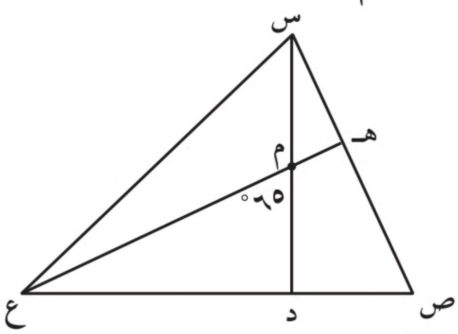
أ في المثلث أ ب جـ : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، م ∈ $\overline{\text{أد}}$ ، أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ...

ق (د $\hat{\text{أ}}$ ب) = ...

ب في المثلث س ص ع : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\overline{\text{عهـ}}$ ∩ $\overline{\text{سد}}$ = { م } . أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ق (م $\hat{\text{ع}}$ د) = ...

ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ...

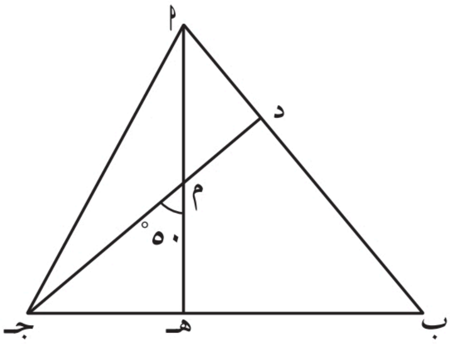
مثال :

أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة

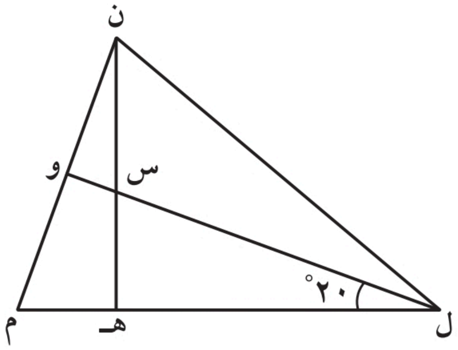
من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠° ،

إذا كان جـ د ∩ أ هـ = { م } .

فأوجِد بالبرهان ق (ب̂) .



تدرّب (٢)



ن ل م مثلّث فيه : س هي نقطة تقاطع

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

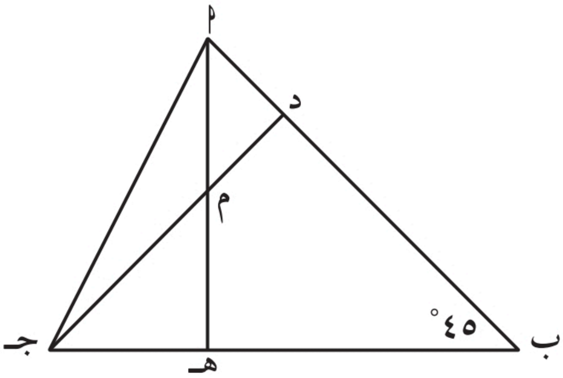
ل و ∩ ن هـ = { س } ،

وكان ق (و ل̂ م) = ٢٠° .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي: (١) ق (و م̂ ل) (٢) ق (و س̂ هـ) .

تمـــرَّنْ :

١ Δ أ ب جـ فيه : ق (ب̂) = ٤٥°،



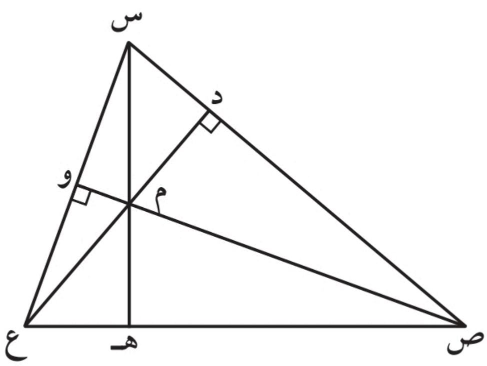
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه،

أهـ ∩ جـ د = { م } .

أوجد بالبرهان : **(١)** ق (ب أ̂ هـ) **(٢)** ق (د م̂ هـ)

---

٢ Δ س ص ع فيه : ق (س ع̂ ص) = ٧٠°،



ع د ⊥ س ص ، ص و ⊥ س ع .

