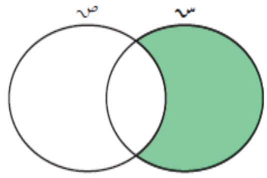
مذكرة الصف التاسع مادة الرياضيات
محلولة وشاملة
إعداد أ/ أحمد جمال عزمي

امسح الرمز لمشاهدة فيديوهات شرح المذكرة

الوحدة الاولى : المجموعات

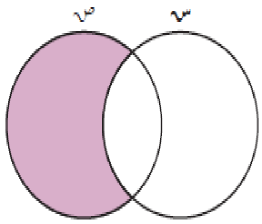
الدرس الاول : مجموعة الفرق



مجموعة الفرق بين مجموعتين س – ص

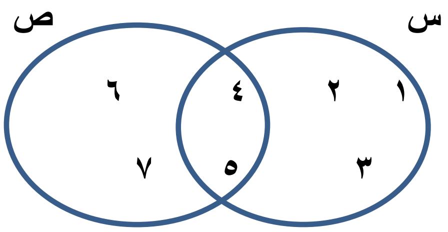
وتظلل كما في شكل فن المقابل

س – ص = مجموعة العناصر التي تنتمي الي س ولا تنتمي الي ص



اما ص – س تظلل كما في شكل فن المقابل

ص – س = مجموعة العناصر التي تنتمي الي ص ولا تنتمي الي س



مثال (١):

من شكل فن المقابل ، اوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :

(ا) س – ص = { ١، ٢ ، ٣ }

(ب) ص – س = { ٦ ، ٧ }

(جـ) ماذا تلاحظ ؟ (س – ص) ≠ (ص – س)

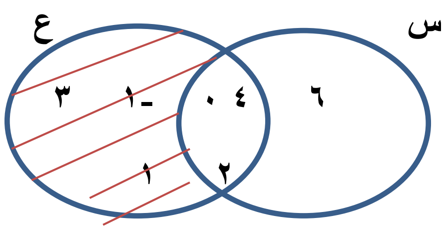
....

مثال (٢) :

اذا كانت **س** = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ،

ع = { ب : ب ∈ **ص** ، - ١ ≥ ب ≥ ٤ } ، حيث **ص** مجموعة الاعداد الصحيحة.

فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



الحل:

ع = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

س - ع = { ٦ }

ع - **س** = { -١ ، ١ ، ٣ }

مثل كلا من **س** ، ع بشكل فن ثم ظلل المنطقة التي تمثل ع - **س**

مثال (٣):

اذا كانت **س** = مجموعة مضاعفات العدد ٣ الاصغر من ٩ ،

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

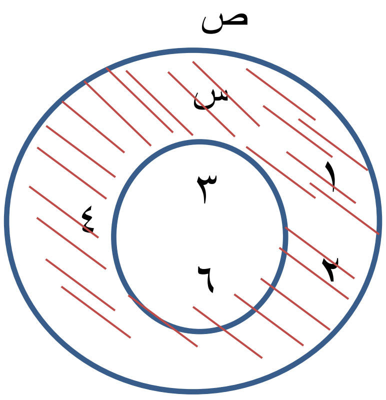
فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :

س = { ٣ ، ٦ }

س - ص = { } او ϕ

ص - س = { ١ ، ٢ ، ٤ }

مثل كلا من س ، ص بشكل فن ثم ظلل المنطقة التي تمثل ص - س



....

مثال(٤) : اذا كانت ع = { ا : ا ∈ **ص** ، ١ ≤ ا < ٥ }

حيث **ص** مجموعة الاعداد الصحيحة

، **ح** = { ب : ب عامل من العوامل الاولية للعدد ٣٠ }

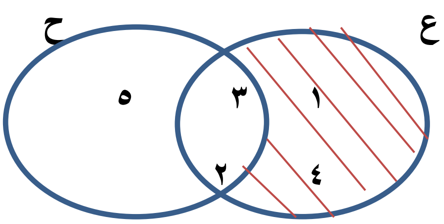
فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ح = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

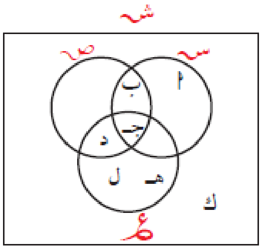
ع - ح = { ١ ، ٤ }

مثل كلا من ع ، **ح** بشكل فن ثم ظلل المنطقة التي تمثل ع - ح



تذكر دائماً أن
الرياضيات حل بالإيد وليس مذاكرة بالعين

الدرس الثاني :- المجموعة الشاملة ـ المجموعة المتممة



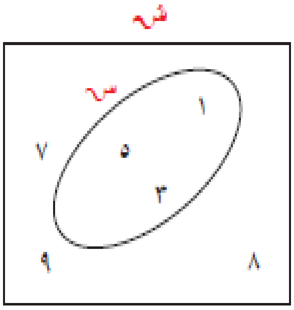
نرمز الي المجموعة الشاملة بالرمز ش

لتكن ش = { ا ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، ك }

المجموعة الشاملة لكل من س ، ص ، ع وتمثل بشكل فن المقابل

....

مثال(١) من الشكل المقابل : (ا) اكتب بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

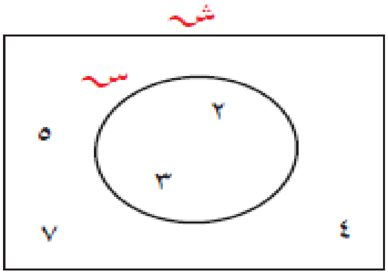
س = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ش - س = { ٧ ، ٨ ، ٩ }

(ب) اكمل ٧ ∈ (ش – س) ، ٣ ∉ (ش – س)

....

مثال (٢): من الشكل المقابل اكتب بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

س = { ٢ ، ٣ }

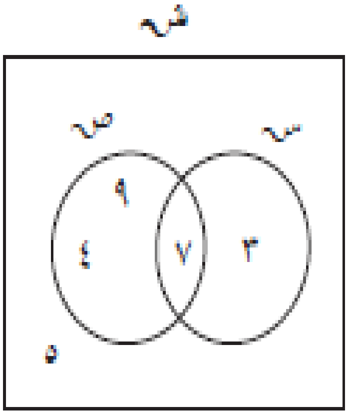
$\overline{\text{س}}$ = ش – س = { ٤ ، ٥ ، ٧ }

س ∩ $\overline{\text{س}}$ = ϕ

س ∪ $\overline{\text{س}}$ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } = ش

$\overline{\overline{\text{س}}}$ = ش – س = { ٢ ، ٣ } = س

مثال(٣) :من الشكل المقابل اوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

س = { ٣ ، ٧ }

ص = { ٤ ، ٧ ، ٩ }

$\overline{\text{س}}$ = { ٤ ، ٥ ، ٩ }

$\overline{\text{ص}}$ = { ٣ ، ٥ }

$\overline{\text{س}}$ ∩ $\overline{\text{ص}}$ = { ٥ }

س ∪ ص = { ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩ }

$\overline{\text{س ∪ ص}}$ = { ٥ }

ماذا تلاحظ ؟ س ∩ ص = س ∪ ص

$\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$ = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩ }

س ∩ ص = { ٧ }

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩ } اذا $\overline{\text{س} \cap \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$

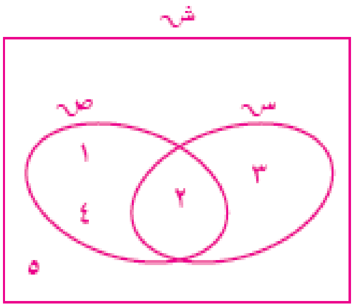
....

<u>مثال (٤)</u> اذا كانت المجموعة الشاملة **ش =**{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

س = { ا : ا ∋ مجموعة الاعداد الكلية ، ٢ ≤ ا < ٤ } ،

ص = { ب : ب ∋ مجموعة الاعداد الكلية ، ب عامل من عوامل العدد ٤ }

فاوجد بذكر العناصركلا مما يلي:



<u>الحل:</u>

س = { ٢ ، ٣ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٤ }

$\overline{\text{س}}$ = { ١ ، ٤ ، ٥ }

$\overline{\text{ص}}$ = { ٣ ، ٥ }

($\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$) = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

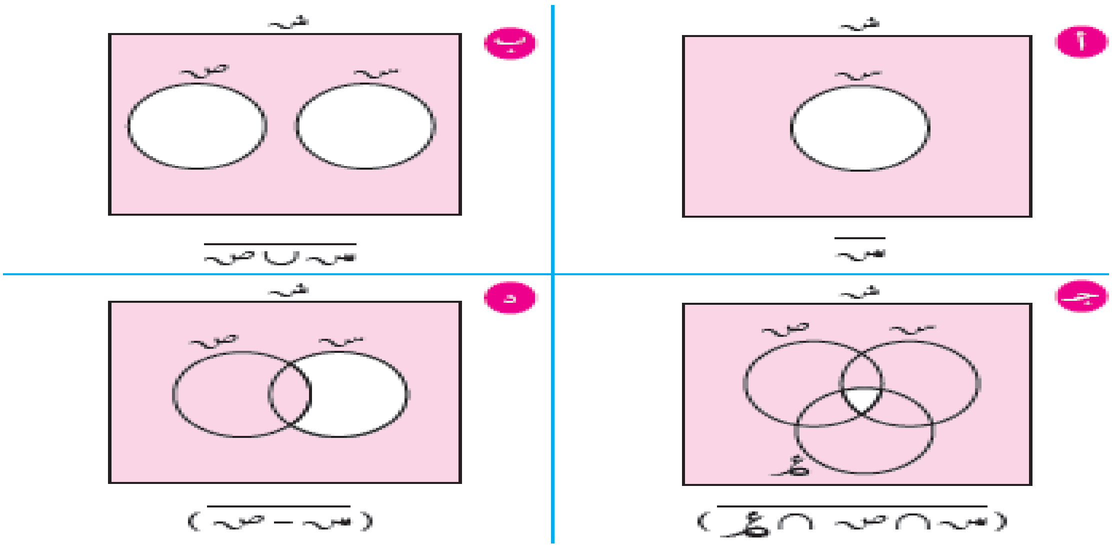
($\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$) = { ٥ }

($\overline{\overline{\text{س} \cap \text{ص}}}$) = { ٢ }

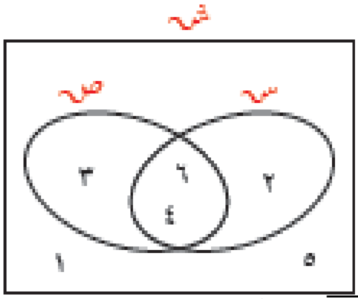
مثل كلا من ش ، س ، ص بشكل

....

<u>مثال (٥) :</u>ظلل المنطقة التي تمثل كلا مما يلي في الاشكال التالية :



مثال(٦): من شكل فن المقابل اوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ }

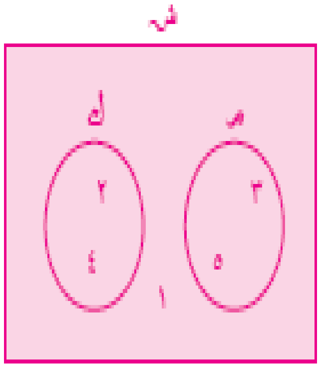
$\overline{\text{س}}$ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، $\overline{\text{ص}}$ = { ١ ، ٢ ، ٥ }

$\overline{(\text{س} \cap \text{ص})}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } (س ∪ ص) = { ١ ، ٥ }

مثال(٧) : اذا كانت المجموعة الشاملة ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

مـ = مجموعة الاعداد الفردية الاكبر من ١ والاصغر من ٧ ،

ك = { ا : ا عدد زوجي ١ < ا < ٦ } ، فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



مـ = { ٣ ، ٥ }

ك = { ٢ ، ٤ }

$\overline{\text{مـ}}$ = { ١ ، ٢ ، ٤ }

$\overline{\text{ك}}$ = { ١ ، ٣ ، ٥ }

$\overline{(\text{مـ} \cap \text{ك})}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

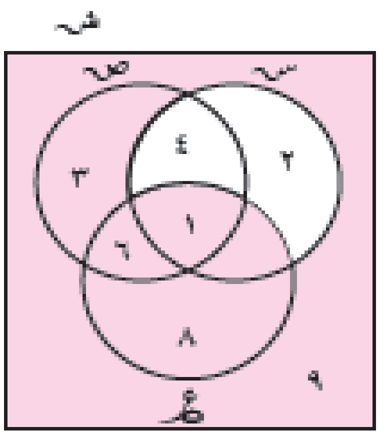
مـ - ك = { ٣ ، ٥ }

$\overline{(\text{مـ} - \text{ك})}$ = { ١ ، ٢ ، ٤ }

مثل كلا من ش ، مـ ، ك بشكل فن ، ثم ظلل المنطقة التي تمثل $\overline{(\text{مـ} \cap \text{ك})}$

....

مثال(٨): من شكل فن المقابل اكمل بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

ص = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

$\overline{\text{س}}$ = { ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

ص – ع = { ٣ ، ٤ }

$\overline{(\text{س} \cap \text{ص})}$ = { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

ثم ظلل المنطقة التي تمثل $\overline{(\text{س} - \text{ع})}$

الدرس الثالث : التطبيق وانواعه

التطبيق (الدالة) وانواعه :

درست فيما سبق ان العلاقة من مجموعة **س** الي مجموعة **ص** هي تطبيق (دالة) اذا ارتبط كل عنصر من **س** بعنصر واحد فقط من **ص** وتسمى **س** " المجال " ، **ص** " المجال المقابل" وتسمى مجموعة صور عناصر المجال " المدى "

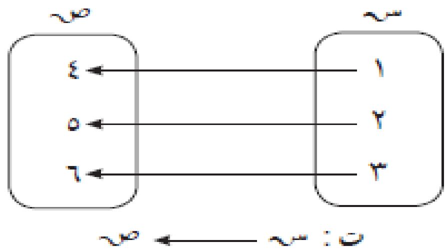
* التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابل يسمى **" تطبيق شامل "**

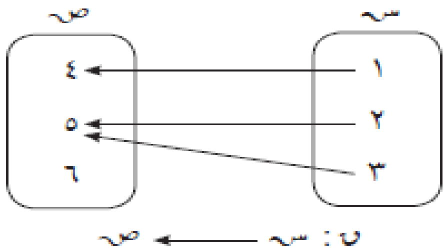
* التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران او اكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابل يسمى **" تطبيق متباين "**

* التطبيق الشامل والمتباين يسمى **" تطبيق تقابل "**

مثال(١)

ايا التطبيقات التالية شامل وايها ليس شاملا اذكر السبب





الحل:

ت تطبيق شامل

السبب: المدى{ ٤ ، ٥ ، ٦ }= المجال المقابل

ق ليس شاملا

السبب : المدى { ٤ ، ٥ } ≠ المجال المقابل

كن طموحاً لكي تصل الي أهدافك

مثال (٢) اذا كانت **س** ={ ـ ٣ ، ٠ ، ٣ } ، **ص** ={ ـ ٩ ، ٠ ، ٩ }

التطبيق ق : **س** ⟵ **ص** ، ق (س) = ٣ س اوجد :(١) مدى التطبيق

الحل:

ق (س) = ٣ س

ق (ـ٣) = ٣ × ـ ٣ = ـ ٩

ق (٠) = ٣ × ٠ = ٠

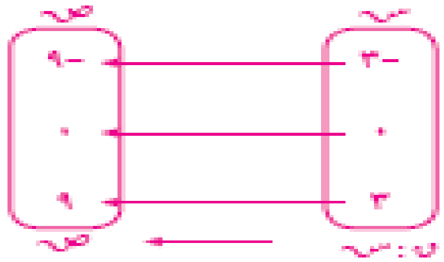
ق (٣) = ٣ × ٣ = ٩

المدى = { ـ ٩ ، ٠ ، ٩ }

(ب) اكتب التطبيق ق كمجموعة من الازواج المرتبة

ق = { (ـ ٣ ، ـ ٩) ، (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٩) }

(جـ) مثل التطبيق بمخطط سهمي



(د) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا ، متباين ،تقابلا مع ذكر السبب

ق تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل

ق تطبيق متباين لان العناصر لها صور مختلفة ق(ـ ٣) ≠ ق (٣) ≠ ق (٠)

ق تطبيق تقابل لانه شامل ومتيابن

مثال(٢)

ليكن التطبيق ت : { ـ ٢ ، ـ ١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٠ ، ٣ ، ٨ } حيث ت (س) = س^{٢} ـ ١

(ا) اوجد مدى التطبيق

الحل: ت (س) = س^{٢} ـ ١

ت (ـ ٢) = (ـ ٢)^{٢} ـ ١ = ٤ ـ ١ = ٣

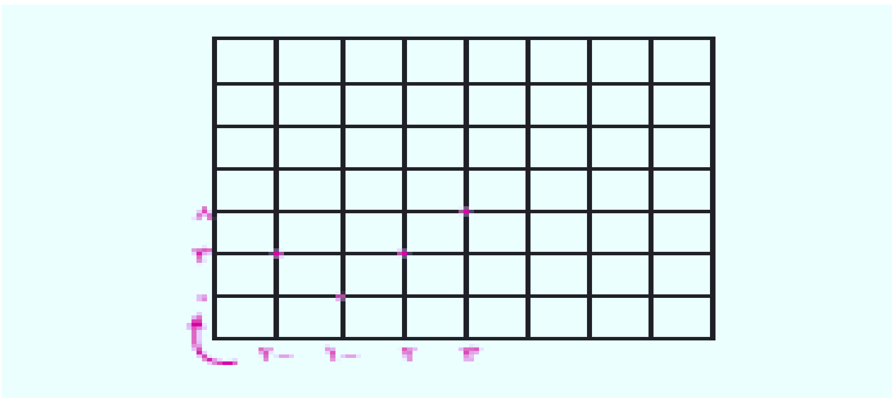
ت (ـ ١) = (ـ ١)^{٢} ـ ١ = ١ ـ ١ = ٠

ت (٢) = (٢)^{٢} ـ ١ = ٤ ـ ١ = ٣

ت (٣) = (٣)^{٢} ـ ١ = ٩ ـ ١ = ٨

المدى = { ٠ ، ٣ ، ٨ }

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(جـ) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

ت تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل = { ٠ ، ٣ ، ٨ }

ت تطبيق ليس متباينا لان ت (ـ ٢) = ت (٢)

ت ليس تقابلا لانه غير متباين

<u>مثال (٣)</u>

اذا كانت **س** ={ ـ ٢، ٠ ، ٢ } ، **ص** ={ ـ ٤ ، ٠ ، ٨ }

التطبيق ق : **س** ⟵ **ص** ، ق (س) = ٣ س + ٢ اوجد :

