مذكرة رياضيات الصف الثامن شاملة محلولة

الفصل الدراسي الثاني

إعداد أ/ أحمد جمال

امسح الرمز لمشاهدة فيديوهات شرح المذكرة

الدرس الاول: الانعكاس في نقطة – التناظر حول نقطة

الانعكاس في نقطة مثل م : هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة ا في المستوى صورة ا/ ∋ ا م

بحيث تكون ا م = ا/ م والنقطة الوحيدة التي تقترن بنفسها هي النقطة م

التي تسمى مركز الانعكاس حيث م نقطة صامدة

في المستوى الاحداثي الانعكاس في نقطة الاصل هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة في المستوى صورة احداثيها السيني واحداثيها الصادي وهما المعكوس الجمعي للاحداثي السيني والصادي لهذه النقطة

عموما : الانعكاس في نقطة الاصل و : ا (س ، ص) $\xrightarrow{\text{ع و}}$ ا/ (- س ، - ص)

مثال(١):

اذا كان ∆ هـ/ ك/ ن/ هو صورة ∆ هـ ك ن

بالانعكاس في نقطة الاصل (و)

وكانت هـ (٠ ، ٤) ، ك (- ١ ، - ٢) ،

ن (٣ ، ١) ، فعين احداثيات الرؤوس

هـ/ ، ك/ ، ن/ ثم ارسم ∆ هـ/ ك/ ن/

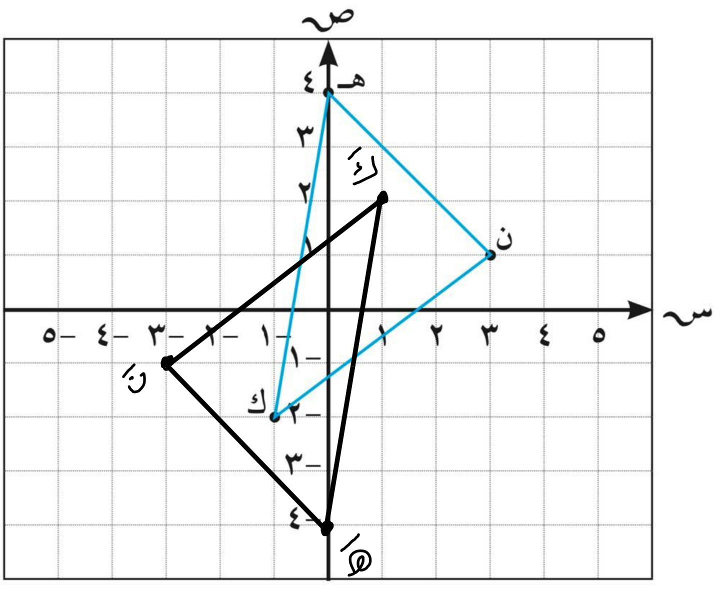
في مستوى الاحداثيات

الحل :

هـ (٠ ، ٤) $\xrightarrow{\text{ع و}}$ هـ/ (٠ ، - ٤)

ك (-١ ،-٢) ⟵ ك/ (١ ، ٢)

ن (٣ ، ١) ⟵ ن/ (-٣ ، - ١)



مثال(١):

اذا كان Δ ا/ ب/ جـ/ هو صورة Δ ا ب جـ

بالانعكاس في نقطة الاصل (و)