(١) أثبِت أنّ : س هـ ⊥ ص ع

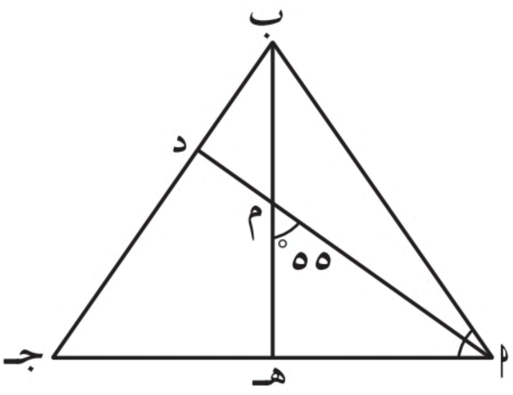
(٢) أوجِد بالبرهان ق (هـ س̂ ع)

Δ ا ب جـ فيه :

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس

المثلّث على أضلاعه ، $\overline{\text{ا د}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{$ م $\}$ ،

ق (ب $\hat{\text{ا}}$ جـ) = ق (ا $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٥° .

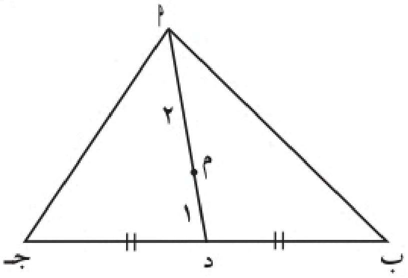


(١) أوجِد بالبرهان ق (ا $\hat{\text{جـ}}$ ب)

(٢) ما نوع المثلّث ا ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه ؟

٦-٨ القطع المتوسّطة للمثلّث
Medians of a Triangle

نظرية :
القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .

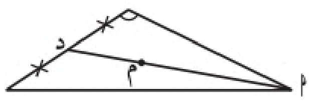


في $\triangle$ أ ب جـ :
$\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسّطة ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .
أكمِل :

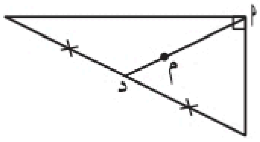
أ م = ... م د	م د = ... أ د	أ م = ... أ د
م د = ... أ م	أ د = ... م د	أ د = ... أ م

تدرّب (١)

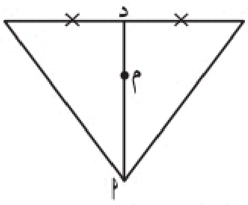
في كلّ من المثلّثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ، أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



د م = ٣ سم
أ م = ... سم
أ د = ... سم

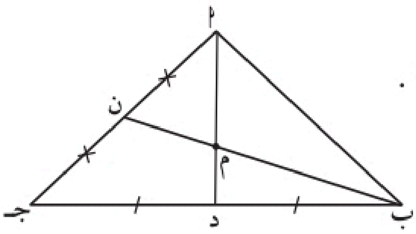


أ م = ٤ سم
د م = ... سم
أ د = ... سم



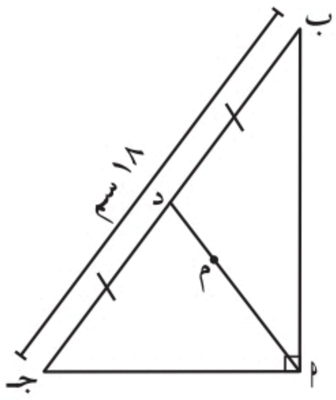
أ د = ١٨ سم
د م = ... سم
أ م = ... سم

تدرّب (٢)



أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة .
إذا كان ب م = ١٠ سم فإنّ :
ن م = ... ، ب ن = ...
إذا كان أ د = ١٢ سم فإنّ :
أ م = ... ، د م = ...

تدرّب (٣)

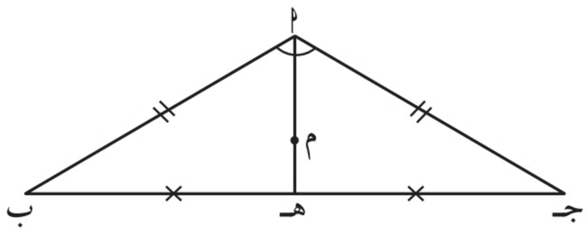


ءب جـ مثلّث قائم الزاوية في ء ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ١٨ سم ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ءب جـ .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) ءد (٢) ءم .