(١) مدى التطبيق

<u>الحل:</u>

ق (س) = ٣ س + ٢

ق (ـ٢) = ٣ × ـ ٢ + ٢ = ـ ٦ + ٢ = ـ ٤

ق (٠) = ٣ × ٠ + ٢ = ٠ + ٢ = ٢

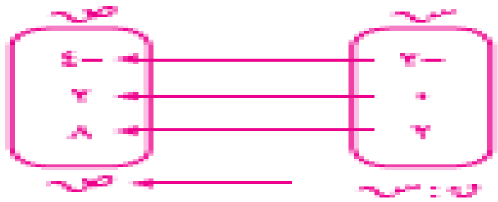
ق (ـ٣) = ٣ × ٢ + ٢ = ٦ + ٢ = ٨

المدى = { ـ ٤ ، ٢ ، ٨ }

(ب) اكتب التطبيق ق كمجموعة من الازواج المرتية

ق = { (ـ ٢ ، ـ ٤) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٨) }

(جـ) مثل التطبيق بمخطط سهمي



(د) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا ، متباين ،تقابلا مع ذكر السبب

ق تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل = { ـ ٤ ، ٢ ، ٨ }

ق تطبيق متباين لان العناصر لها صور مختلفة ق(ـ ٢) ≠ ق (٢) ≠ ق (٠)

ق تطبيق تقابل لانه شامل ومتيابن

مثال(٤)

ليكن التطبيق ت : ل = { ١ ، -١ ، ٣ } ، م = { ٢ ، ٥ ، ١٠}

التطبيق هـ : ل ⟵ م حيث هـ (س) = س^{٢} + ١

(ا) اوجد مدى التطبيق

الحل: هـ (س) = س^{٢} + ١

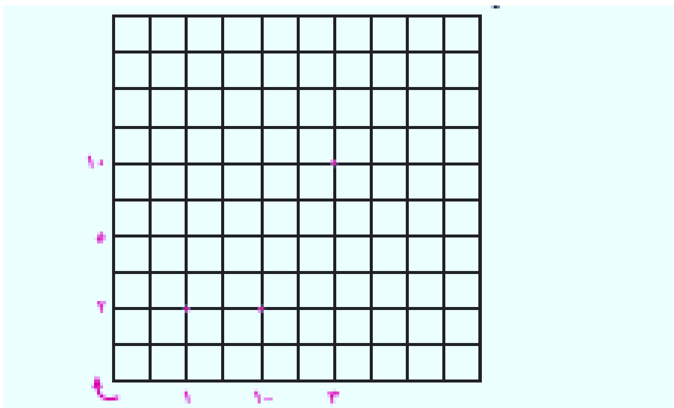
هـ (١) = (١)^{٢} + ١ = ١ +١ = ٢

هـ (- ١) = (- ١)^{٢} + ١ = ١ +١ = ٢

هـ (٣) = (٣)^{٢} + ١ = ٩+ ١ = ١٠

المدى = { ٢ ،١٠ }

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(جـ) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

هـ تطبيق ليس شاملا لان المدى ≠ المجال المقابل

ت تطبيق ليس متباينا لان هـ (- ١) = ت (١) = ٢

ت ليس تقابلا لانه غير متباين

مثال(٥)

ليكن التطبيق د : س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٨}

التطبيق د : س ← ص حيث د (س) = س^{٣}

(ا) اوجد مدى التطبيق

الحل: هـ (س) = س^{٣}

د (٠) = (٠)^{٣} = ٠

د (١) = (١)^{٣} = ١

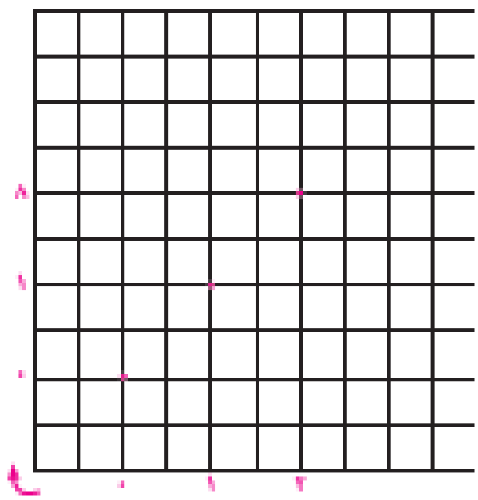
د (٢) = (٢)^{٣} = ٨

المدى = { ٠ ،١ ، ٨ }

(ب) اكتب التطبيق د كمجموعة ازواج مرتبة

د = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(جـ) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

د تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل = { ٠ ، ١ ، ٨ }

ت تطبيق متباين لان د (٠) ≠ د (١) ≠ د (٢)

ت تقابل لانه شامل ومتباين

مثال(٦) ليكن التطبيق ت : س = { ١ ، ٤ ، ٩ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

التطبيق د : س ⟵——— ص حيث د (س) = $\sqrt{\text{س}}$

(ا) اوجد مدى التطبيق

الحل:ت(س) = $\sqrt{\text{س}}$

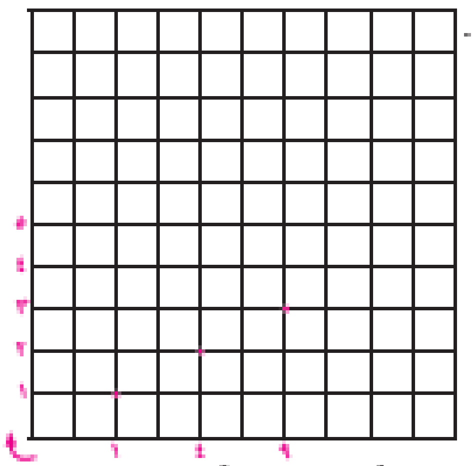
ت (١) = $\sqrt{١}$ = ١

ت(٤) = $\sqrt{٤}$ = ٢

ت (٩) = $\sqrt{٩}$ = ٣

المدى = { ١ ، ٢، ٣}

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(جـ) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

ت تطبيق ليس شاملا لان المدى ≠ المجال المقابل

ت تطبيق متيابن لان ت (١) ≠ ت (٤) ≠ ت (٩)

ت ليس تقابل لانه غير شامل

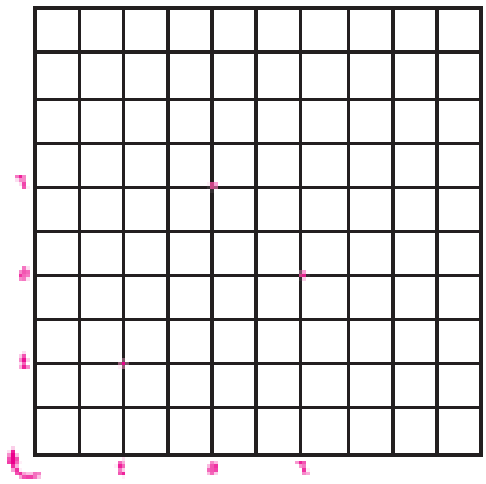
مثال(٧) اذا كانت س = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ، التطبيق ك : س ⟵ ص

حيث ك = { (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) }

(ا) اوجد المدى

المدى = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

(ب) مثل التطبيق بمخطط بياني



(جـ) بين ان التطبيق ك تطبيق تقابل

ك تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل = { ٤، ٥ ، ٦ }

ك تطبيق متباين لان ك (٤) ≠ ك (٥) ≠ ت (٦)

بالتالي ك تقابل لانه شامل ومتباين

أحد أسرار النجاح الصبر والمثابرة

الدرس الرابع الدالة الخطية :

الدالة الحقيقية ق : ح ⟵ ح ، ق (س) = ا س + ب ، حيث ا ، ب ∋ ح **تسمى دالة خطية**

لاحظ ان :

(١) ق (س) = ا س + ب

تسمى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : ص = ا س + ب ويكون بيانها خطا مستقيما

(٢) تسمى س المتغير المستقل وتسمى ص المتغير التابع

(٣) عندما يكون ا = ٠ تكون الدالة ثابتة ويكون بيانها خطا مستقيما افقيا (يوازي محور السينات)

مثال(١)

اكمل الجدولين للدالتين التاليتين :

(ا) ص = س + ٣

ص = س + ٣					
س	١ -	٠	١	٢	٣
ص	٢	٣	٤	٥	٦

س = - ١

ص = - ١ + ٣ = ٢

(ب) ص = ٢ س

ص = ٢ س						
س	٠	١	٢	٣	٤	
ص	٠	٢	٤	٦	٨	

س = ٠

ص = ٢ × ٠ = ٠

....

مثال(٢)

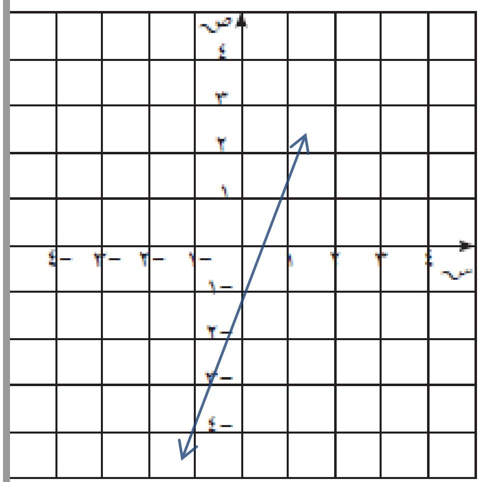
ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ٣ س – ١

الحل: عندما س = -١ ص = ٣ × - ١ – ١ = - ٣ – ١ = - ٤

عندما س = ٠ ص = ٣ × ٠ – ١ = ٠ – ١ = - ١

عندما س = ١ ص = ٣ × ١ – ١ = ٣ – ١ = ٢

س	١ -	٠	١
ص	٤ -	١ -	٢



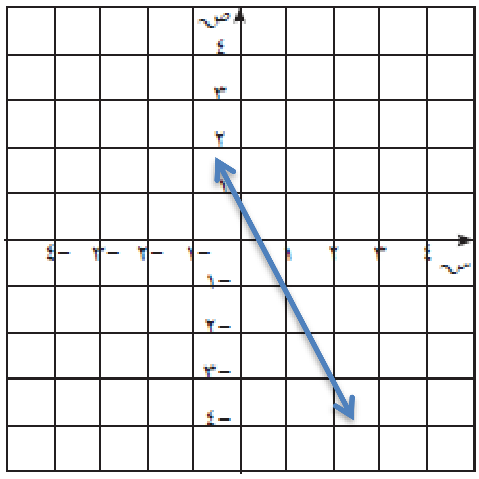
<u>مثال(٣)</u> ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ١ - ٢ س

الحل: عندما س = ٠ ص = ١- ٢ × ٠ = ١ـ ٠ = ١

عندما س = ١ ص = ١- ٢ × ١ = ١ـ ٢= - ١

عندما س = ٢ ص = ١- ٢ × ٢ = ١ـ ٤ = - ٣

س	٠	١	٢
ص	١	- ١	- ٣



....

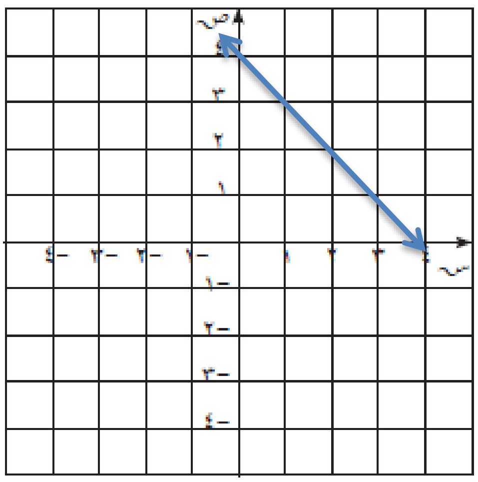
<u>مثال(٤)</u> ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ٤ - س

الحل: عندما س = ٠ ص = ٤ - ٠ = ٤

عندما س = ١ ص = ٤ - ١ = ٣

عندما س = ٢ ص = ٤ - ٢ = ٢

س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢



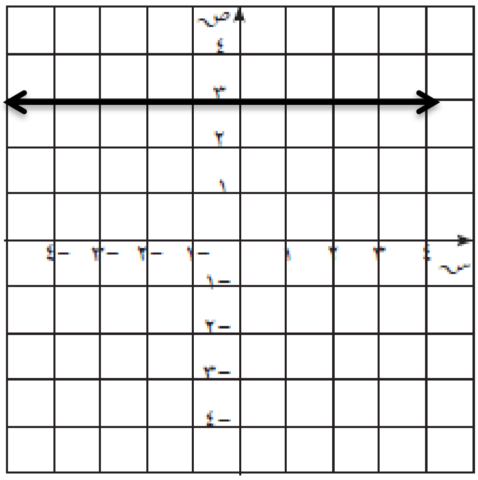
مثال(٥) ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ٣

الحل: عندما س = ٠ ص = ٣

عندما س = ١ ص = ٣

عندما س = ٢ ص = ٣

س	٠	١	٢
ص	٣	٣	٣



الدرس الخامس : الدالة التربيعية

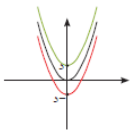
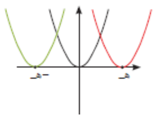
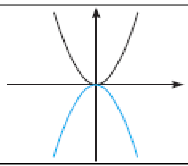
الدالة الحقيقية التي فيها القوة الاعلى للمتغير المستقل تساوي ٢ تسمى " دالة تربيعية "

ويكون الرسم البياني للدالة التربيعية على شكل منحنى ∩ او ∪ ويسمى قطع مكافى

الصورة العامة للدالة التربيعية :

ا س ٢ + ب س + جـ حيث ا ، ب ، جـ اعداد حقيقية ، ا ≠ ٠

حد من الدرجة الثانية   حد من الدرجة الاولى   حد ثابت

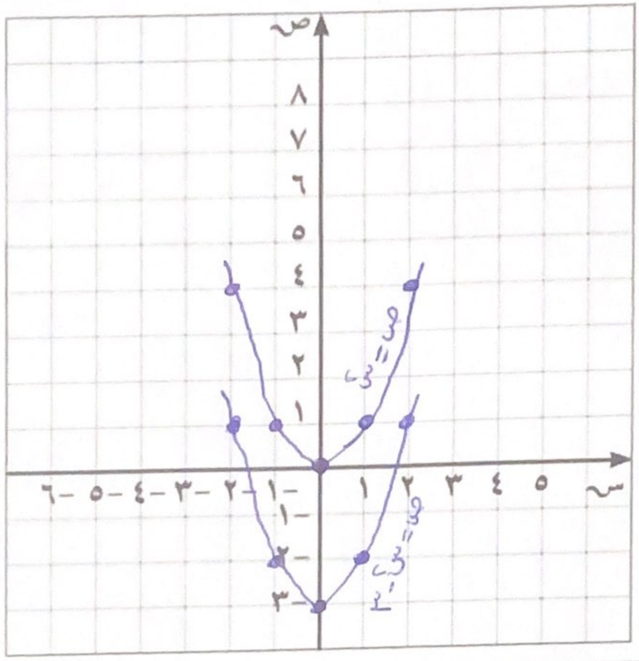
الدالة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبقة على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}	التمثيل البياني
ص = س^{٢} + د	ازاحة راسية د وحدة الي الاعلى اذا كانت د موجبة وازاحة افقية د وحدة الى الاسفل اذا كانت د سالبة	
ص = (س + هـ)^{٢}	ازاحة افقية هـ وحدة اللى اليسار اذا كانت هـ موجبة ازاحة افقية هـ وحدة الى اليمين اذا كانت هـ سالبة	
ص = ـ س^{٢}	انعكاس في محور السينات	

عن ابن عباس رضي الله عنهما قال : كنتُ خَلْفَ النبي ﷺ يوما فقال

يا غلام ، إني أُعلمك كلمات: احفظ الله يحفظك ، احفظ الله تجده تُجاهك ، إذا سألت فسأل الله ، وإذا استعنت فاستعن بالله ، واعلم أن الأمة لو اجتمعت على أن ينفعوك بشيء لم ينفعوك إلا بشيء قد كتبه الله لك ، وإن اجتمعوا على أن يضرُّوك بشيء ، لم يضروك إلا بشيء قد كتبه الله عليك ، رُفعت الأقلام ، وجفَّت الصحف

مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} ، مثّل بيانيًا كلًّا من الدوالّ التالية

١ ص = س^{٢} − ٣

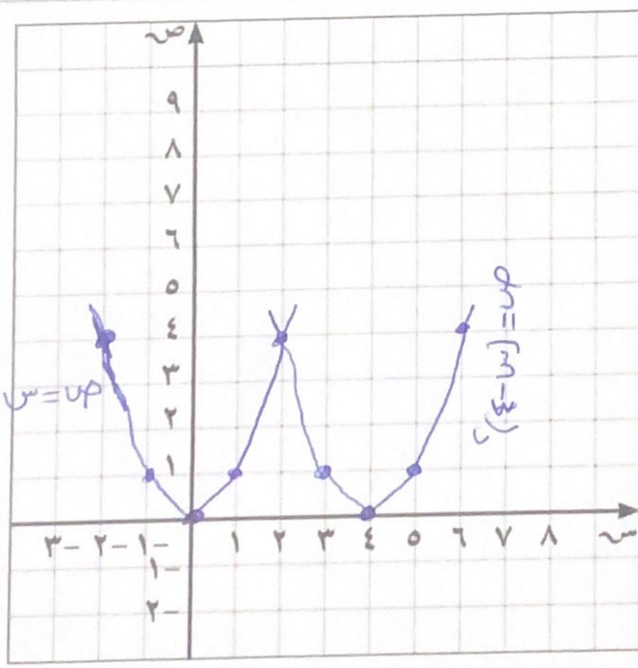


إزاحة بيان الدالة ص = س٢

٣ وحدات لأسفل

---

٢ ص = (س − ٤)^{٢}

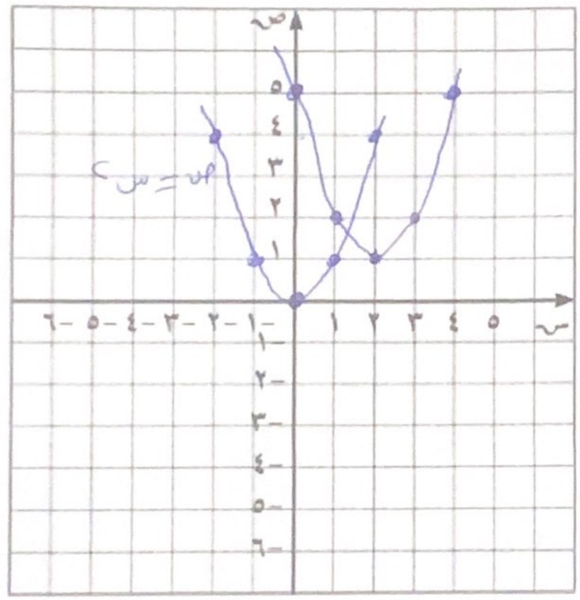


إزاحة بيان الدالة ص = س٢

٤ وحدات لليمين

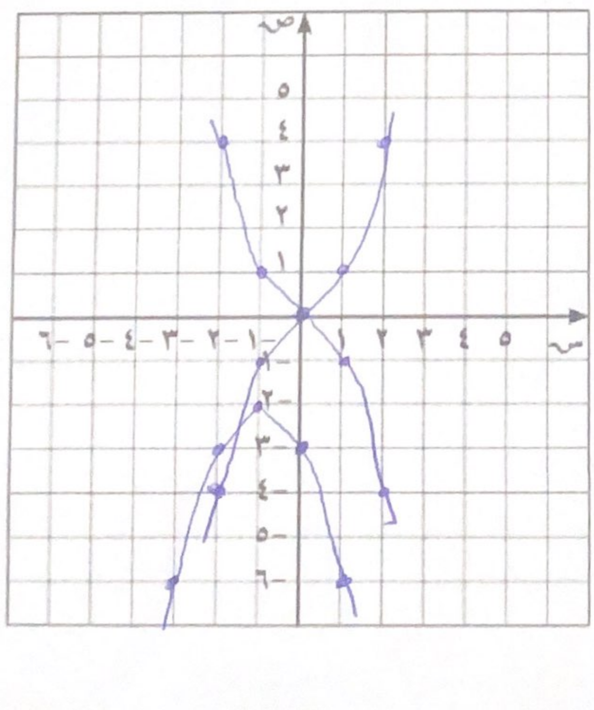
مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^{٢}$ ، مثّل بيانيًا كلًّا من الدوالّ التالية

ص = $(س - ٢)^{٢} + ١$



إزاحة بيان الدالة ص = $س^{٢}$
وحدتين لليمين
ووحدة واحدة للأعلى

ص = $-(س + ١)^{٢} - ٢$



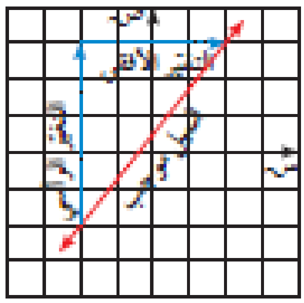
إزاحة بيان الدالة ص = $-س^{٢}$
وحدة واحدة لليسار
ووحدتين لأسفل

الوحدة الثانية : المعادلات الخطية ، المتباينات الخطية

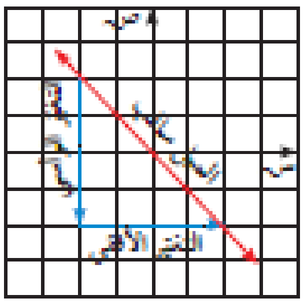
الدرس الاول: الميل

اذا كانت ا ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) ، ب ($\text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٢}$) نقطتين في المستوى الاحداثي فان :-

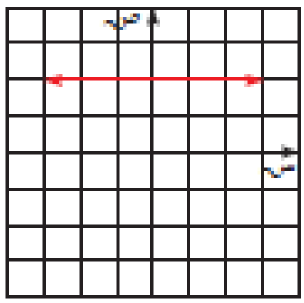
$$\text{ميل ا ب} = \frac{\text{التغير الراسي}}{\text{التغير الافقي}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} \qquad \text{س}_{٢} \neq \text{س}_{١}$$



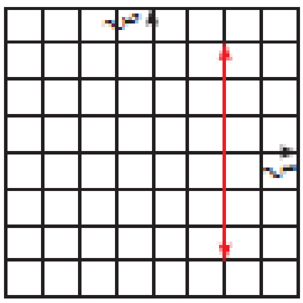
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

مثال(١) اوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يلي :

(ا) ا (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤)

الحل:

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$\text{ميل ا ب} = \frac{٤ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$$

(ب) د (ـ ١ ، ٦) ، هـ (٤ ، ٥)

الحل:

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$\text{ميل ا ب} = \frac{٥ - ٦}{٤ - (-١)} = \frac{-١}{٥}$$

....

مثال(٢) اوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

(ا) ص = ٧ س + ١

الحل :

ص = م س + ب

الميل م = ٧ ، الجزء المقطوع ب = ١

....

(ب) ص = ـ ٥ ـ ٧ س

الحل :

ص = ـ ٢ س ـ ٥

الميل م = ـ ٢ ، الجزء المقطوع ب = ـ ٥

....

(جـ) ص = ٥ س

الحل :

الميل م = ٥ ، الجزء المقطوع ب = ٠

....

(د) ٢ س + ص = ١

الحل:

ص = ـ ٢ س + ١

الميل = ـ ٢ ، الجزء المقطوع ب = ١

(هـ) ٣ ص – ٦ س + ٧ = ٠

الحل :

٣ ص = ٦ س – ٧ بقسمة المعادلة على ٣

ص = ٢ س - $\frac{٧}{٣}$

م = ٢

ب = $\frac{٧}{٣}$

....

(و) ٢ ص = ٣ س + ٨

الحل:

ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٤

م = $\frac{٣}{٢}$

ب = ٤

الفرق بين الأغبياء والاذكياء أن الأغبياء يملكون حلماً
أما الأذكياء يملكون هدفاً

الدرس الثاني: المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

ليكن $م_{١}$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ ، $م_{٢}$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$:

* $\overleftrightarrow{ل_{١}} \parallel \overleftrightarrow{ل_{٢}} \Longleftrightarrow م_{١} = م_{٢}$

* $\overleftrightarrow{ل_{١}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٢}} \Longleftrightarrow م_{١} = م_{٢}$ (اي ان : $م_{١} = \frac{-١}{م_{٢}}$

....

مثال(١) :

اكمل ما يلي :

ميل ل	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٢	٢	$-\frac{١}{٢}$
$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$\frac{٣}{٢}$
$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	-٤
$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{٥}{٢}$

مثال(٢):

اذا كان $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ يمر بالنقطتين ا (ـ ٣ ، ٥) ، ب (ـ ٤ ، ٣) ، وكانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = ٢ س + ٧ ،

فاثبت ان $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ك}}$

الحل : $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ يمر بالتقطتين

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ن}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٣ - ٥}{-٤ - (-٣)} = \frac{-٢}{-١} = ٢$$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = ٢ س + ٧

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ٢

ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{م}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م}}$

مثال(٣):

اذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمر بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١) ، وكانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س - ٤ ،

فاثبت ان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ك}}$

الحل : $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمر بالتقطتين ف ، ع

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{١ - ٦}{٦ - ٤} = \frac{-٥}{٢}$$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س – ٤

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = $\frac{٢}{٥}$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}} \times \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ك}} = \frac{-٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = -١$$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ك}}$

مثال(٤)

اذا $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١ اوجد ميل $\overleftrightarrow{ن}$

الحل:

معادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١

ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = ٢

∵ $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = $\frac{-١}{\text{ميل } \overleftrightarrow{ل}}$ = $\frac{-١}{٢}$

....

مثال(٥)

اذا كان ميل $\overleftrightarrow{م ن}$ هو $\frac{١}{٤}$ ، حدد ايا من المستقيمين التاليين عمودي على $\overleftrightarrow{م ن}$

(ا) $\overleftrightarrow{ع م}$ الذي معادلته : ٢ ص – ٨ س – ٣ = ٠

الحل:

٢ ص = ٨ س + ٣ بالقسمة على ٢

ص = ٤ س + $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{ع م}$ = ٤

ميل $\overleftrightarrow{م ن}$ × $\overleftrightarrow{ع م}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٤ = ١

$\overleftrightarrow{ع م}$ ليس عمودي على $\overleftrightarrow{م ن}$

....

(ب) $\overleftrightarrow{ا ب}$ الذي يمر بالنقطتين ا (٦ ، ٩) ، ب (٧ ، ٥)

الحل:

ميل ا ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٥ - ٩}{٧ - ٦}$ = $\frac{-٤}{١}$ = - ٤

ميل $\overleftrightarrow{م ن}$ × ميل $\overleftrightarrow{ا ب}$ = $\frac{١}{٤}$ × - ٤ = - ١

∴ $\overleftrightarrow{ا ب} \perp \overleftrightarrow{م ن}$

مثال(٦)

اذا كان $\overleftrightarrow{\text{ا ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ يمر بالنقطتين ا (٥ ، ٣) ، ب (٨ ، ٦) فاوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

الحل: الميل = $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ = $\dfrac{٦ - ٣}{٨ - ٥}$ = ١

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

$\therefore$ ميل جـ د = $\dfrac{-١}{\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ا ب}}}$ = $\dfrac{-١}{١}$ = - ١

مثال(٧) اذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ يمر بالنقطتين م (٢ ، ٦) ، ن (٧ ، ٦)

، كان $\overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$ يمر بالنقطتين هـ (٢ ، ١) ، ط (٥،١) اثبت ان $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$

الحل:

ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ = $\dfrac{٦ - ٦}{٧ - ٢}$ = ٠

ميل $\overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$ = $\dfrac{١ - ١}{٥ - ٢}$ = ٠

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$

مثال(٨) : اذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = ٤ س + ٣

ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ن}}$: ٤ ص ـ ١٦ س = ١ فهل المستقيمان متوازيان وضح السبب

الحل:

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ٤

$\overleftrightarrow{\text{ن}}$: ٤ ص = ١٦ س + ١ بالقسمة على ٤

ص = ٤ س + $\dfrac{١}{٤}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ = ٤

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ اذا $\overleftrightarrow{\text{ك}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ن}}$

مثال(٧) اذا كان $\overleftrightarrow{ا}$ يمر بالنقطتين (٨ ، ١) ، (٣ ، ٤)

، ومعادلة $\overleftrightarrow{ب}$: ١٠ س ـ ٦ ص = ـ ٥ ، فهل المستقيمان متعامدان

الحل:

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ا} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ١}{٣ - ٨} = \frac{-٣}{٥}$$

$\overleftrightarrow{ب}$: ١٠ س ـ ٦ ص = ـ ٥

ـ ٦ ص = ـ ١٠ س ـ ٥ بالقسمة على ـ ٦

$$ص = \frac{٥}{٣} س + \frac{٥}{٦}$$

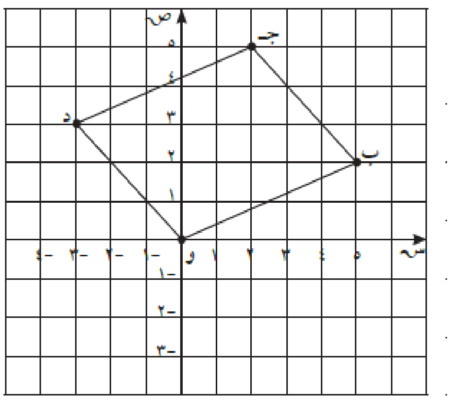
$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ب} = \frac{٥}{٣}$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ا} \times \text{ميل } \overleftrightarrow{ب} = \frac{-٣}{٥} \times \frac{٥}{٣} = -١$$

اذا $\overleftrightarrow{ا} \perp \overleftrightarrow{ب}$

....

مثال (٨): في الشكل الرباعي و ب جـ د ، اثبت ان $\overleftrightarrow{و ب}$ // $\overleftrightarrow{د جـ}$



الحل: $\overleftrightarrow{و ب}$ يمربالنقطتين و (٠ ، ٠) ، ب (٥ ، ٢)

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{و ب} = \frac{٢ - ٠}{٥ - ٠} = \frac{٢}{٥}$$

$\overleftrightarrow{د جـ}$ يمر بالنقطتين د (ـ ٣ ، ٣) ، جـ (٢ ، ٥)

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{د جـ} = \frac{٥ - ٣}{٢ - (-٣)} = \frac{٢}{٥}$$

بما ان ميل $\overleftrightarrow{و ب}$ = ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$

اذا $\overleftrightarrow{و ب}$ // $\overleftrightarrow{د جـ}$

مثال(٩):

اذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ حيث معادلة ك : ٨ س ــ ٢ ص = ٩ اوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

الحل:

$\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ٨ س ــ ٢ ص = ٩

ـ ٢ ص = ـ ٨ س + ٩ بالقسمة على ــ ٢

ص = ٤ س + $\frac{٩}{-٢}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ٤

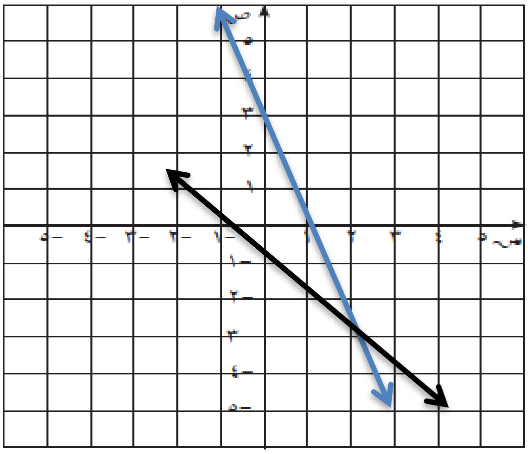
∵ $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ = $\frac{-١}{٤}$

التركيز في الدراسة معناه تبعد عنك التليفون نهائي

الدرس الثالث : حل معادلتين خطيتين من الدرجة الاولى فى متغيرين

مثال(١)



اوجد مجموعة المعادلتين الاتيتين بيانيا :

ص + ٣ س – ٣ = ٠ ، ص + س = -١

الحل :

* نكتب معادلتي المستقيمين على الصورة :

ص = - ٣ س + ٣ ، ص = - س – ١

* نرسم بيان المستقيمين :

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	- ٣

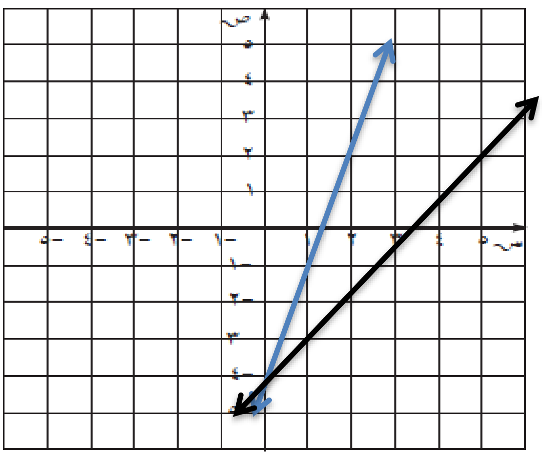
س	٠	١	٢
ص	- ١	- ٢	- ٣

المستقيمان تقاطعا في النقطة (٢ ، - ٣)

مجموعة الحل = { (٢ ، - ٣) }

....

مثال(٢)



اوجد مجموعة المعادلتين الاتيتين بيانيا :

ص - ٣ س +٤ = ٠ ، ص - س = - ٤

الحل :

* نكتب معادلتي المستقيمين على الصورة :

ص = ٣ س - ٤ ، ص = س – ٤

* نرسم بيان المستقيمين :

س	٠	١	٢
ص	-٤	-١	٢

س	٠	١	٢
ص	-٤	-٣	-٢

المستقيمان تقاطعا في النقطة (٠، - ٤)

مجموعة الحل = { (٠ ، - ٤) }

الدرس الرابع : المتباينات الخطية (منطقة الحل المشترك)

خطوات ايجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الاولى في متغيرين بيانيا

(١) نرسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل في حالة : ≥ ، ≤ والخط المتقطع في حالة < ،>

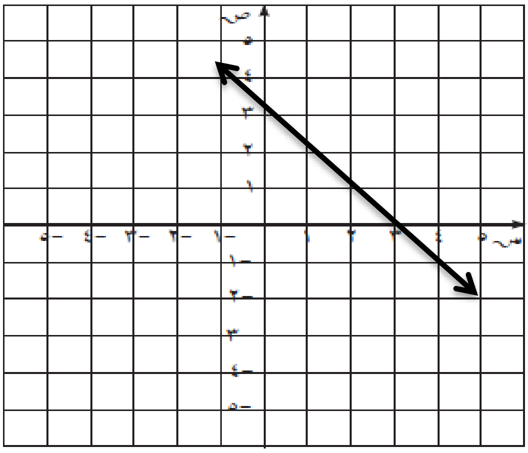
(٢) نقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة ولتحديد هذا الجانب نختار اي نقطة لا تنتمي الي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة اذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل واذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الاخر هو جانب منطقة الحل

(٣)في حالة : ≥ ، ≤ تتكون منطقة الحل من مجموعة نقاط خط الحدود اتحاد مجموعة نقاط جانب الحل

وفي حالة : < ،> تتكون منطقة الحل من مجموعة نقاط جانب منطقة الحل فقط

(٤) نظلل المنطقة التي تمثل منطقة حل المتباينة

مثال(١):



ارسم خط الحدود للمتباينة : س + ص ≥ ٣

الحل :

* المعادلة المناظرة : هي س + ص = ٣

كون جدول لقيم المعادلة المناظرة :

ص = - س + ٣

س	١	٢	٣
ص	٢	١	٠

ارسم خط الحدود متصل

مثال(٢):

مثل بيانيا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص > س ، ص ≤ ٢

الحل :

المعادلة المناظرة :

ص = س ، ص = ٢

س	١	٠	١-
ص	١	٠	١-

س	١	٠	١-
ص	٢	٢	٢

خط الحدود متقطع

التعويض بالنقطة (٣ ، ٠)

٠ > ٣ عبارة صحيحة

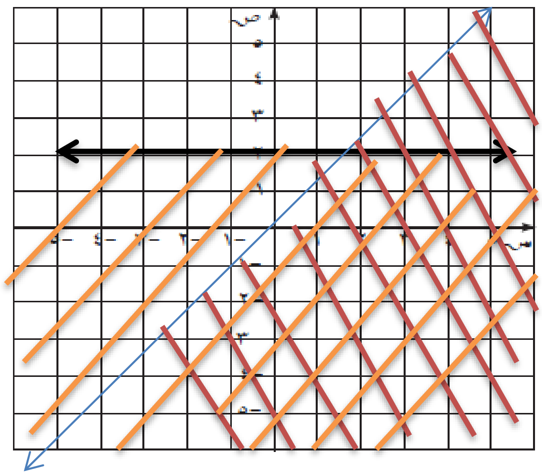
نظلل المنطقة التي تنتمي اليها النقطة

خط الحدود متصل

التعويض بالنقطة (٣ ، ٠)

٠ ≤ ٢ عبارة صحيحة

نظلل المنطقة التي تنتمي اليها النقطة

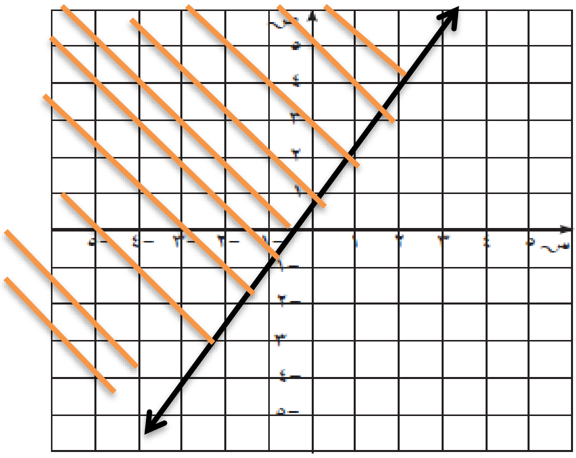


مثال(٣)

مثل بيانيا منطقة الحل للمتباينة:

ص > ٣ س - ١

الحل: ص = ٣ س ــ ١



س	١	٠	١-
ص	٢	١-	٤-

نرسم خط الحدود متقطع ونعوض

بالنقطة (٠ ، ٠) في المتباينة

٠ > ٣ × ٠ ــ ١

٠ > - ١ عبارة صحيحة

نظلل المنطقة التي تنتمي اليها النقطة (٠ ، ٠)

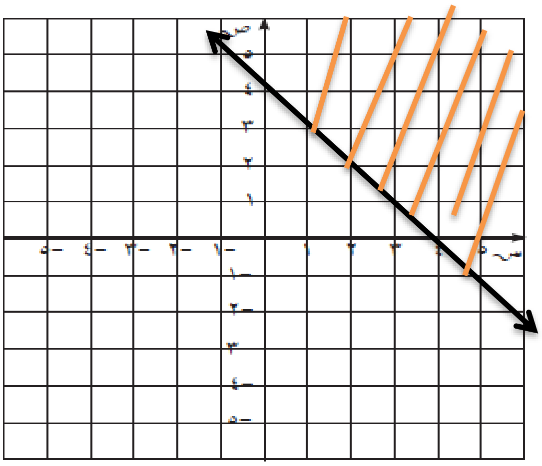
....