مثال :



ءب جـ مثلّث فيه :

ءب = ءجـ = ٢٤ سم ،

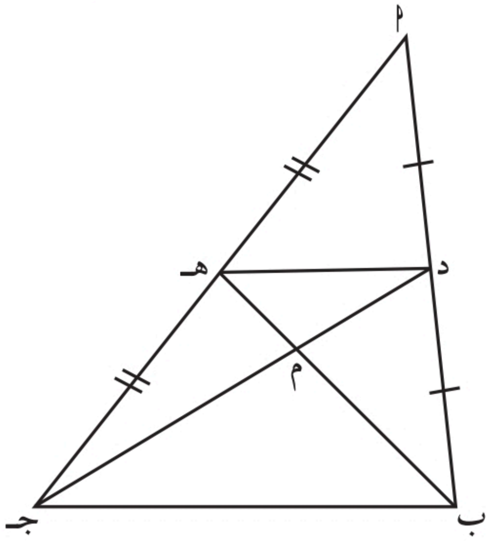
ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) ءهـ (٢) م هـ (٣) م ء .

تدرّب (٤)

في الشكل المقابل :



د منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ٲجـ}}$ ،

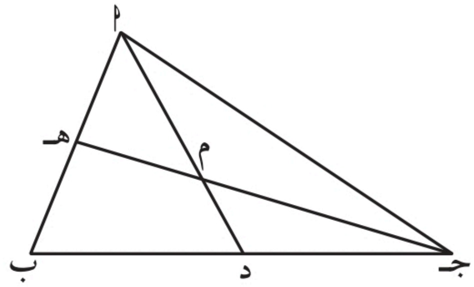
$\overline{\text{دجـ}} \cap \overline{\text{ب هـ}}$ = {م} ،

ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم .

أوجد بالبرهان محيط Δ د م هـ .

تمـــرَّنْ :

❶ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{ٲد}} \cap \overline{\text{جـ هـ}}$ = {م} ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ٲب جـ ،

إذا كان ٲم = ١٨ سم ، جـ هـ = ٣٠ سم .

فأوجد بالبرهان :

(١) م هـ (٢) جـ م (٣) ٲد

٢ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فيه :

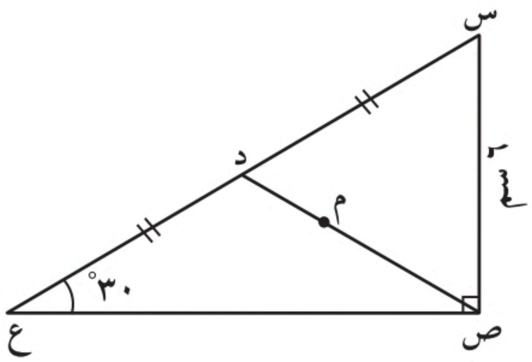
ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

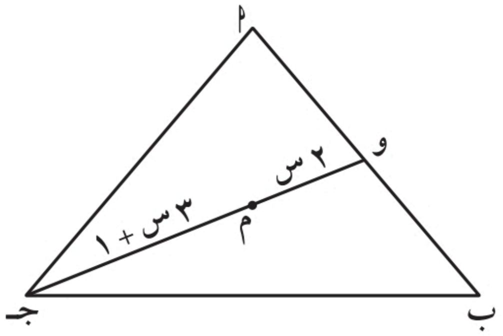
س ص = ٦ سم .

أوجد كلًّا ممّا يلي :

(١) س ع (٢) ص د (٣) ص م



تدرّب (٥)

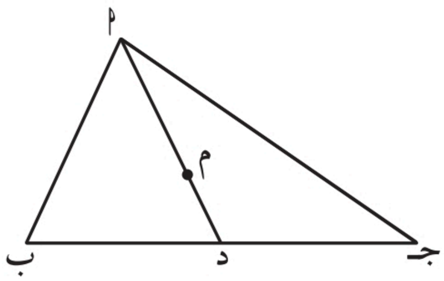


المثلّث ٵب جـ فيه : $\overline{\text{جـ و}}$ قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

إذا كان م و = ٢ س ، جـ م = ٣ س + ١ .

أوجد بالبرهان قيمة س.



في الشكل المقابِل : $\overline{\text{ٵد}}$ قطعة متوسطة للمثلث ٵب جـ ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ٵب جـ ،

إذا كان ٵم = ٥ س ، م د = س + ٣ ،

فأوجد بالبرهان ٵد .