مثال(٤)

مثل بيانيا منطقة الحل للمتباينة:

ص ≤ ٤ - س

الحل: ص = - س + ٤



س	١	٠	١-
ص	٣	٤	٥

نرسم خط الحدود متقطع ونعوض

بالنقطة (٠ ، ٠) في المتباينة

٠ ≤ ٤ - ٠

٠ > ٤ عبارة خاطئة

نظلل المنطقة التي لا تنتمي اليها النقطة (٠ ، ٠)

مثال(٥):

مثل بيانيا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص > ٢ س ، ص < ١ ـ س

الحل : المعادلة المناظرة : ص = ٢ س ، ص = ١ ـ س

س	١	٠	١ـ
ص	٢	٠	٢ـ

خط الحدود متقطع

س	١	٠	١ـ
ص	٠	١	٢

خط الحدود متصل

التعويض بالنقطة (٢ ، ٠)

٠ > ٢ × ٢

٠ > ٤ عبارة غير صحيحة

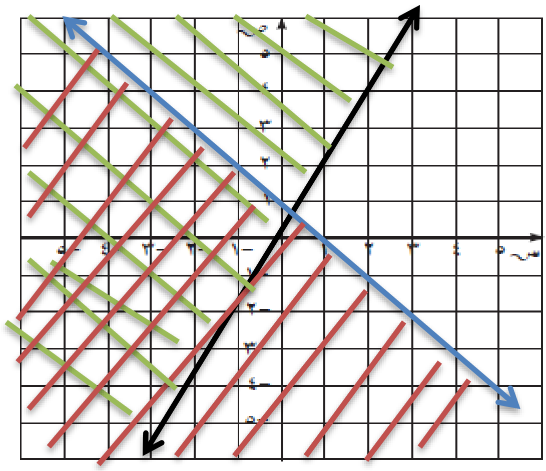
نظلل المنطقة التي لا تنتمي اليها النقطة

التعويض بالنقطة (٢ ، ٠)

٠ < ١ ـ ٢

٠ < ـ ١ عبارة غير صحيحة

نظلل المنطقة التي لا تنتمي اليها النقطة



حافظ على صلاتك تسعد دنيا وآخرة

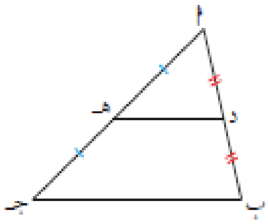
الوحدة الثالثة هندسة المثلث

الدرس الاول : القطعة المستقيمة الواصلة بين منصفى ضلعين فى مثلث

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث

وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .



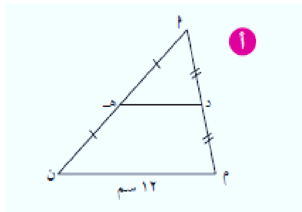
في المثلث ا ب جـ :

∵ د منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ

∴ د هـ // ب جـ ، د هـ = ١/٢ ب جـ

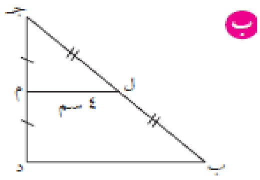
....

مثال(١) في كل من المثلثات التالية اكمل (دون استخدام الادوات الهندسية)



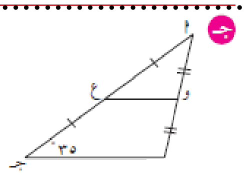
د هـ = ١/٢ = م ن ١/٢ × ١٢ = ٦ سم

....



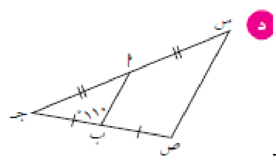
ب د = ٢ ل م = ٢ × ٤ = ٨ سم

....



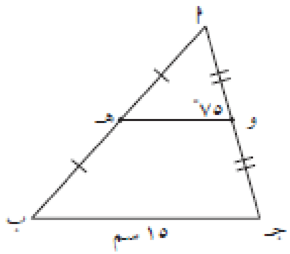
ق ($\hat{ا}$ ع و) = ق (ا جـ ب) بالتوازي والتناظر = ٣٥°

....



ق ($\hat{ص}$) = ق (ا $\hat{ب}$ جـ) بالتوازي والتناظر = ١١٠ °

مثال(٢) : في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث فيه :



ا و = و جـ ، ا هـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ، ق (ا $\hat{و}$ هـ) = ٧٥ °

اوجد بالبرهان : (١) طول $\overline{و هـ}$ (٢) ق ($\hat{جـ}$)

البرهان: في المثلث ا ب جـ

∵ و منتصف $\overline{ا جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{ا ب}$

∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ، $\overline{و هـ}$ // $\overline{جـ ب}$ (نظرية)

و هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ = ٧ , ٥ سم

حل بإيدك كل المسائل علشان تبقي متميز

ق ($\hat{جـ}$) = ق (ا $\hat{و}$ هـ) بالتوازي و التناظر

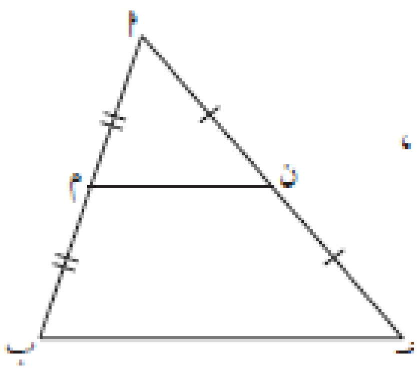
ق ($\hat{جـ}$) = ٧٥ °

....

مثال(٢) : في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث فيه :

م منتصف ا ب ، ن منتصف ا جـ ، ا ب = ١٠ سم ، ا جـ = ١٥ سم ، ب جـ = ١١ سم

اوجد بالبرهان : (١) طول $\overline{ن م}$ (٢) محيط △ ا ن م



البرهان: في المثلث ا ب جـ

∵ م منتصف $\overline{ا ب}$ ، ن منتصف $\overline{ا جـ}$

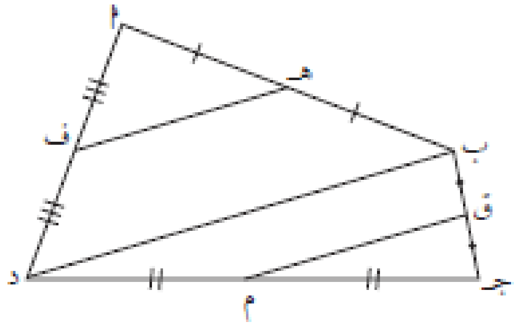
∴ م ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ (نظرية)

م ن = $\frac{١}{٢}$ × ا ب = $\frac{١}{٢}$ × ١١ = ٥ , ٥ سم

ا ن = $\frac{١}{٢}$ ا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ = ٦ , ٥ سم

محيط △ ا ن م = ا ن + ن م + م ا = ٦ , ٥ + ٥ , ٥ + ٥ = ١٧ سم

مثال (٣) في الشكل الرباعي ا ب جـ د :



اذا كان هـ ، ف ، م ، ق منصفات الاضلاع

ب ا ، ا د ، د جـ ، جـ ب على الترتيب

اثبت ان هـ ف // ق م

البرهان : في المثلث ا ب د

∵ هـ منتصف ا ب ، ف منتصف ا د

∴ هـ ف = ١/٢ ب د ، هـ ف // ب د (١)

في △ جـ ب د

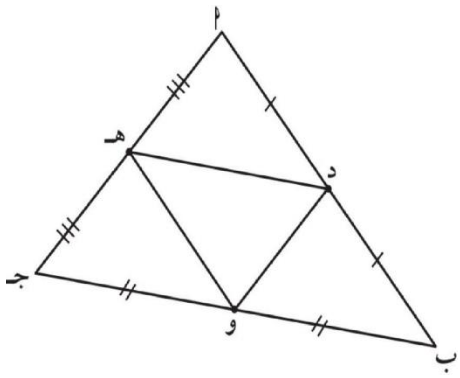
∵ ق منصف ب جـ ، م منتصف جـ د

∴ ق م // ب د (٢)

من (١) ، (٢) هـ ف // ق م

....

مثال(٤) : في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث فيه :



ا ب = ١٢ سم ، ا جـ = ١١ سم ، ب جـ = ١٤ سم

، د ، هـ ، و منتصفات ا ب ، ا جـ ، ب جـ على الترتيب

اوجد بالبرهان : (١) محيط △ ا ب جـ

البرهان: في المثلث ا ب جـ

∵ د منتصف ا ب ، و منتصف ب جـ

د و = ١/٢ × ا جـ = ١/٢ × ١١ = ٥,٥ سم

∵ و منتصف ب جـ ، هـ منتصف ا جـ

∴ و هـ = ١/٢ ا ب = ١/٢ × ١٢ = ٦ سم

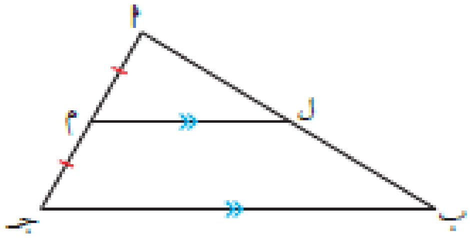
∵ هـ منتصف ا جـ ، د منتصف ا ب

∴ هـ د = ١/٢ ب جـ = ١/٢ × ١٤ = ٧ سم

محيط △ د هـ و = ا ن + ن م + م ا = ٥,٥ + ٦ + ٧ = ١٨,٥ سم

نظرية :

اذا رسم مستقيم من منتصف احد اضلاع مثلث موازيا ضلعا اخر فيه ، فانه ينصف الضلع الثالث



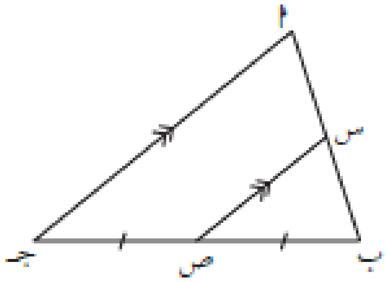
في المثلث ا ب جـ :

∵ م منتصف ا جـ ، ل م // ب جـ

∴ ل منتصف ا ب

....

مثال(٥):



ا ب جـ مثلث فيه : ص منتصف ب جـ ،

ص س // جـ ا ، ا س = ٦ سم

اوجد بالبرهان ب س

البرهان:

في المثث ا ب جـ :

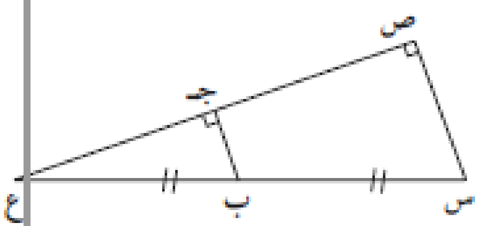
∵ ص منتصف ب جـ ، س ص // ا جـ

∴ س منتصف ا ب (نظرية)

∴ ب س = ا س = ٦ سم

....

مثال(٦):



ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ص ، ب منتصف س ع ،

ب جـ ⊥ ص ع ، اثبت ان ص جـ = ع جـ

البرهان: ∵ ق (ص^) = ق (ب جـ^ ع) = ٩٠ ° وهما في وضع تناظر

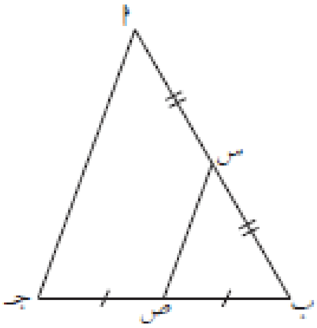
∴ س ص // ب جـ (١)

∴ ب منتصف س ع (٢)

∴ جـ منتصف ص ع

∴ ص جـ = ع جـ

مثال(٧):



ا ب جـ مثلث فيه : س منتصف ا ب ، ص منتصف ب جـ

ق (ب̂) = ٦٠° ، ق (ا̂) = ٥٠° ، اوجد ق (س ص̂ ب)

البرهان :

في المثلث ا ب جـ :

ق (جـ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٠°) = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠°

(لان مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°)

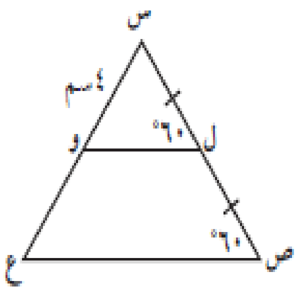
∵ س منتصف ا ب ، ص منتصف ب جـ

∴ س ص // ا جـ

∴ ق(س ص̂ ب) = ق(جـ̂) = ٧٠° بالتوازي والتناظر

....

مثال(٨):



س ص ع مثلث فيه : ل منتصف س ص ،

ق (ص̂) = ق(س ل̂ و) = ٦٠° ، س و = ٤ سم

اوجد طول س ع

البرهان: ∵ ق (ص̂) = ق (س ل̂ و) = ٦٠ ° وهما في وضع تناظر

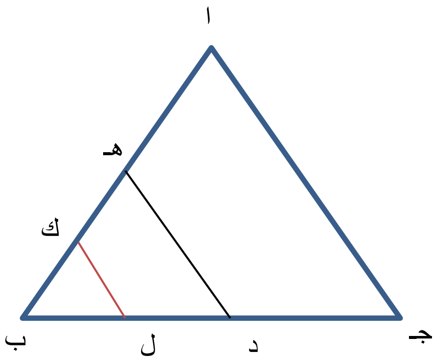
∴ ل و // ص ع (١)

∵ ل منتصف س ص (٢)

∴ من (١) ، (٢) و منتصف س ع

∴ س ع = ٢ × ٤ = ٨ سم

مثال(٩):



ا ب جـ مثلث فيه : ا جـ = ١٦ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ،

د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ك منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$

$\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$ ، اوجد ك ل

البرهان:

في المثث ا ب جـ :

∵ هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

∴ هـ د = $\frac{١}{٢}$ ا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

في مثلث ب هـ د

∵ ك منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$

∴ ل منتصف $\overline{\text{د ب}}$

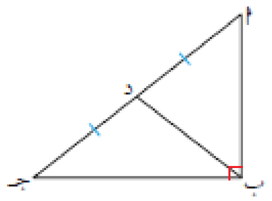
∴ ك ل = $\frac{١}{٢}$ هـ د = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

الهندسة والبرهان ممتع لما تعطيله حقه وتدرسه بجد واجتهاد

الدرس الثاني : القطعة المستقيمة الواصلة من راس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر

نظرية

طول القطعة المستقيمة الواصلة من راس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر



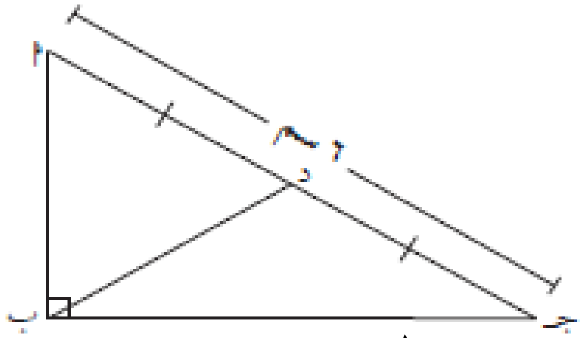
في المثلث ا ب جـ :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، د منتصف $\overline{ا جـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

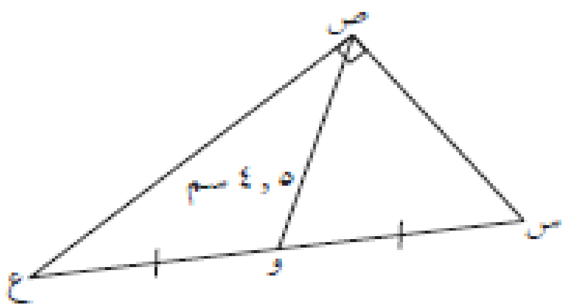
....

مثال(١) اكمل ما يلي (دون استخدام الادوات الهندسية) :



طول ب د = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم



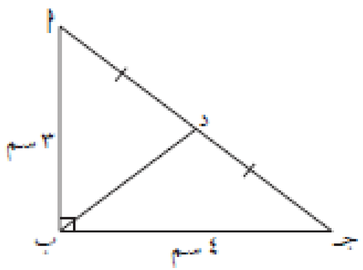
س ع = ٢ × ص و

= ٢ × ٤,٥ = ٩ سم

....

مثال(١) ا ب جـ قائم الزاوية في ب ، ا ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، د منتصف ا جـ

اوجد بالبرهان طول ب د



البرهان:

∵ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب (بتطبيق فيثاغورث)

∴ (ا جـ)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

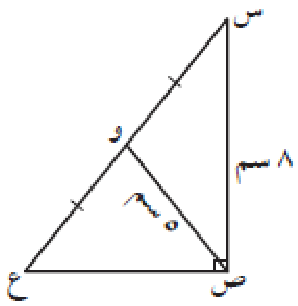
= (٤)^{٢} + (٣)^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

∴ ا جـ = ٥ سم

∵ د منتصف ا جـ

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ = ٢,٥ سم

مثال(٢) س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع ، ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم



اوجد بالبرهان (١) س ع (٢) ص ع

البرهان:

∵ س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$

∴ ص و = $\frac{١}{٢}$ س ع

∴ س ع = ٢ ص و = ٢ × ٥ = ١٠ سم

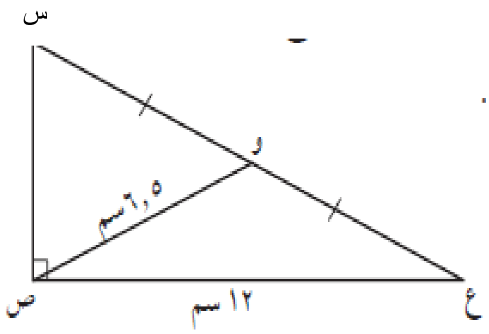
∴ $(\text{ص ع})^2 = (\text{س ع})^2 - (\text{س ص})^2$ بتطبيق فيثاغورث

$= (١٠)^2 + (٨)^2 = ١٠٠ + ٦٤ = ٣٦$

∴ ص ع = ٦ سم

....

مثال(٤) س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،



ص و = ٦,٥ سم ، س ص = ١٢ سم

اوجد بالبرهان (١) س ع (٢) س ص

البرهان:

∵ س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$

∴ ص و = $\frac{١}{٢}$ س ع

∴ س ع = ٢ ص و = ٢ × ٦,٥ = ١٣ سم

∴ $(\text{س ص})^2 = (\text{س ع})^2 - (\text{ص ع})^2$ بتطبيق فيثاغورث

$= (١٣)^2 + (١٢)^2 = ١٦٩ + ١٤٤ = ٢٥$

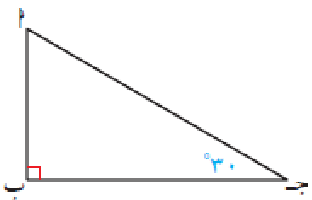
∴ س ص = ٥ سم

نتيجة (١): في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويا نصف طول الوتر

∵ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق (جـ) = ٣٠°

∴ ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

وعكس ذلك ايضاً صحيح

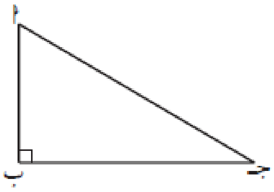


نتيجة (٢): في المثلث القائم الزاوية اذا كان طول احد ضلعي الزاوية القائمة مساويا نصف طول الوتر، فان طول الوتر ، فان قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع ٣٠° ويسمى المثلث ثلاثيني ستينيا

∵ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

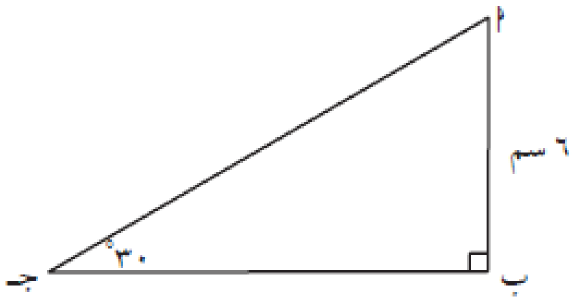
∴ ق (جـ) = ٣٠°

∴ المثلث ا ب جـ ثلاثيني ستيني

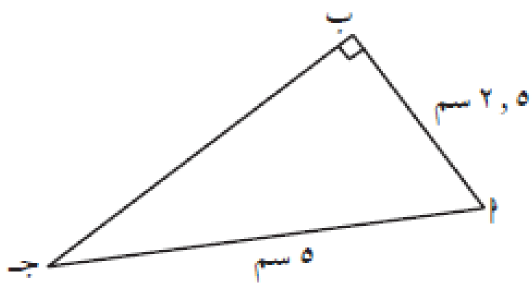


....

مثال(٥): اكمل ما يلي (دون استخدام الادوات الهندسية):



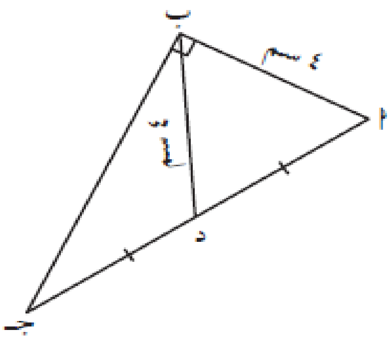
ا جـ = ٢ × ا ب = ٢ × ٦ = ١٢ سم



ق $\hat{(جـ)}$ = ٣٠°

مثال(٦): في الشكل المقابل:

اوجد بالبرهان : (١) ق $\hat{(جـ)}$ (٢) ق$\hat{(ا)}$



البرهان:

∵ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{ا جـ}$

∴ $\overline{ب د}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overline{ا جـ}$

∴ ا جـ = ٢ ب د = ٢ × ٤ = ٨ سم

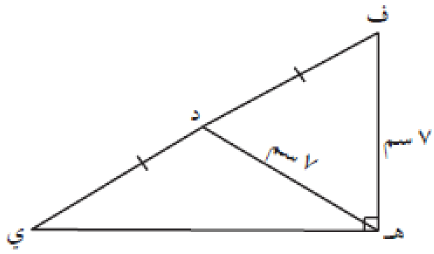
∵ ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° (نتيجة)

ق ($\hat{ا}$) = ١٨٠° – (٩٠° + ٣٠°) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

مجموعات قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

مثال(٧) : في الشكل المقابل :



اوجد بالبرهان كلا مما يلي :

(١) ق ($\hat{ي}$) (٢) ق ($\hat{ف}$)

البرهان :

∵ Δ ف هـ ي قائم الزاوية في هـ ، د منتصف $\overline{ف ي}$

∴ هـ د = $\frac{١}{٢}$ ف ي

∴ ف ي = ٢ × هـ د = ٢ × ٧ = ١٤ سم

∵ ف هـ = $\frac{١}{٢}$ ف ي

∴ ق ($\hat{ي}$) = ٣٠°

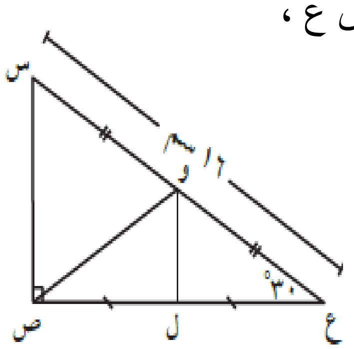
ق (ف) = ٦٠° (مثلث ثلاثيني ستيني)

....

مثال(٨) : صمم مهندس حسرا للمشاة فقام برسم المثلث في الشكل المقابل كدعامة للجسر

حيث س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، س ع = ١٦ سم ، و منتصف $\overline{س ع}$ ،

ل منتصف $\overline{ع ص}$ ، ل منتصف $\overline{ع ص}$ ، ق (ع) = ٣٠°



اوجد بالبرهان كلا مما يلي :

(١) ص و (٢) س ص (٣) و ل

البرهان:-

∵ س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{س ع}$

∴ ص و = $\frac{١}{٢}$ س ع = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم (١)

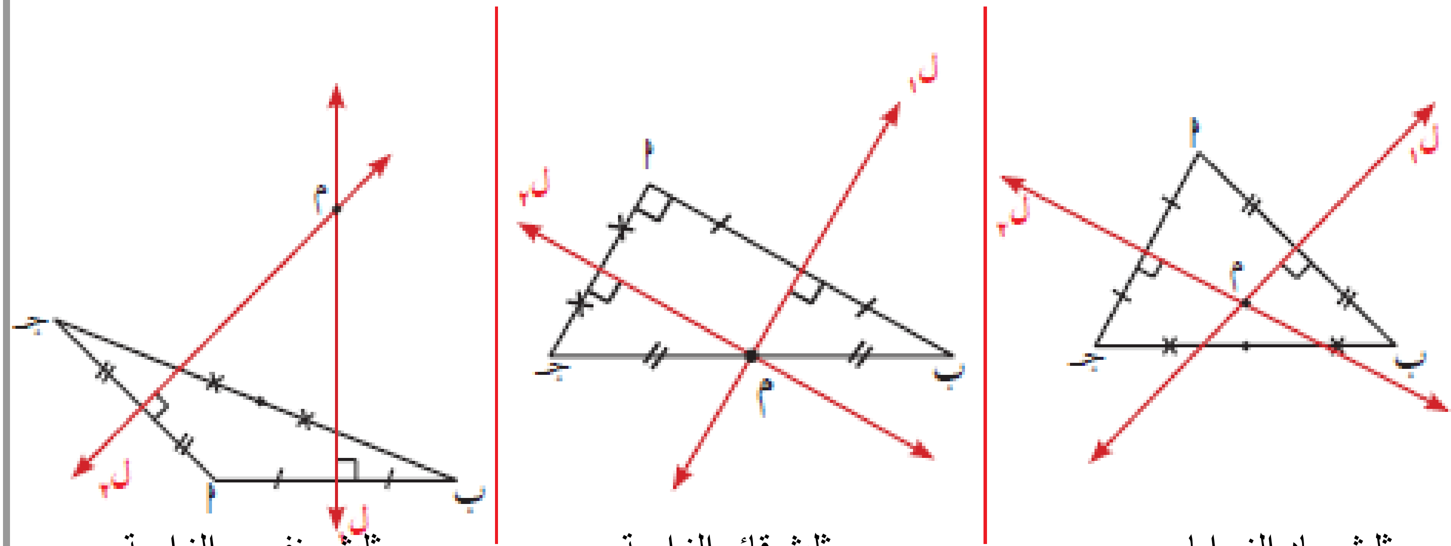
∵ Δ س ص ع مثلث ثلاثيني ستيني

∴ ص س = $\frac{١}{٢}$ س ع = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم (٢)

∵ و منتصف $\overline{س ع}$ ، ل منتصف $\overline{ص ع}$

∴ و ل = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤سم (٣)

الدرس الثالث : محاور اضلاع المثلث



مثلث حاد الزوايا   مثلث قائم الزاوية   مثلث منفرج الزاوية

نظرية :

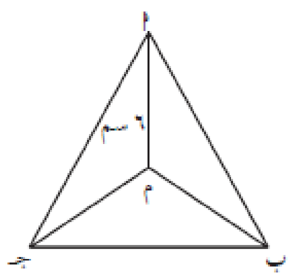
محاور اضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة

* نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث الحاد الزوايا تقع داخله

* نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر

* نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع خارجه

مثال(١):



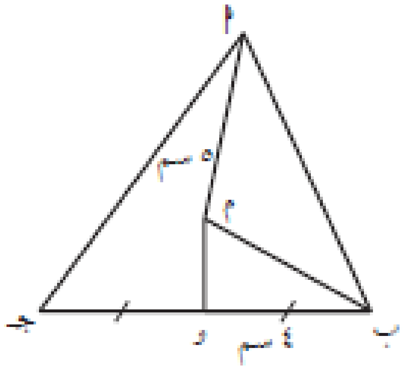
المثلث ا ب جـ فيه :م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث، م ا = ٦ سم

اكمل ما يلي (دون استخدام الادوات الهندسية) :

م ب = م ا = ٦ سم

م جـ = م ا = ٦ سم

مثال(٢): المثلث ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،



م ا = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

اوجد بالبرهان (١) م ب (٢) م و

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث

∴ م ب = م ا = ٥ سم

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ ب م و قائم الزاوية في و

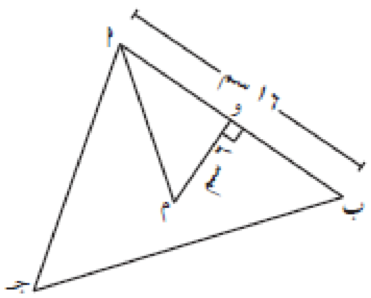
∴ (م و)^{٢} = (ب م)^{٢} ـ (ب و)^{٢}

= (٥)^{٢} ـ (٤)^{٢} = ٢٥ ـ ١٦ = ٩

م و = ٣ سم

....

مثال(٣): المثلث ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،



$\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$ ، ا ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم

اوجد بالبرهان (١) م ب (٢) محيط Δ ا م ب

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث

∴ م ب = م ا = ٥ سم

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث، $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$

∴ و منتصف $\overline{\text{ا ب}}$

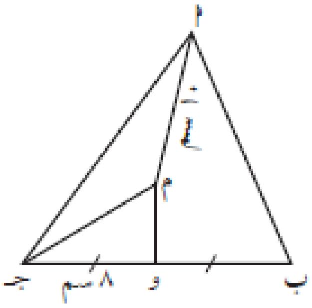
ا و = $\frac{١}{٢}$ ا ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

∴ Δ ا م و قائم الزاوية في و

∴ (ا م)^{٢} = (ا و)^{٢} + (وم)^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

ا م = ١٠ سم محيط المثلث = ١٠ + ١٠ + ١٦ = ٣٦ سم

مثال(٤):



المثلث ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،

و جـ = ٨ سم ، م ا = ١٠ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

اوجد بالبرهان (١) طول $\overline{\text{م جـ}}$ (٢) طول $\overline{\text{م و}}$

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ م جـ = م ا = ١٠سم (١)

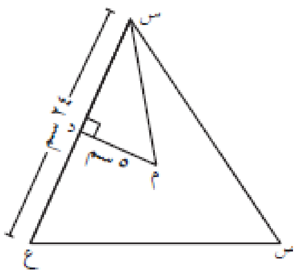
في Δ جـ م و قائم الزاوية في و

∴ (م و)^2 = (م جـ)^2 - (وجـ)^2 = (١٠)^2 + (٨)^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦

م و = ٦ سم (٢)

....

مثال (٥) :



س ص ع مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث ،

$\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$ ، س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم اوجد طول $\overline{\text{م ص}}$

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث ، $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$

∴ د منتصف $\overline{\text{س ع}}$

∴ س د = $\frac{١}{٢}$ س ع = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ = ١٢ سم

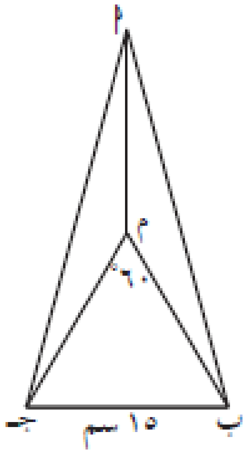
∵ Δ م س د قائم الزاوية في د

∴ (م س)^2 = (س د)^2 + (م د)^2 = (١٢)^2 + (٥)^2 = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

م س = ١٣ سم ∵ م نقطة تقاطع المحاور

∴ م س = م ص = م ع = ١٣ سم

مثال(٦):



المثلث ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،

ب جـ = ١٥ سم ، ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٦٠°

(١) اثبت ان المثلث ب م جـ متطابق الاضلاع

(٢) اوجد م ا

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث

∴ م جـ = م ب = م ا

∵ Δ م ب جـ فيه ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٦٠° ، ب م = م جـ

∴ ق (م ب جـ) = ق (م جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٦٠°}{٢}$ = ٦٠ °

∴ Δ ب م جـ متطابق الاضلاع (١)

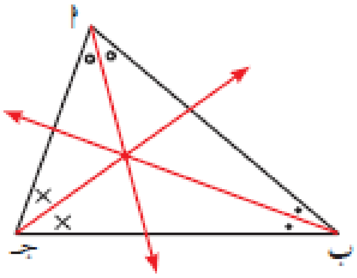
∴ م ب = م جـ = ١٥ سم

∴ م ا = ١٥ سم (٢)

المتميز بالرياضيات دائماً متميز في كل المواد
ولا تنسي وصيتي ليك حل بإيدك

أحمد جمال

الدرس الرابع : منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



نظرية :

منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة

مثال(١) : في الشكل المقابل :

م نقطة منصفات الزوايا الداخلية للمثلث س ص ع

اكمل (دون استخدام الادوات الهندسية)

الحل:

ق (م ص ^ع) = ٢٠°   ، ق (س ص ^ع) = ٢٠° + ٢٠° = ٤٠°

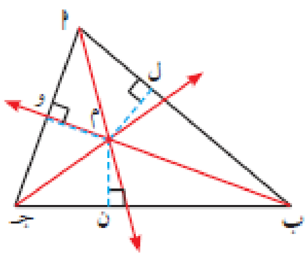
ق (ص س^ع) = ١٨٠° - (٤٠° + ٨٠°) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°،

ق (ص س^م) = ١/٢ ق (س^) = ١/٢ × ٦٠° = ٣٠°

....

نتيجة :

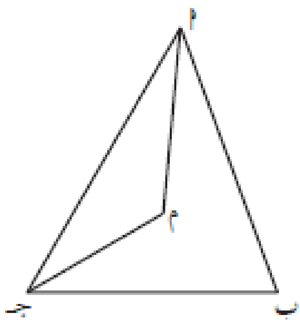
نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث على ابعاد متساوية من اضلاعه



∵ م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

∴ م ل = م ن = م و

مثال(٢): Δا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،



اذا كان ق(ا ب^ جـ) = ٧٠° ، ق (م جـ^ ب) = ٣٠°

فاوجد مع البرهان ق(م ا^جـ)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴ $\overleftarrow{\text{ا م}}$ منصف ا^ ، $\overleftarrow{\text{م جـ}}$ منصف جـ^

∴ ق (ا جـ^ ب) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

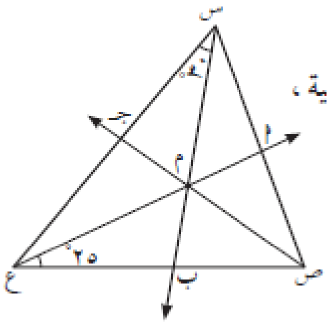
ق (ب ا^جـ) = ١٨٠° - [ق (ب^) + ق(جـ^)]

= ١٨٠° - [٧٠° + ٦٠°] = ٥٠°

ق (م ا^ جـ) = ١/٢ ق (ب ا^ جـ) = ١/٢ × ٥٠° = ٢٥°

....