٩-١ النسبة المئوية
Percent

تدرّب (١)

إذا كان سعر لوحة فنّية ١٥٠ دينارًا ، وتمّ خصم ١٠٪ من سعرها الأصلي .
فما قيمة هذا الخصم ؟

مثال (١) :

باعت مكتبة ١٨٠ كتابًا والتي تمثّل ٣٠٪ من كتبها المعروضة.
أوجِد عدد الكتب التي كانت في المكتبة قبل البيع.

تدرّب (٢)

باع محلّ للعطور ٤٠٪ من الكمّية المعروضة عنده ، والتي بلغت ٣٦٠ زجاجة عطر ،
فكم عدد زجاجات العطر التي كانت لديه ؟

تدرّب (٣)

أثناء موسم التخفيضات، اشترت شهد حقيبة كان سعرها ٢٤٠ دينارًا ، وتمّ خصم ٦٠ دينارًا من سعرها الأَصلي ، فما النسبة المئوية للخصم ؟

مثال (٢) :

قدِّر ٢٤٪ من ٨١

تدرّب (٤)

١ قدِّر ٧٤,٥ ٪ من ٢٣٩

٢ قدِّر ٣٣ ٪ من ٨٩

تدرّب (٥)

أعلن أحد المحلّات التجارية عن خصم ١١ ٪ على إحدى السلع . قدِّر قيمة الخصم إذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارًا .

تدرّب (٦)

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٣٥٠ ٠٠٠ دينار ثم انخفضت بنسبة ١٩ ٪ في العام الذي يليه ، فقدِّر قيمة الانخفاض .

تمــــرَّنْ :

١ جهاز كهربائِي سعره ١٢٠ دينارًا ، وفي موسم التنزيلات وُضِع عليه خصم بنسبة ١٥٪ ، فما قيمة الخصم ؟

....

....

....

....

....

٢ سُجِّل ٥٠ متعلّمًا في رحلة مدرسية إلى أبراج الكويت ، حضر منهم ٣٥ متعلّمًا فقط . ما النسبة المئوية للحاضرين ؟

....

....

....

....

٣ إذا كان ٢٠٪ من متعلّمي الصفّ التاسع في إحدى المدارس هو ٤٢ متعلمًا ، فما عدد متعلمي الصف التاسع ؟

....

....

....

....

....

٩-٢ النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية
Percentage Increase and Percentage Decrease

يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ + النسبة المئوية للتزايد)

كذلك يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ − النسبة المئوية للتناقص)

مثال (١) :

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٩٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠٪ .

الحلّ :

تدرّب (١)

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ١٢٠٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠ ٪ .

....

....

....

....

....

مثال (٢) :

تناقصت إيرادات إحدى المؤسَّسات التجارية في نهاية السنة المالية لعام ٢٠١٧ م حيث بلغت ٠٠٠ ٢٧٠ دينار ، بنسبة تناقص ١٠٪ عن نهاية السنة المالية ٢٠١٦ م. أوجِد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

تذكَّرْ أنّ :
مقدار التغيّر = القيمة النهائية – القيمة الأصلية

الحلّ :

تدرّب (٢)

أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٨٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠ ٪ . وما مقدار الزيادة ؟

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (٣) :

زادت أسعار بيع التلفاز في أحد المحلّات التجارية فبلغت ٢١٠ دنانير ، إذا كان السعر الأصلي ١٤٠ دينارًا ، فأوجِد النسبة المئوية للتزايد .

الحلّ :

> **تذكّرْ أنّ :**
> ١٠٠٪ = ١
> ٥٠٪ = $\frac{١}{٢}$

تدرّب (٣)

أوجِد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٣٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد السعر النهائي لحاسوب كان سعره ٧٠٠ دينار ثمّ زاد بنسبة ٢٠ ٪ .

٢ يعمل جاسم في محلّ بيع الهواتف المتنقّلة ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترَياته . إذا كان سعر البيع لأحد الهواتف ٧٠ دينارًا ، فكم سيدفع جاسم بعد الخصم ؟

٣ اِرتفعت قيمة سهم إحدى شركات الاتّصالات المدرَجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٤٪ . إذا كانت القيمة الأصلية للسهم ٤٠٠ فلس ، فأوجِد القيمة النهائية للسهم .