مثال(٣): Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،



اذا كان ق(م ع^ ص) = ٢٥° ، ق (م س^ ع) = ٣٠°

فاوجد مع البرهان كلا مما يلي

(١) ق(س ص^ع) (٢) ق(م ص^ع)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴ ع م ← منصف ع^

∴ ق (س ع^ ص) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

∴ م س ← منصف س^

∴ ق (ص س^ ع) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

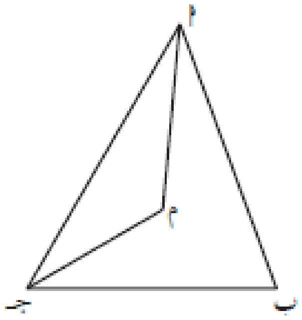
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق (س ص^ع) = ١٨٠° - [٥٠° + ٦٠°] = ٧٠°

∵ م ص ← منصف ص^

ق (م ص^ ع) = $\frac{١}{٢}$ ق (ص^) = $\frac{١}{٢}$ × ٧٠° = ٣٥°

مثال(٤): Δ ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،



ق(ا ب^ جـ) = ق (ب ا^ م) = ٤٠°

فاوجد مع البرهان ق(ا جـ^م)

البرهان :

∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴ ا م ← منصف ا^ ،

∴ ق (ب ا^ جـ) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°

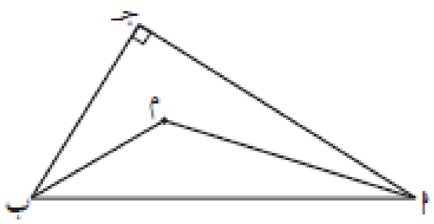
ق (جـ^) = ١٨٠° - [ق (ب^) + ق(ا^)]

= ١٨٠° - [٨٠° + ٤٠°] = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

∵ جـ م منصف جـ^

ق (ا جـ^ م) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠° = ٣٠°

مثال(٤):



Δ ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

ق (جـ م^ ب) = ١١٠°

فاوجد بالبرهان ق(جـ ا^ ب)

البرهان : ∴ Δ ا ب جـ قائم الزاوية

ق (جـ ا^ب) + ق(جـ^ا ب) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠° (مجموع قياسات المثلث = ١٨٠°)

∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴ ق (م ا^ ب) + ق (م ب^ ا) = $\frac{١}{٢}$ ق (جـ ا^ ب) + ق (جـ ب^ ا)

= $\frac{١}{٢}$ × ٩٠° = ٤٥°

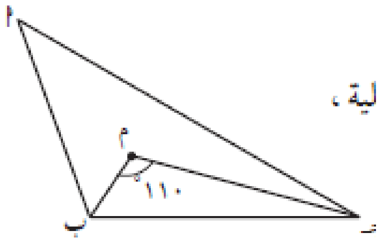
في Δ ا م ب

ق (ا م^ ب) = ١٨٠° - [ق (م ا^ ب) + ق (م ب^ ا)]

= ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

....

مثال(٥):



لية ،

Δ ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

ق (جـ م^ ب) = ١١٠°

فاوجد بالبرهان ق(جـ ا^ ب)

البرهان : في Δ م ب جـ قائم ق (جـ م^ ب) = ١١٠°

∴ مجموع قياسات المثلث = ١٨٠°

ق (م جـ^ب) + ق(م^ب جـ) = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠°

∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴ ق (ا جـ^ ب) + ق (ا ب^ جـ) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

ق (جـ ا^ ب) = ١٨٠° - [ق (ا جـ^ ب) + ق (ا ب^ جـ)]

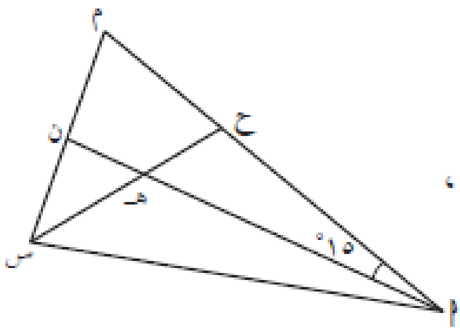
= ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠° (مجموع قياسات المثلث = ١٨٠°)

مثال(٦): م ا س مثلث فيه : ق (م^) = ٧٠° ،

ق(م ا^ ن) = ١٥° ، ق (ا س^ ح) = ٤٠° ،

اذا كان س ح منصف س ، ا ن ∩ س ح = { هـ }

فاثبت ان هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



البرهان: ∵ س ح منصف س

ق (م س^ ا) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق (م ا^ س) = ١٨٠° – [ق(م^) + ق(س^)]

= ١٨٠° - (٧٠° + ٨٠°) = ١٨٠° – ١٥٠° = ٣٠°

∵ ق (م ا^ ن) = $\frac{١}{٢}$ ق (م ا^ س)

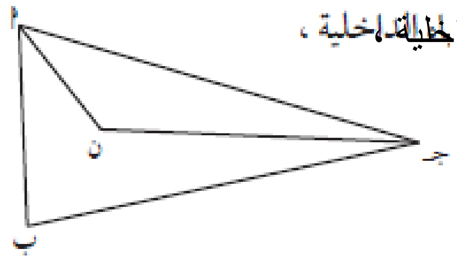
∴ ا ن منصف ا

∵ ا ن ∩ س ح = { هـ }

∴ هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

مثال (٧):

المثلث ا ب جـ فيه : ن نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،



اذا كان : ق (ن جـ^ ا) + ق (ن ا^ جـ) = ٥٠

فاوجد بالبرهان ق (ب^)

البرهان:

∵ ن نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

، ق (ن جـ^ ا) + ق (ن ا^ جـ) = ٥٠°

∴ ق (ا جـ^ ب) + ق (ب ا^ جـ) = ٢ × ٥٠° = ١٠٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق (ب^) = ١٨٠° – [ق(ا^) + ق (جـ^)]

= ١٨٠° – ١٠٠° = ٨٠°

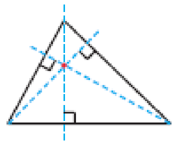
الدرس الخامس: الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على اضلاعه

نظرية:

الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على اضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة

** نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

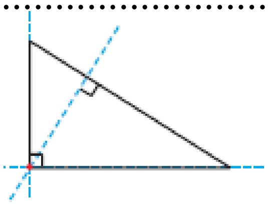
الحاد الزوايا على اضلاعه **تقع داخل المثلث**



....

** نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

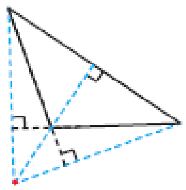
القائم الزواية على اضلاعه **هي راس الزاوية القائمة**



....

** نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

المنفرج الزواية على اضلاعه **تقع خارج المثلث**



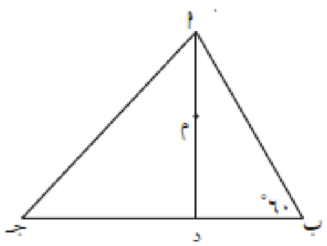
....

مثال(١)

(ا) في المثلث ا ب جـ : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

من رؤوس المثلث على اضلاعه ، م ∈ $\overline{ا د}$

اكمل (دون استخدام الادوات الهندسية):



الحل:

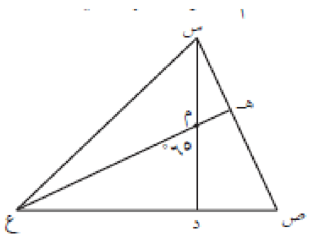
ق (ا د ^ ب) = ٩٠°

ق (د ا ^ ب) = ٣٠°

....

(ب) في المثلث س ص ع : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من

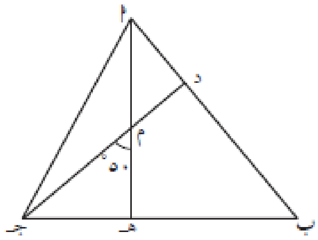
رؤوسه على اضلاعه ، ع هـ ∩ $\overline{س د}$ = {م} اكمل:



الحل:

ق(م ع ^ د) = ٢٥°

ق (س ص ^ ع) = ٦٥°



مثال(٢) ا ب جـ مثلث فيه : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق(جـ م^ هـ) = ٥٠° ،

اذا كان جـ د ∩ ا هـ = {م}

فاوجد بالبرهان ق (ب^)

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع الاعمدة

∴ Δ م جـ هـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

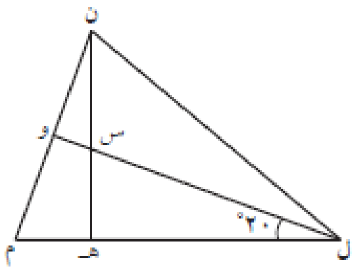
∴ ق (م جـ^ هـ) = ١٨٠° ـ (٩٠° + ٥٠°) = ١٨٠° ـ ١٤٠° = ٤٠°

Δ ب د جـ قائم الزاوية في د ، ق(م جـ^ هـ) = ٤٠°

∴ ق (ب^) = ١٨٠° ـ (٩٠° + ٤٠°) = ١٨٠°-١٣٠° = ٥٠°

....

مثال(٣):- ن ل م مثلث فيه : س نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة



من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق(و ل^ م) = ٢٠° ،

اذا كان ل و ∩ ن هـ = {م}

فاوجد بالبرهان كلا مما يلي : (١) ق (وم^ل) (٢) ق (و س^ هـ)

البرهان:

∵ س نقطة تقاطع الاعمدة

∴ Δ ل و م قائم الزاوية في و ، ق (و ل^ م) =٢٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

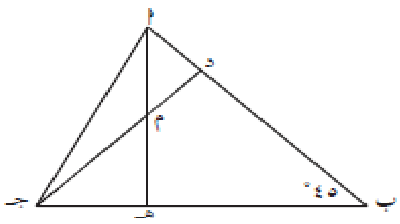
∴ ق (و م^ ل) = ١٨٠° ـ (٩٠° + ٢٠°) = ١٨٠° ـ ١١٠° = ٧٠°

في الشكل الرباعي س هـ م و

ق(و س^ هـ) = ٣٦٠° ـ (٩٠° + ٩٠° + ٧٠°) = ٣٦٠° ـ ٢٥٠° = ١١٠°

لان مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

مثال(٤):- ا ب جـ مثلث فيه : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة



من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق(ب^) = ٤٥° ،

اذا كان ا هـ ∩ جـ د = {م}

فاوجد بالبرهان: (١) ق (ب ا^ هـ) (٢) ق(د م هـ)

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع الاعمدة

∴ Δ ا ب هـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق (ب ا^ هـ) = ١٨٠° ـ (٩٠° + ٤٠°) = ١٨٠° ـ ١٣٥° = ٤٥°

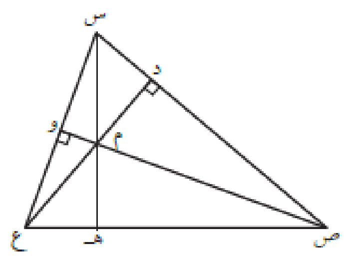
Δ ا م د قائم الزاوية في د ، ق(د ا^ م) = ٤٥°

∴ ق (د م^هـ) = ١٨٠° ـ ٤٥° = ١٣٥° (بالتجاور على مستقيم واحد)

يمكن ايجاد الزاوية من زوايا الشكل الرباعي ب د م هـ

....

مثال(٥) س ص ع مثلث فيه : ق(س ع^ ص) = ٧٠° ،



ع د ⊥ س ص ، ص و ⊥ س ع ،

(١) اثبت ان : س هـ ⊥ ص ع

فاوجد بالبرهان ق (هـ س^ع)

البرهان:

∵ ع د ⊥ س ص ، ص و ⊥ س ع ، ع د ∩ ص و = { م }

∴ م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

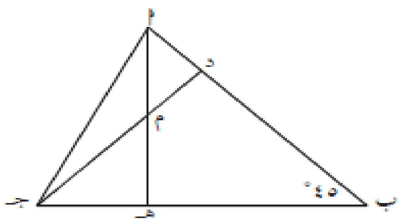
∴ س هـ ⊥ ص ع (١)

في Δ س هـ ع فيه ق(س هـ^ ع) = ٩٠° ، ق (س ع^ ص) = ٧٠°

∴ ق(هـ س^ ع) = ١٨٠° ـ (٩٠° + ٧٠°) = ١٨٠° ـ ١٦٠° = ٢٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

مثال(٦)



ا ب جـ مثلث فيه : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق(ام^ هـ) = ٥٥°

اذا كان ا د ∩ ب هـ = {م}

فاوجد بالبرهان: (١) ق (ا جـ^ ب)

البرهان:

∵ م نقطة تقاطع الاعمدة

∴ Δ ا ب هـ قائم الزاوية في هـ ، ق(ام^ هـ) = ٥٥°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ٨٠°

∴ ق (م ا^ هـ) = ١٨٠° – (٩٠° + ٥٥°) = ١٨٠° – ١٤٥° = ٣٥°

ا د جـ قائم الزاوية في د ، ق(م ا^ هـ) = ٣٥°

∴ ق (جـ^) = ١٨٠° – (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

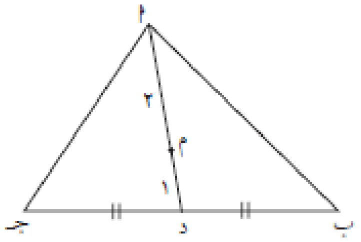
∵ ق (جـ^) = ق (ب^) = ٥٥°

∴ Δ ب ا جـ متطابق الضلعين

القدس عربية إسلامية وستعود لنا بإذن الله

الدرس السادس : القطع المتوسطة للمثلث

نظرية: القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الراس



في Δ ا ب جـ :ا د قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

اكمل :

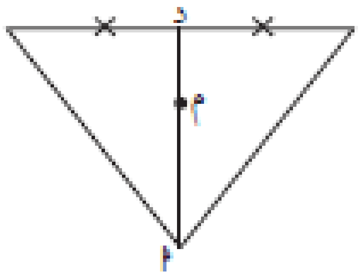
ا م = ٢ م د   م د = ١/٣ ا د   ا م = ٢/٣ ا د

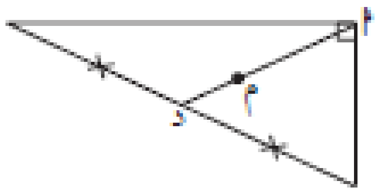
م د = ١/٢ ا م   ا د = ٣ م د   ا د = ٣/٢ ا م

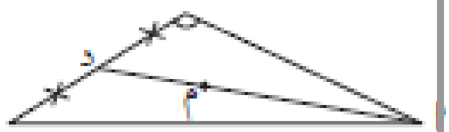
....

مثال(١)

في كل المثلثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسطة اكمل ما يلي (دون استخدام الادوات الهندسية)







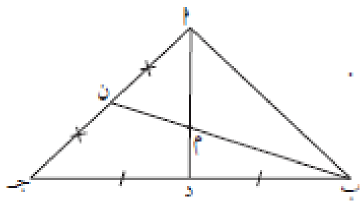
د م = ٣ سم
ا م = ٦ سم
ا د = ٩ سم

ا م = ٤ سم
د م = ٢ سم
ا د = ٦ سم

ا د = ١٨ سم
د م = ١/٣ × ١٨ = ٦ سم
ا م = ٢/٣ × ١٨ = ١٢ سم

....

مثال(٢): في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسطة



(١) اذا كان ب م = ١٠ سم فاوجد ن م ، ب ن

الحل: ن م = ٥ سم ، ب ن = ١٥ سم

(٢) اذا كان ا د = ١٢ سم فاوجد ا م ، د م

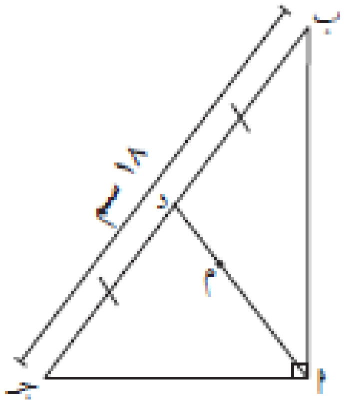
الحل:

ا م = ٨ سم ، ب م = ٤ سم

مثال(٣): في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

ب جـ = ١٨ سم فاوجد بالبرهان كلا من ا د ، ا م



البرهان:

∵ △ ا ب جـ قائم الزاوية في ا ، د منتصف ب جـ

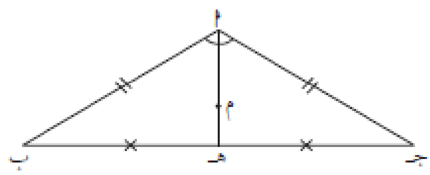
∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ = ٩ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ ا م = $\frac{٢}{٣}$ × ٩ = ٦ سم

....

مثال(٤) : ا ب جـ مثلث فيه :



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

ا ب = ا جـ = ٢٤ سم ، ق (جـ^) = ٣٠°

فاوجد بالبرهان كلا من ا هـ ، م هـ ، م ا

البرهان:

∵ △ ا ب جـ ، ا ب = ا جـ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ا هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ ق (جـ^) = ٣٠ △ ا جـ هـ ثلاثيني ستيني

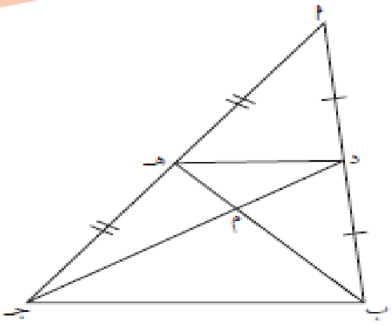
∴ ا هـ = $\frac{١}{٢}$ ا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤= ١٢ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ م هـ = $\frac{١}{٣}$ ا هـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

م هـ = $\frac{٢}{٣}$ ا هـ = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم

مثال(٥):



في الشكل المقابل :

د منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ ،

د جـ ∩ ب هـ = { م }

ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم

اوجد بالبرهان محيط △ د م هـ

البرهان:

∵ د منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ (نظرية) = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

∵ د جـ ∩ ب هـ = { م }

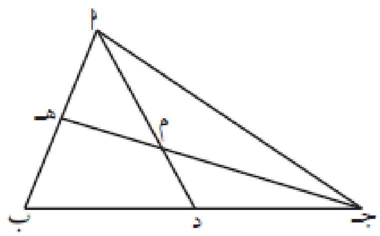
∴ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

∴ د م = $\frac{١}{٣}$ ا هـ = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣ سم

م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٤ = ٢ سم

محيط △ د م هـ = د هـ + د م + م هـ = ٤ + ٣ + ٢ = ٩ سم

مثال(٦):



في الشكل المقابل : ا د ∩ جـ هـ = { م }،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ا ب جـ ،

ا م = ١٨سم ، جـ هـ = ٣٠ سم ،

اوجد بالبرهان: (١) م هـ (٢) جـ م (٣) ا د

البرهان:

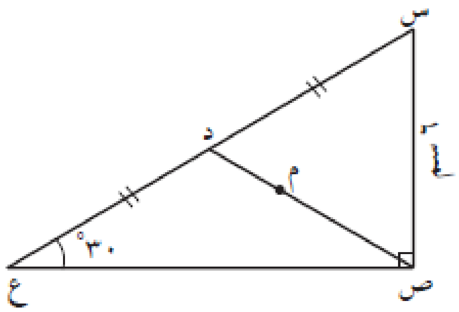
∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ا ب جـ

∴ م هـ = $\frac{١}{٣}$ هـ جـ = $\frac{١}{٣}$ × ٣٠ = ١٠ سم

∴ جـ م = $\frac{٢}{٣}$ جـ هـ = $\frac{٣}{٣}$ × ٣٠ = ٢٠ سم

∵ ا م = $\frac{٢}{٣}$ ا د ∴ ا د = $\frac{٣}{٢}$ × ١٨ = ٢٧ سم

مثال(٧) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص :



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

س ص = ٦ سم ، ق (ع^) = ٣٠°

فاوجد بالبرهان كلا من س ع ، ص **د** ، ص م

البرهان:

∵ △ ا ب جـ قائم في ص ، ق (ع^) = ٣٠°

∵ △ س ص ع ثلاثيني ستيني

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ س ع

س ع = ٢ × ٦ = ١٢ سم

المستقبل لك بإذن الله

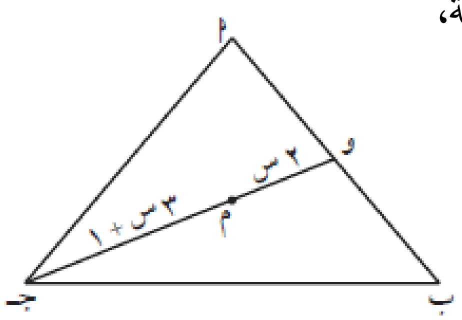
∵ د منتصف س ع

∴ ص د = $\frac{١}{٢}$ س ع = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم (نظرية)

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ ص م = $\frac{٢}{٣}$ ص هـ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم

مثال(٨) :في الشكل المقابل : ا ب جـ مثلث فيه جـ و قطعة متوسطة،



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

اذا كان م و =٢ س ، جـ م = ٣ س + ١

اوجد بالبرهان قيمة س

البرهان :∵.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ و جـ قطعة متوسطة

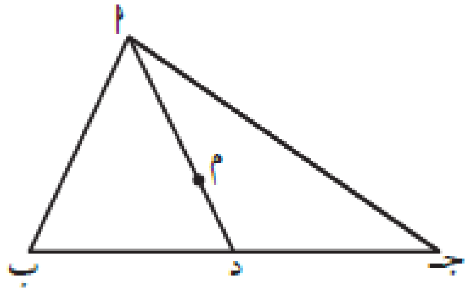
∴ م جـ = ٢ م و

٣ س + ١ = ٢ × ٢ س

٣ س + ١ = ٤ س

٤ س – ٣ س = ١ ∴ س = ١

مثال(٩) :



في الشكل المقابل : ا ب جـ مثلث فيه ا د قطعة متوسطة،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

اذا كان ا م =٥ س ، م د = س + ٣

اوجد بالبرهان قيمة ا د

البرهان :

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ ا د قطعة متوسطة

∴ ا م = ٢ م د

٥ س = ٢ × (س + ٣)

٥ س = ٢ س + ٦

٥ س ــ ٢ س = ٦

٣ س = ٦ بالقسمة على ٣

∴ س = ٢

ا د = ا م + م د = ٥ س + س + ٣ = ٥ × ٢ + ٢ + ٣ = ١٠ + ٥ = ١٥ سم

الوحدة الثالثة النسبة المئوية

الدرس الاول: النسبة المئوية

مثال(١): اذا كان سعر لوحة فنية ١٥٠ دينارا ، وتم خصم ١٠% من سعرها الاصلي فما قيمة هذا الخصم ؟

الحل :

قيمة الخصم = $\frac{١٠}{١٠٠} \times ١٥٠ = ١٥$ دينار

....

مثال (٢): باعت مكتبة ١٨٠ كتابا والتي تمثل ٣٠ % من كتبها المعروضة

اوجد عدد الكتب التي كانت في المكتبة قبل البيع

الحل :-

نفرض عدد الكتب قبل البيع س

٣٠ % × س = ١٨٠

$\frac{٣٠}{١٠٠} \times$ س $= ١٨٠$

س = $\frac{١٨٠ \times ١٠٠}{٣٠} = ٦٠٠$

....

مثال (٣):

باع محل للعطور ٤٠ % من الكمية المعروضية عنده والتي بلغت ٣٦٠ زجاجة عطر

فكم عدد زجاجات العطر التي كانت لديه ؟

الحل :

نفرض ان عدد الزجاجات كلها س

٤٠ % × س = ٣٦٠

$\frac{٤٠}{١٠٠} \times$ س $= ٣٦٠$

س = $\frac{٣٦٠ \times ١٠٠}{٤٠} = ٩٠٠$ زجاجة

مثال(٤):

اثناء موسم التخفيضات اشترت شهد حقيبة كان سعرها ٢٤٠ دينارا وتم خصم ٦٠ دينارا من سعرها الاصلي فما النسبة المئوية للخصم؟

الحل:

نسبة الخصم = $\frac{٦٠}{٢٤٠}$ × ١٠٠ % = ٢٥ %

مثال(٥): قدر ٢٤ % من ٨١

الحل: ٢٤ % ~ ٢٥ %

٨١ ~ ٨٠

٢٥% × ٨٠ = $\frac{٢٥}{١٠٠}$ × ٨٠ = $\frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠

٢٤ % من ٨١ ~ ٢٠

مثال(٦): (١) قدر ٥ , ٧٤ % من ٢٣٩

الحل: ٥ , ٧٤ % ~ ٧٥ %

٢٣٩ ~ ٢٤٠

٧٥ % × ٢٤٠ = × ٢٤٠ = ١٨٠

٥ , ٧٤ % من ٢٣٩ ~ ١٨٠

---

(٢) قدر ٣٣ % من ٨٩

الحل : ٣٣ % ~ $\frac{١}{٣}$ ٣٣ %

٨٩ ~ ٩٠

$\frac{١}{٣}$ ٣٣ % من ٩٠ =

$\frac{١٠٠}{٣ \times ١٠٠}$ × ٩٠ = ٣٠

٣٣ % من ٨٩ ~ ٣٠

مثال(٧): اعلن احد المحلات التجارية عن خصم ١١% على احدي السلع

قدر قيمة الخصم اذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارا

الحل:

١١% ~ ١٠ %

٤٩٩ ~ ٥٠٠٠

١٠ % من ٥٠٠٠ = ١٠ % × ٥٠٠ = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠ = ٥٠

١١% من ٤٩٩ ~ ٥٠

....

مثال(٨) : اذا كانت مبيعات شركة ما في احد الاعوام ٣٥٠٠٠٠ دينار ثم انخفضت بنسبة ١٩ %

في العام الذي يليه فقدر قيمة الانخفاض

الحل: ١٩ % ~ ٢٠ %

٢٠ % من ٣٥٠٠٠٠ = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ٣٥٠٠٠٠ = ٧٠٠٠٠

١٩ % من ٣٥٠٠٠٠ ~ ٧٠٠٠٠

قيمة الانخفاض ~ ٧٠٠٠٠

مثال (٩) :

جهاز كهربائي سعره ١٢٠ دينارا وفي موسم التنزيلات وضع عليه خصم بنسبة ١٥ % فما قيمة الخصم ؟

الحل :

قيمة الخصم = نسبة الخصم × السعر الاصلي

= $\frac{١٥}{١٠٠}$ × ١٢٠ = ١٨ دينار

....

مثال(١٠):

سجل ٥٠ متعلما في رحلة مدرسية الي ابراج الكويت حضر منهم ٣٥ متعلما فقط

ما النسبة المئوية للحاضرين ؟

الحل:

النسبة المئوية للحاضرين = $\frac{\text{عدد الحاضرين}}{\text{عدد الكلي}}$ × ١٠٠ % = $\frac{٣٥}{٥٠}$ × ١٠٠ = ٧٠ %

مثال(١١):

اذا كان ٢٠ % من متعلمي الصف التاسع في احدى المدارس هو ٤٢ متعلما

فما عدد متعلمي الصف التاسع ؟

الحل: نفرض ان عدد الصف التاسع س

٢٠ % من س = ٤٢

٢٠ % × س = ٤٢

$\frac{٢٠}{١٠٠}$ × س = ٤٢

س = $\frac{٤٢ \times ١٠٠}{٢٠}$ = ٢١٠

هضع نجمة أمام القوانين الواجب حفظها

الدرس الثاني: النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية

يمكن حل المسائل التي تتضمن نسبا مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

كذلك يمكن حل المسائل التي تتضمن نسبا مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

مثال(١): اوجد القيمة النهائية اذا كانت القيمة الاصلية ٩٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠ %

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

= ٩٠ × (١٠٠ % + ٣٠ %)

= ٩٠ × ١٣٠ % = ٩٠ × $\frac{١٣٠}{١٠٠}$ = ١١٧

....

مثال(٢): اوجد القيمة النهائية اذا كانت القيمة الاصلية ١٢٠٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠ %

الحل :القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

= ١٢٠٠ × (١٠٠ % - ٨٠ %)

= ١٢٠٠ × ٢٠ % = ١٢٠٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٢٤٠

مثال(٣): تناقصت ايرادات احدى المؤسسات التجارية في نهاية السنة المالية لعام ٢٠١٧ م حيث بلغت ٢٧٠٠٠٠ دينار بنسبة تناقص ١٠ % عن نهاية السنة المالية ٢٠١٦ م

اوجد القيمة الاصلية للايرادات ومقدار التناقص

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

٢٧٠٠٠٠ = س ×(١٠٠ % - ١٠ %)

= س × ٩٠ %

س × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٢٧٠٠٠٠

س = $\frac{٢٧٠٠٠٠ \times ١٠٠}{٩٠}$ = ٣٠٠٠٠٠

مقدار النقص = القيمة النهائية ــ القيمة الاصلية

= ٢٧٠٠٠٠ ــ ٣٠٠٠٠٠ = -٣٠٠٠٠

مثال(٤):

اوجد القيمة الاصلية اذا كانت القيمة النهائية تساوي ٨٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠ % وما مقدار الزيادة؟

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠% + النسبة المئوية للتزايد)

= القيمة الاصلية × (١٠٠% + ٦٠%)

٨٠ = القيمة الاصلية × ١٦٠%

القيمة الاصلية = $\frac{٨٠ \times ١٠٠}{١٦٠}$ = ٥٠

مقدار الزيادة = القيمة النهائية - القيمة الاصلية

= ٨٠ ــ ٥٠ = ٣٠

مثال(٥):

زادت اسعار بيع التلفاز في احد المحلات التجارية فبلغت ٢١٠ دينار اذا كان السعر الاصلي ١٤٠ دينارا فاوجد النسبة المئوية للتزايد

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠% + نسبة التزايد)

٢١٠ = ١٤٠ × (١ + س)

١ + س = $\frac{٢١٠}{١٤٠}$ =

س = $\frac{٣}{٢}$ - ١ = $\frac{١}{٢}$

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠% = ٥٠%

مثال(٦): اوجد النسبة المئوية للتناقص اذا كانت القيمة النهائية ٣٠٠ والقيمة الاصلية ٥٠٠

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % - نسبة التناقص)

٣٠٠ = ٥٠٠ × (١ ـ س)

$١ - س = \frac{٣٠٠}{٥٠٠}$

$١ - س = \frac{٣}{٥}$

$س = ١ - \frac{٣}{٥}$

$س = \frac{٢}{٥}$

النسبة المئوية للتناقص = $\frac{٢}{٥}$ × ١٠٠ %= ٤٠ %

مثال(٧):

اوجد السعر النهائي لحاسوب كان سعره ٧٠٠ دينار ثم زاد بنسبة ٢٠ %

الحل: السعر النهائي = القيمة الاصلية × (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

= ٧٠٠ × (١٠٠% + ٢٠ %) = ٧٠٠ × ١٢٠ %

= ٧٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ٨٤٠ دينار

مثال(٨):- يعمل جاسم في محل بيع الهواتف المتنقلة ويحصل على خصم ٣٠ % على مشترياته اذا كان سعر البيع لاحد الهواتف ٧٠ دينارا فكم سيدفع جاسم بعد الخصم؟

الحل:

القيمة النهائية = الاصلية × (١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

= ٧٠ × (١٠٠ % - ٣٠ %)

=٧٠ × ٧٠ % = $\frac{٧٠ \times ٧٠}{١٠٠}$ = ٤٩ دينار

مثال(٩): ارتفعت قيمة سهم احدى شركات الاتصالات المدرجة في سوق الاوراق المالية بنسبة ١٤ % اذا كانت القيمة الاصلية للسهم ٤٠٠ فلس فاوجد القيمة النهائية

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

= ٤٠٠ × (١٠٠ % + ١٤ %)

= ٤٠٠ × ١١٤ % = ٤٠٠ × $\frac{١١٤}{١٠٠}$ = ٤٥٦ فلس

مثال(١٠):

اوجد القيمة الاصلية اذا كانت القيمة النهائية ٧٠٠ ، النسبة المئوية للتناقص تساوي ٦٥ %

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

٧٠٠ = القيمة الاصلية × (١٠٠ % - ٦٥ %)

٧٠٠ = القيمة الاصلية × ٣٥%

٧٠٠ = القيمة الاصلية × $\frac{٣٥}{١٠٠}$

القيمة الاصلية = $\frac{٧٠٠ \times ١٠٠}{٣٥}$ = ٢٠٠٠ دينار

مثال(١١):

تزايدت ايرادات احد المطاعم بنسبة ٣٠ % عن الشهر السابق

اذا بلغت الايرادات ٢٦٠٠ فاحسب ايرادات الشهر السابق

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

٢٦٠٠ = الاصلية × (١٠٠ % + ٣٠ %)

٢٦٠٠ = الاصلية + ١٣٠ %

القيمة الاصلية = $\frac{٢٦٠٠ \times ١٠٠}{١٣٠}$ = ٢٠٠٠ دينار

مثال(١٢): اشترت عائشة قلادة ذهبية بقيمة ٢٤٠٠ دينار بعد ان حصلت على خصم ٢٠ %

اوجد السعر الاصلي للقلادة ثم اوجد مقدار الخصم

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية ×(١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

٢٤٠٠ = القيمة الاصلية × ٨٠ %

القيمة الاصلية = $\frac{٢٤٠٠ \times ١٠٠}{٨٠}$ = ٣٠٠٠ دينار

مثال(١٣):

اوجد النسبة المئوية للتزايد اذا كانت القيمة النهائية ٢٤٠ والقيمة الاصلية ٢٠٠

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية × (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

٢٤٠ = ٢٠٠ × (١ + س)

١ + س = $\frac{٢٤٠}{٢٠٠}$

١ + س = $\frac{٦}{٥}$

س = $\frac{٦}{٥}$ - ١ = $\frac{١}{٥}$

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١}{٥}$ × ١٠٠ % = ٢٠ %

....

الدرس الثالث: تطبيقات على تغير النسبة المئوية

مثال(١) رفعت احدى شركات الطيران اسعارها بنسبة ٢٠% ثم منحت هذه الشركة موظفيها خصما يبلغ ١٠% فكم ستدفع احدى الموظفات في هذه الشركة لتذكرة كان سعرها ٢٠٠ دينار قبل الزيادة؟

الحل:

سعر التذكرة بعد الزيادة = القيمة الاصلية × (١٠٠% + نسبة التزايد)

= ٢٠٠ × (١٠٠% + ٢٠%)

= ٢٠٠ × ١٢٠% = ٢٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ٢٤٠ دينار

القيمة النهائية للتذكرة = القيمة الاصلية × (١٠٠% - نسبة التناقص)

= ٢٤٠ × (١٠٠% - ١٠%)

= ٢٤٠ × ٩٠% = ٢٤٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٢١٦ دينار

....

مثال(٢): يكلف استئجار قارب من احدى شركات تاجير القوارب في اليوم الواحد ٢٥ دينارا

يضاف اليها نظير الخدمة، اوجد تكلفة الاستئجار في الحالات التالية:

(ا) خصم ٢٠% ثم اضافة ١٠% نظير الخدمة

الحل: التكلفة بعد الخصم = القيمة الاصلية × (١٠٠% - نسبة الخصم)

= ٢٥ × (١٠٠% - ٢٠%)

= ٢٥ × ٨٠% = ٢٥ × = ٢٠ دينار

التكلفة بعد اضافة الخدمة = القيمة الاصلية × (١٠٠% + نسبة الزيادة)

= ٢٠ × (١٠٠% + ١٠%) = ٢٠ × ١١٠% = ٢٠ × $\frac{١١٠}{١٠٠}$ = ٢٢ دينار

(ب) خصم ٢٠% خصما بعد اضافة ٥ دنانير نظير الخدمة

الحل:

تكلفة الاستئجار بعد اضافة الخدمة = ٢٥ + ٥ = ٣٠ دينار

تكلفةالاستئجار بعد الخصم = القيمة الاصلية × (١٠٠% - نسبة الخصم)

= ٣٠ × (١٠٠% - ٢٠%) = ٣٠ × ٨٠% = $\frac{٣٠ \times ٨٠}{١٠٠}$ = ٢٤ دينار

مثال(٣) :

رفع احد معارض السيارات اسعاره بنسبة ٢٠% ثم منح هذا المعرض موظفيه خصما يبلغ ١٠% فكم سيدفع احد الموظفين في هذا المعرض ثمنا لشراء سيارة كان سعرها ٩٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحل :

ثمن السيارة بعد اضافة ٢٠% = ٩٠٠٠ × (١٠٠% + ٢٠%)

= ٩٠٠٠ × ١٢٠ % = ٩٠٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ١٠٨٠٠ دينار

ثمن السيارة بعد خصم ١٠% = ١٠٨٠٠ × (١٠٠% - ١٠%) = ١٠٨٠٠ × ٩٠% = ٩٧٢٠ دينار

....

مثال(٤):

بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور مسرحية ٥٠ دينارا ويضاف اليها نظير الخدمة اوجد سعر التذكرة في كل الحالات التالية:

(ا) خصم ٢٠% ثم اضافة ١٢% نظير الخدمة

الحل :

سعر التذكرة بعد الخصم = ٥٠ ×(١٠٠% - ٢٠%) = ٥٠ × ٨٠% = ٤٠ دينار

سعر التذكرة النهائي بعد اضافة الخدمة = ٤٠ ×(١٠٠% + ١٢%)

= ٤٠ × ١١٢% = ٨ , ٤٤ دينار

....