٤ أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت :

القيمة النهائية تساوي ٧٠٠ ، النسبة المئوية للتناقص تساوي ٦٥٪ .

٥ تزايدت إيرادات أحد المطاعم بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق ، إذا بلغت الإيرادات ٢٦٠٠ دينار ، فاحسب إيرادات الشهر السابق .

٦ اِشترت عائشة قلادة ذهبية بقيمة ٢٤٠٠ دينار بعد أن حصلت على خصم ٢٠٪ .
أوجِد السعر الأصلي للقلادة ، ثمّ أوجِد مقدار الخصم .

٧ أوجِد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢٤٠ والقيمة الأصلية ٢٠٠ .

مثال

رفعت إحدى شركات الطيران أسعارها بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منحت هذه الشركة موظَّفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظَّفات في هذه الشركة لتذكرة كان سعرها ٢٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

مثال

رفعت إحدى شركات الطيران أسعارها بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منحت هذه الشركة موظَّفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظَّفات في هذه الشركة لتذكرة كان سعرها ٢٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحلّ :

سعر التذكرة بعد الزيادة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٢٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٢٠٠ × ١٢٠٪

$= ٢٠٠ \times \frac{١٢٠}{١٠٠} = ٢٤٠$ دينارًا

القيمة النهائية للتذكرة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ٢٤٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ٢٤٠ × ٩٠٪

$= ٢٤٠ \times \frac{٩٠}{١٠٠} = ٢١٦$ دينارًا

تدرّب

يكلّف استئجار قارب من إحدى شركات تأجير القوارب في اليوم الواحد ٢٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، أوجِد تكلفة الاستئجار في الحالات التالية :

أ خصم ٢٠٪ ثم إضافة ١٠٪ نظير الخدمة .

ب خصم ٢٠ ٪ خصمًا بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة .

رفع أحد معارض السيّارات أسعاره بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منح هذا المعرض موظّفيه خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم سيدفع أحد الموظّفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيّارة كان سعرها ٩٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور مسرحية ٥٠ دينارًا ، ويُضاف إليها نظير الخدمة . أوجِد سعر التذكرة في كلّ من الحالات التالية :

أ خصم ٢٠٪ ثمّ إضافة ١٢٪ نظير الخدمة .

ب خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دنانير نظير الخدمة .

١٠-١ المساحة السطحية للهرم والمخروط
Surface Area of Pyramid and Cone

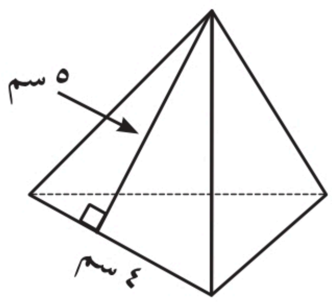
المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

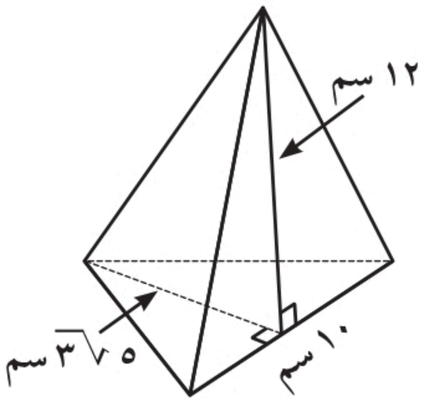
تدرّب (١)

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته ٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} وارتفاعه المائل ٥ سم ،
أوجِد مساحته السطحية .



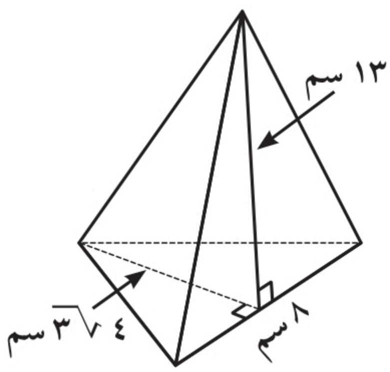
مثال (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاع قاعدته ٥ $\sqrt{3}$ سم ،
وارتفاعه المائل ١٢ سم . أوجد مساحته السطحية .

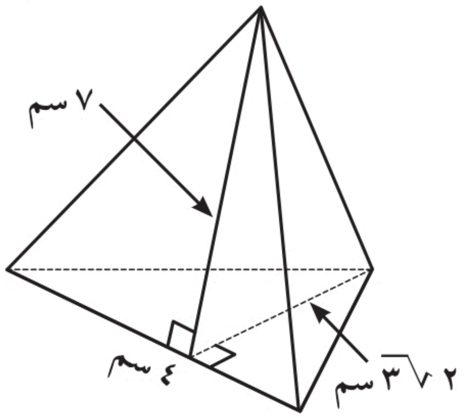


تدرّب (٢)

علبة زجاجية على شكل هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٨ سم
وارتفاع القاعدة ٤ $\sqrt{3}$ سم وارتفاعه المائل ١٣ سم . أوجد المساحة السطحية للعلبة .

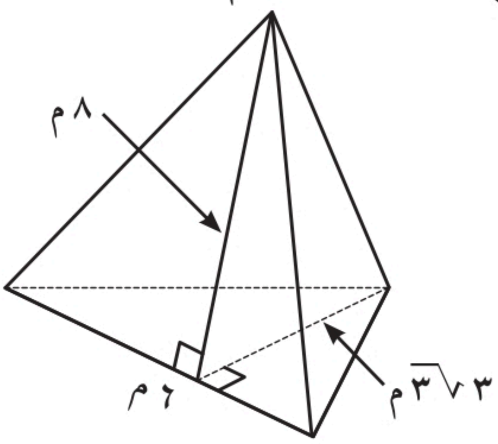


٢ هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم وارتفاع قاعدته ٢ $\sqrt{٣}$ سم وارتفاعه المائل ٧ سم .
أوجد مساحته السطحية .

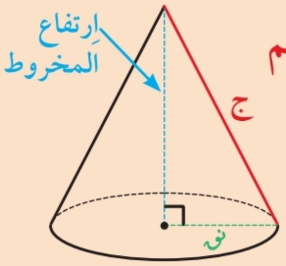


---

٣ هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ م ، وارتفاع قاعدته ٣ $\sqrt{٣}$ م وارتفاعه المائل ٨ م . أوجد المساحة السطحية للهرم المنتظم .



المخروط الدائري القائم : مجسَّم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .



المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × طول الراسم

$= \frac{1}{2} \times 2 \pi$ نق × ج

$= \pi$ نق × ج

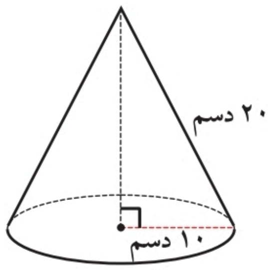
(حيث ج هو طول الراسم)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= \pi$ نق × ج + π نق^2

$= \pi$ نق (ج + نق)

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل مخروط دائري قائم (اعتبر π = ١٤ ,٣) .

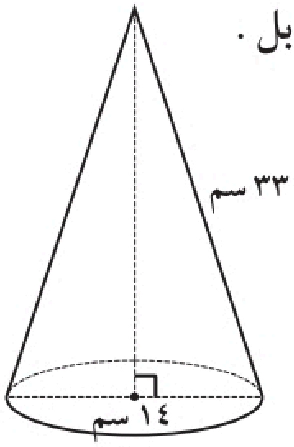
أوجد : (أ) مساحته الجانبية .

(ب) مساحته السطحية .

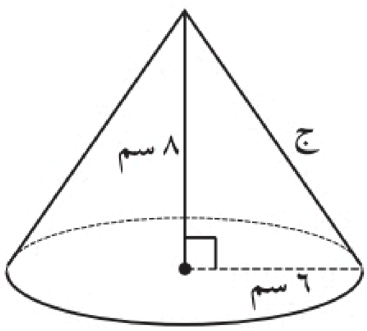
تدرّب (٣)

أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

(اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .



تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل :

مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجد ما يلي :

أ طول الراسم (ج) :

....

....

....

ب المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

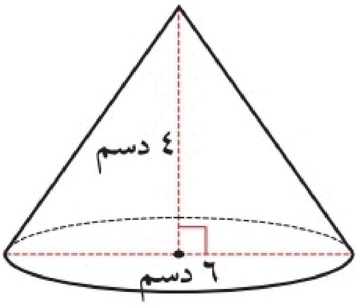
....

....

....

....