(ب) خصم ٢٠% بعد اضافة ١٠ دنانير نظير الخدمة

الحل:

سعر التذكرة بعد اضافة ١٠ الخدمة = ٥٠ +١٠ = ٦٠ دينار

السعر النهائي بعد خصم ٢٠% = ٦٠ × (١٠٠% - ٢٠%)

= ٦٠ × ٨٠% = ٤٨ دينار

الوحدة الرابعة المساحات والحجوم

الدرس الاول: المساحة السطحية للهرم والمخروط

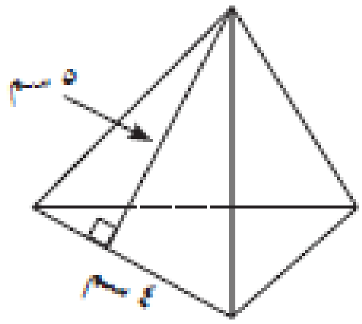
المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الاوجه × مساحة الوجه الواحد

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الاوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

مثال (١) :

هرم منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته ٤ √٣ سم² وارتفاعه المائل ٥ سم اوجد مساحته السطحية



الحل: مساحة الوجه الواحد = ١/٢ × ق × ع

= ١/٢ × ٤ × ٥ = ١٠ سم²

مساحة القاعدة = ٤ √٣ سم²

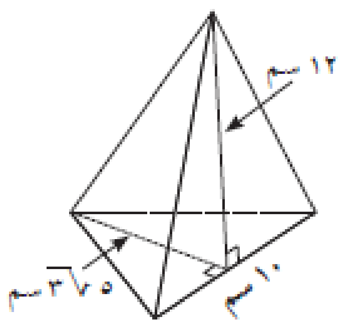
المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه × مساحة الوجه + مساحة القاعدة

= ٣ × ١٠ + ٤ ٣ = ٣٠ + ٤ √٣

....

مثال (٢): هرم منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاع قاعدته ٥ √٣ سم² وارتفاعه المائل ١٢ سم

اوجد مساحته السطحية



الحل: مساحة الوجه الواحد = ١/٢ × ق × ع

= ١/٢ × ١٠ × ١٢ = ٦٠ سم

مساحة القاعدة = ١/٢ × ق × ع = ١/٢ × ١٠ × ٥ √٣ = ٢٥ √٣ سم²

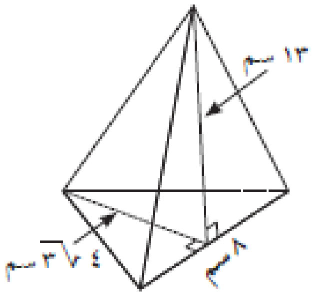
المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه × مساحة الوجه + مساحة القاعدة

= ٣ × ٦٠ + ٢٥ √٣ = ١٨٠ + ٤ √٣ سم²

مثال(٣) :

علبة زجاجية على شكل هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٨ سم وارتفاع القاعدة ٤$\sqrt{٣}$

وارتفاعه المائل ١٣ سم اوجد المساحة السطحية



الحل:

مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ ×١٣ = ٥٢ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع = $\frac{١}{٢}$ × ٨ ×٤$\sqrt{٣}$ = ١٦$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه × مساحة الوجه + مساحة القاعدة

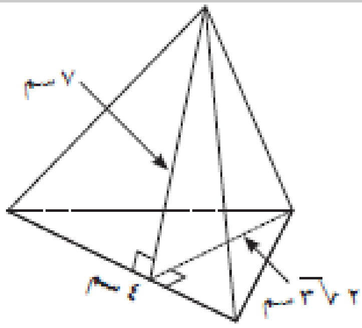
= ٣ × ٥٢ + ١٦$\sqrt{٣}$ = ١٥٦ + ١٦$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

....

مثال (٤):

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم وارتفاع قاعدته ٢$\sqrt{٣}$ سم^{٢} وارتفاعه المائل ٧ سم

اوجد مساحته السطحية



الحل:

مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

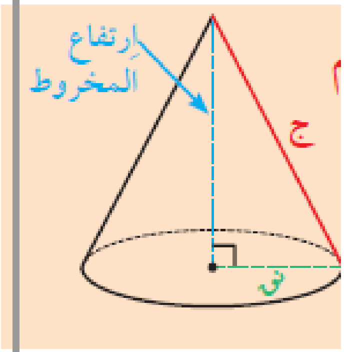
= $\frac{١}{٢}$ ×٤ × ٧ = ١٤ م^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢$\sqrt{٣}$ = ٤$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه × مساحة الوجه + مساحة القاعدة

= ٣ × ١٤ + ٤$\sqrt{٣}$ = ٤٢ + ٤$\sqrt{٣}$

<u>المخروط الدائري القائم :</u> مجسم قاعدته دائرية الشكل وله راس واحد وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من راسه على قاعدته عند مركزها



المساحة الجانبية للمخروط القائم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{١}{٢}$ × ٢π نق × ج = π نق × ج

(ج طول الراسم)

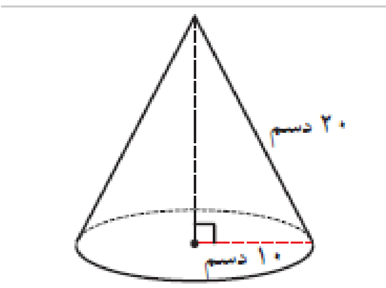
المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π نق × ج + π نق^{٢}

= π نق (ج + نق)

....

<u>مثال(١):</u>



في الشكل المقابل مخروط دائري قائم (اعتبر π = ١٤ , ٣)

اوجد (ا) مساحته الجانبية

(ب) مساحته السطحية

الحل: نق = ١٠ دسم ، ج = ٢٠ دسم

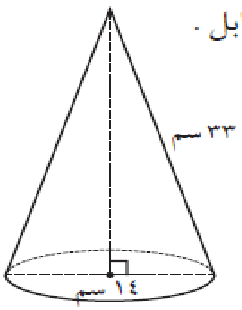
(ا) المساحة الجانبية = π نق ج

= ١٤ , ٣ × ١٠ × ٢٠ = ٦٢٨ دسم^{٢}

(ب) المساحة السطحية = π نق (ج + نق)

= ١٤ , ٣ × ١٠ × (١٠ +٢٠) = ١٤ , ٣ × ١٠ × ٣٠ = ٩٤٢ دسم^{٢}

<u>مثال(٢):</u> في الشكل المقابل اوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري قائم (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

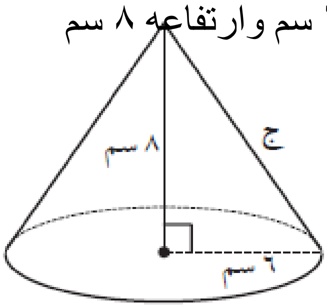


الحل: نق = ٧ سم ، ج = ٣٣ سم

المساحة السطحية = π نق (ج + نق)

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × (٧ +٣٣) = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٤٠ = ٨٨٠ سم^{٢}

مثال(٣): في الشكل المقابل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم



اوجد ما يلي :(ا) طول الراسم

الحل: بتطبيق فيثاغورث

ج^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

ج = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

(ب) المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

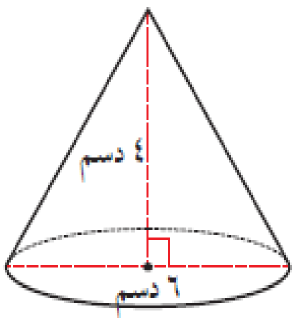
الحل: المساحة السطحية = π نق (نق + ج)

= π × ٦ × (٦ + ١٠)

= π × ٦ × ١٦ = ٩٦ π سم^{٢}

مثال(٤): في الشكل المقابل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ دسم وارتفاعه ٤ دسم

اوجد ما يلي :-(ا) طول الراسم



الحل: بتطبيق فيثاغورث

ج^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٩ + ١٦= ٢٥

ج = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ دسم

(ب) المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

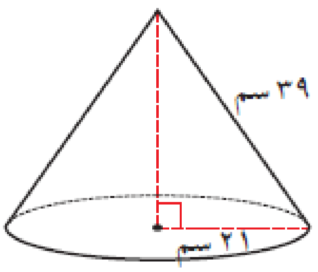
الحل:المساحة السطحية = π نق (نق + ج)

= π × ٣ × (٣ + ٥)

= π × ٣ × ٨ = ٢٤ π سم^{٢} .

مثال(٥): في الشكل المقابل اوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري قائم (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل: نق = ٢١ سم ، ج = ٣٩ سم



المساحة السطحية = π نق (ج + نق)

= $\frac{٢٢}{٧}$ ×٢١ × (٢١ +٣٩)

= $\frac{٢٢}{٧}$ ×٢١ × ٦٠ = ٣٩٦٠ سم^{٢}

الدرس الثاني: حجم الهرم

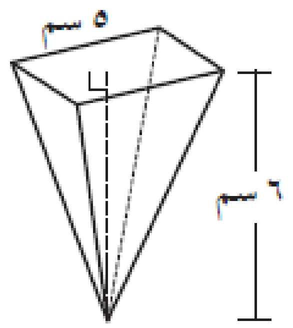
حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × حجم المنشور القائم المشترك معه في القاعدة والارتفاع

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

مثال (١):

اوجد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربع كما في الشكل:



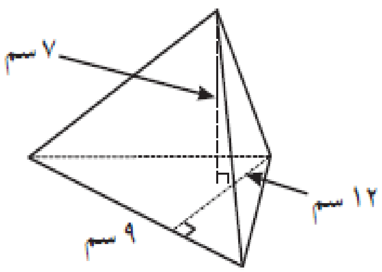
الحل: (مساحة المربع = الضلع × نفسه)

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣} \times (٥)^{٢} \times ٦ = ٥٠$ سم^{٣}

مثال (٢):

اوجد حجم المجسم في الشكل:



الحل: مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢} \times ٩ \times ١٢ = ٥٤$ سم^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣} \times ٥٤ \times ٧ = ١٢٦$ سم^{٣}

مثال(٣):

ينتج احد مصانع الحلوى قطعا من الكاكاو على شكل هرم منتظم حجم القطعة الواحدة منها ١٦ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم اوجد مساحة قطعة الكاكاو

الحل:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

١٦ = $\frac{١}{\cancel{٣}}$ × م × $\cancel{٦}$ ٢ ← ١٦ = ٢م

٢ م = ١٦

م = ٨ سم^{٢}

مثال(٤):

تصنع رنا علبة على شكل هرم منتظم اذا كان حجم العلبة ٥٥ سم^{٣} ومساحة قاعدتها ١٥ سم^{٢} فما ارتفاع العلبة

الحل:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٥٥ = $\frac{١}{\cancel{٣}}$ × $\cancel{١٥}$ ٥ × ع ← ٥٥ = ٥ ع

٥ ع = ٥٥

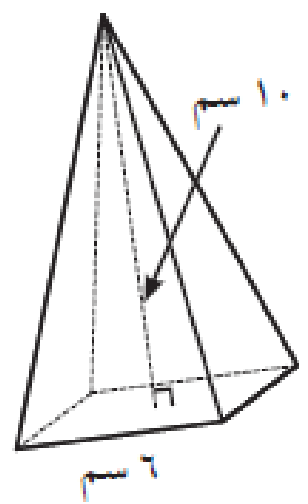
ع = ١١ سم

....

مثال (٥):

اوجد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم

الحل:



مساحة القاعدة = الضلع × نفسه = ٦ × ٦ = ٣٦ سم^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

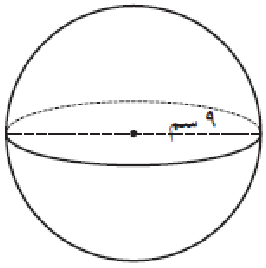
= $\frac{١}{٣}$ × ٣٦ × ١٠ = ١٢٠ سم^{٣}

الدرس الثالث : حجم الكرة

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

مثال(١) :

اوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم (بدلالة π)



الحل : نق = ٩ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi \,(٩)^{٣}$ = ٩٧٢ π سم^{٣}

....

مثال(٢) :

اوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم (بدلالة π)

الحل : نق = ٣ سم

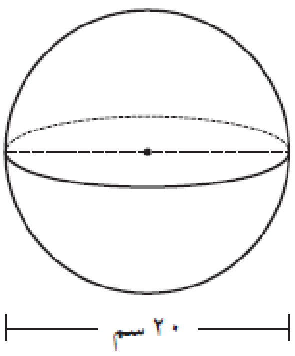
حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi \,(٣)^{٣}$ = ٣٦ π سم^{٣}

....

مثال(٣) : من خلال الشكل المقابل

اوجد حجم كرة المرسومة (اعتبر π = ١٤ , ٣)



الحل : نق = ١٠ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times$ ٣ , ١٤ $\times (١٠)^{٣}$ = ٧ , ٤١٨٦ سم^{٣}

مثال(٤) :

اوجد حجم كرة طول قطرها ١ م (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل : نق = م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (\frac{١}{٢})^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times \frac{١}{٨} = \frac{١١}{٢١}$ م^{٢}

....

مثال(٥):

اوجد حجم قبة مسجد اذا علم انها على شكل نصف كرة قطرها ١٢ م بدلالة π

الحل:

الحل : نق = ٦ م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

حجم القبة = $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi\ (٦)^{٣} = ١٤٤\pi$ م ^{٣}

....

مثال(٦): شركة عطور تصمم زجاجة عطر على شكل كرة حجمها ٣٦ π اوجد طول قطر الزجاجة

الحل : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

٣٦ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

٤ نق^{٣} = ٣ × ٣٦

نق^{٣} = ٢٧ نق = $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

مثال(٧):

كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}\pi$ م^٣ اوجد طول نصف قطرها

الحل :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^٣

$\frac{٣٢}{٣}\pi = \frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣

٤ نق^٣ = ٣٢

نق^٣ = ٨ نق = ٢ م

....

مثال(٨):

اوجد حجم خزان على شكل نصف كرة قطرها ٢ م (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل:

الحل : نق = ١ م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^٣

حجم القبة = $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (١)^٣ = \frac{٤٤}{٢١}$ م^٣

....

مثال(٩):

كرة حجمها $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$ م^٣ اوجد طول نصف قطرها

الحل :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^٣

$\frac{٢٥٦}{٣}\pi = \frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣

٤ نق^٣ = ٢٥٦

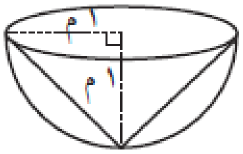
نق^٣ = ٦٤ نق = $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤ م

الدرس الرابع : تطبيقات على المساحات السطحية والحجوم

مثال(١)

في الشكل المقابل :

نصف كرة نصف قطرها ١ م حفر بداخلها مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى لنصف الكرة وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة



احسب حجم الجزء المتبقي من المجسم بدلالة π

الحل:

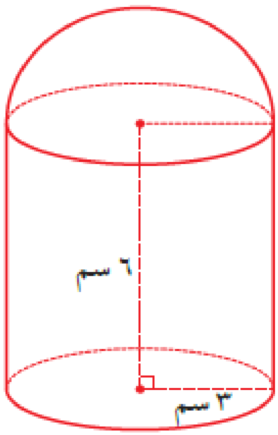
حجم نصف الكرة = $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣} = $\frac{٢}{٣} \pi$ م^{٣}

حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣} \pi \times (١)^{٢} \times ١$ = $\frac{١}{٣} \pi$ م^{٣}

حجم الجزء المتبقي = $\frac{٢}{٣} \pi - \frac{١}{٣} \pi = \frac{١}{٣} \pi$

....

مثال(٢):



في الشكل المقابل : اسطوانة يعلوها نصف كرة

اوجد حجم المجسم بدلالة π

الحل:

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} ع = $\pi \times (٣)^{٢} \times ٦ = ٥٤ \pi$

حجم نصف الكرة = $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi \times$ نق^{٣} = ١٨π

حجم المجسم = حجم الاسوانة + حجم نصف الكرة

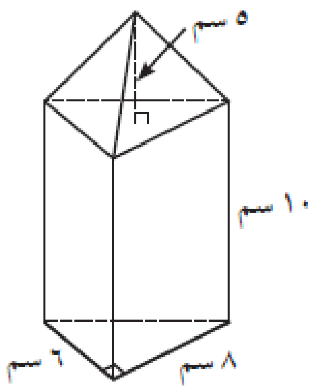
= $٥٤ \pi + ١٨ \pi = ٧٢ \pi$

مثال(٣): في الشكل المقابل : منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٠ سم

وقاعدته على شكل مثلث قائم طول ضلعي القائمة فيه ٨سم ،

٦ سم يعلوه هرم ثلاثي قائم له نفس القاعدة وارتفاعه ٥ سم

اوجد حجم هذا المجسم



الحل :

حجم المنشور الثلاثي = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٦ × ٨ × ١٠ = ٢٤٠ سم^{٣}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع = $\frac{١}{٣}$ × ٢٤ × ٥ = ٤٠ سم^{٣} (م مساحة القاعدة مثلثة)

حجم المجسم = حجم المنشور + حجم الهرم

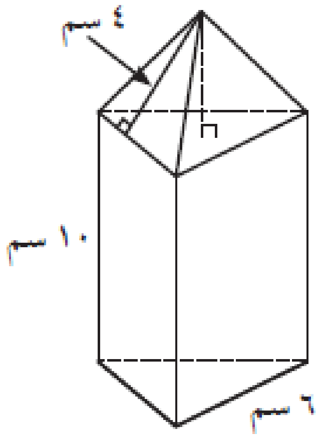
= ٢٤٠ + ٤٠ = ٢٨٠ سم^{٣}

مثال(٤) : اردت ياسمين تغليف علبة على شكل منشور

ثلاثي قائم يعلوه هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته ٩ $\sqrt{٣}$

كما في الشكل اوجد المساحة السطحية للورق المستخدم

لتغليف العلبة



الحل :مساحة قاعدة المنشور= مساحة قاعدة الهرم

المساحة السطحية للمنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٣× ٦ × ١٠ + ٩ $\sqrt{٣}$ = ١٨٠ + ٩ $\sqrt{٣}$

المساحة السطحية للهرم = ٣ × $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٦ = ٣٦ سم^{٢}

المساحة السطحية للورق = ١٨٠ + ٣٦ + ٩$\sqrt{٣}$ = ٢١٦ + ٩$\sqrt{٣}$