٥ **في الشكل المقابِل :**



مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ دسم

وارتفاعه ٤ دسم ، أوجد ما يلي :

أ طول الراسم (ج) :

....

....

....

ب المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم : (بدلالة π)

....

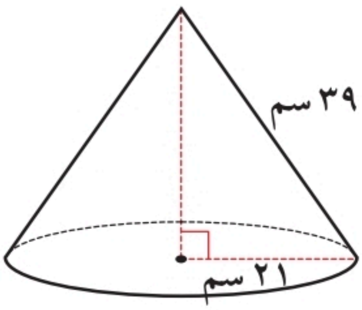
....

....

....

أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

(اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



....

....

....

....

....

١٠-٢

حجم الهرم
Volume of The Pyramid

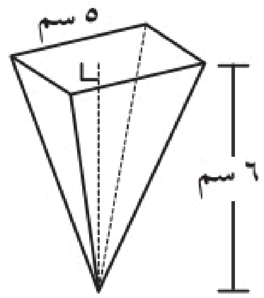
حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × حجم المنشور القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع

حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

تدرّب (١)

أوجِد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربّع كما في الشكل :



حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

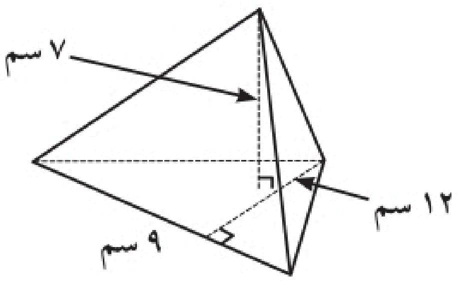
= $\frac{١}{٣}$ × (............)^{٢} × ....

= $\frac{١}{٣}$ × .... × ....

= ....

تدرّب (٢)

أوجِد حجم المجسَّم في الشكل المقابِل :



مساحة القاعدة =

=

=

حجم الهرم =

=

=

مثال (٢) :

ينتج أحد مصانع الحلوى قطعًا من الكاكاو على شكل هرم منتظم ، حجم القطعة الواحدة منها ١٦ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم ، أوجِد مساحة قاعدة قطعة الكاكاو .

الحل :

تدرّب (٣)

تصنع رنا علبة على شكل هرم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٥٥ سم^{٣} ، مساحة قاعدتها ١٥ سم^{٢} ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟

....

....

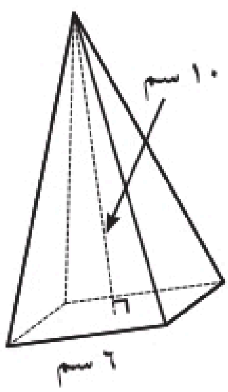
....

....

تمـــرَّنْ :

١ أوجد حجم المجسَّم في كلّ ممّا يلي :

أ هرم منتظم قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها ٦ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم .



....

....

....

....

....

مثال (٢) :

ينتج أحد مصانع الحلوى قطعًا من الكاكاو على شكل هرم منتظم ، حجم القطعة الواحدة منها ١٦ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم ، أوجِد مساحة قاعدة قطعة الكاكاو .

الحل :

تدرّب (٣)

تصنع رنا علبة على شكل هرم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٥٥ سم^{٣} ، مساحة قاعدتها ١٥ سم^{٢} ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟

....

....

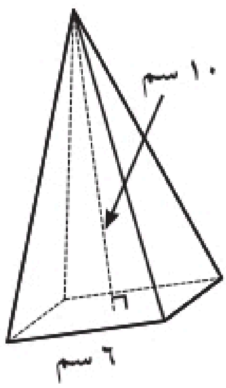
....

....

تمــرَّنْ :

١ أوجد حجم المجسَّم في كلّ ممّا يلي :

أ هرم منتظم قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها ٦ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم .



....

....

....

....

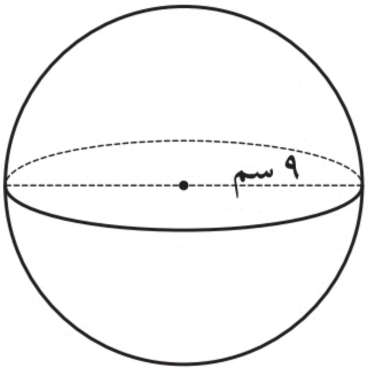
....

١٠-٣ حجم الكرة
Volume of The Sphere

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

مثال (١) :

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)



الحلّ :

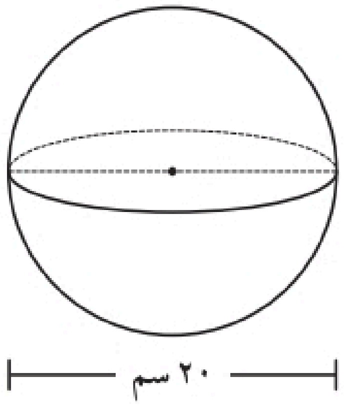
حجم الكرة =

تدرَّب (١)

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . (بدلالة π)

مثال (٢) :

من خلال الشكل المقابِل :



أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اعتبر π = ٣,١٤)

الحل :

تدرَّب (٢) :

أوجد حجم كرة طول قطرها ١ م . (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

تدرّب (٣)

أوجِد حجم قبّة مسجد إذا عُلِم أنّها على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .
(بدلالة π)

نق = ...

حجم القبّة =

مثال (٣) :

شركة عطور تصمّم زجاجة عطر على شكل كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} ،
أوجِد طول قطر الزجاجة .

تدرّب (٤)

كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}\pi$ م^{٣} . أوجِد طول نصف قطرها.

....

....

....

....

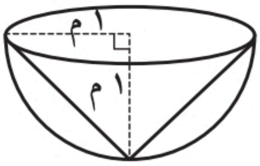
....

خزّان على شكل نصف كرة ، إذا كان طول قطر الخزّان ٢ م ،
فاحسب حجمه . (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

إذا كان حجم كرة $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$ م^{٣} ، فاحسب طول نصف قطرها .

١٠ـ٤ تطبيقات على المساحات السطحية والحجوم
Applications on Surface Areas and Volumes

تدرّب



في الشكل المقابِل :

نصف كرة طول نَصف قطرها ١ م ، حفر بداخلها مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى لنصف الكرة وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة .

اُحسب حجم الجزء المتبقّي من المجسم . (بدلالة π)

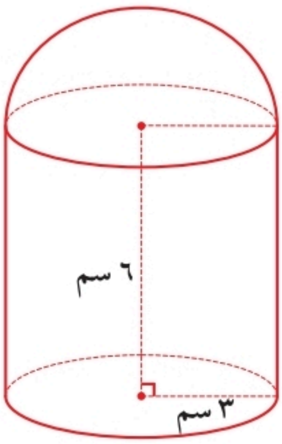
حجم نصف الكرة = ...

= ....

حجم المخروط = ...

= ....

حجم الجزء المتبقّي = ...



في الشكل المقابِل : أسطوانة يعلوها نصف كرة .

أوجد حجم المجسَّم . (بدلالة π)

....

....

....

....

....

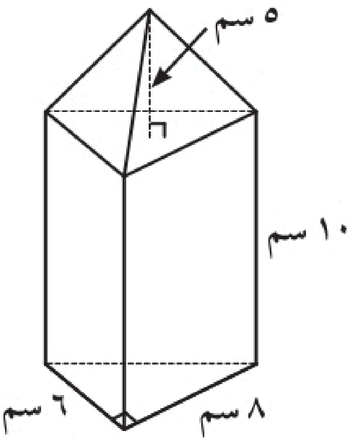
....

....

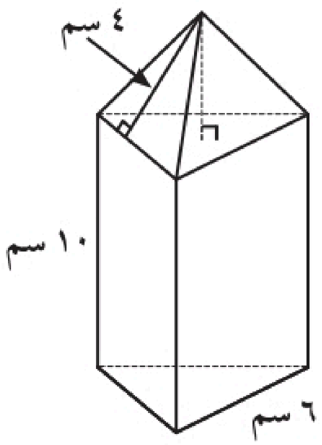
....

....

....



١ في الشكل المقابِل : منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٠ سم وقاعدته على شكَل مثلّث قائم طول ضلعي القائمة فيه ٨ سم ، ٦ سم ، يعلوه هرم ثلاثي قائم له نفس القاعدة وارتفاعه ٥ سم ، أوجد حجم هذا المجسَّم .



٢ أرادت ياسمين تغليف علبة على شكل منشور ثلاثي قائم يعلوه هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته ٩ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} كما في الشكل . أوجِد المساحة السطحية للورق المستخدم لتغليف العلبة.