وكانت ا (٣ ، ٤) ،ب (٣ ، -٢) ،

جـ (-٥ ،-١) ، فعين احداثيات الرؤوس

ا/ ، ب/ ، جـ/ ثم ارسم المثلثين

في مستوى الاحداثيات

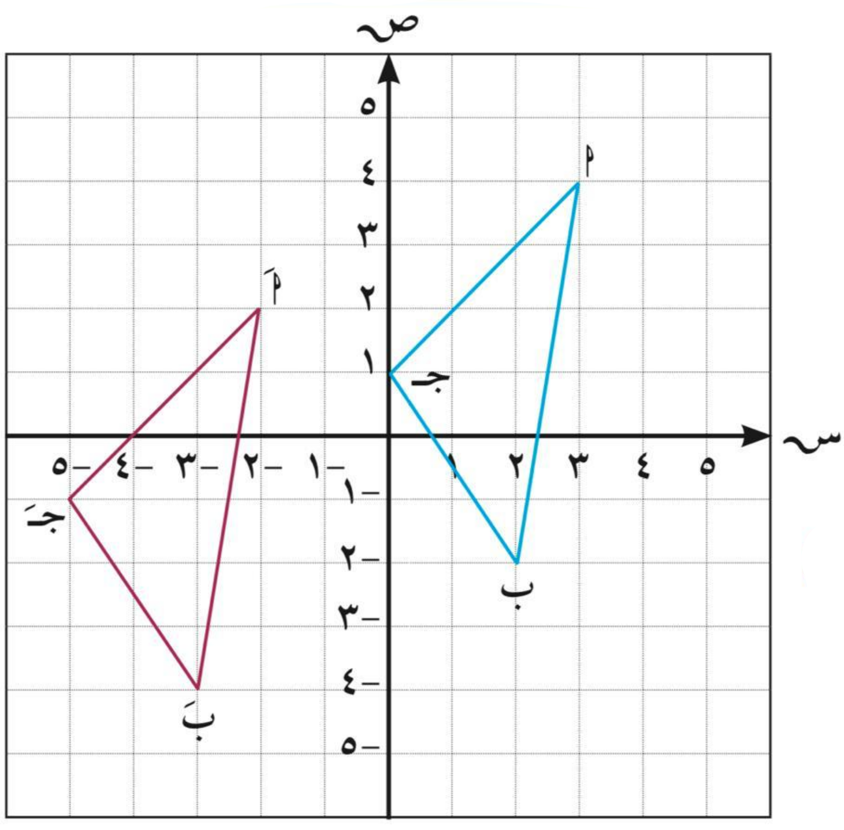
الرياضيات حل بالإيد وليس مذاكرة بالعين

الحل :

ا (٣ ، ٤) $\xrightarrow{ع و}$ ا/ (-٣ ، -٤)

ب (٣ ،-٢) ⟵ ب/ (-٣ ، ٢)

جـ (-٥ ، -١) ⟵ جـ/ (٥ ، ١)



الدرس الثاني: الازاحة في المستوى الاحداثي

صورة النقطة تحت تاثير الازاحة		النقطة
الازاحة الى اعلى بمقدار (ب) وحدة (س ، ص + ب)	الازاحة جهة اليمين بمقدار (أ) وحدة (س + أ ، ص)	(س ، ص)
الازاحة الى اسفل بمقدار (ب) وحدة (س ، ص – ب)	الازاحة جهة اليسار بمقدار (أ) وحدة (س – أ ، ص)	

عموما :(س ، ص) ⟵ (س ± أ ، ص ± ب)

مثال(١):

اوجد صورة النقطة أ (-٣ ، ٥) تحت تاثير ازاحة ٤ وحدات الي اليمين ثم وحدتين ونصف الى الاسفل

الحل :

(س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص – ٢,٥)

أ (-٣ ، ٥) ⟵ أ/ (-٣ + ٤ ، ٥ - ٢,٥)

أ (- ٣ ، ٥) ⟵ أ/ (١ ، ٢,٥)

....

مثال(٢):

في المستوى الاحداثى ارسم المثلث ا ب جـ

حيث ا (٠ ، ٠) ،ب (٠ ، ٤) ،

جـ (٢ ، ٣) ، ارسم صورة المثلث ا ب جـ

تحت تاثير ازاحة قاعدتها:

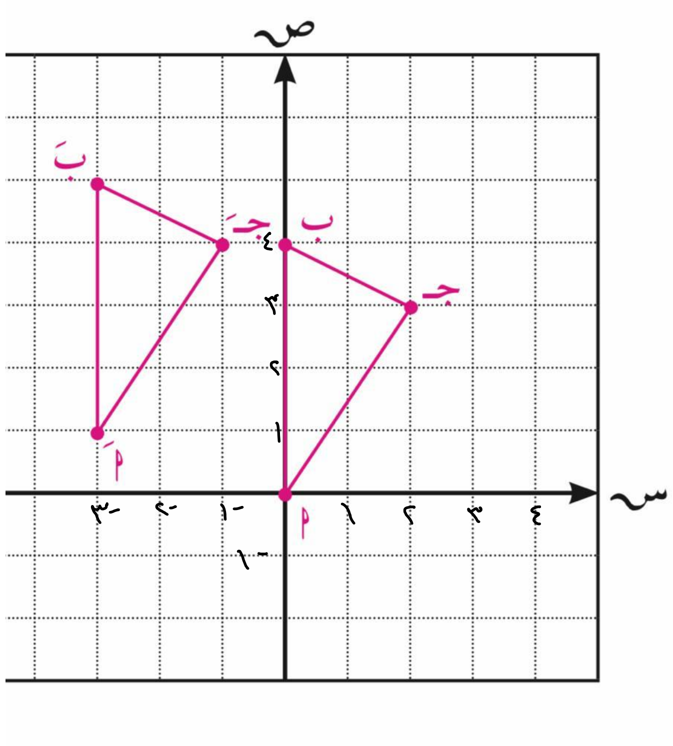
ا (س ، ص) ⟵ (س – ٣ ، ص +١)

الحل :

ا (٠ ، ٠) ⟵ ا/ (-٣ ، ١)

ب (٠ ،٤) ⟵ ب/ (-٣ ، ٥)

جـ (٢ ، ٣) ⟵ جـ/ (-١ ، ٤)



مثال(٣):

اذا كانت م/ (- ٣ ، ٥) هي صورة النقطة م (٢ ، ١) تحت تاثير ازاحة في المستوى الاحداثي

اوجد قاعدة الازاحة ثم تحقق من صحتها

(س ، ص) ⟵ (س + ا ، ص + ب)

الحل:

٢ + ا = - ٣	١ + ب = ٥
ا = - ٣ – ٢	ب = ٥ – ١
ا = -٥ (٥ وحدات لليسار)	ب = ٤ (٤ وحدات لاعلى)

القاعدة: (س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص + ٤)

التحقق م (٢ ، ١) ⟵ (٢ – ٥ ، ١ + ٤)

(- ٣ ، ٥) = م/

....

مثال(٤) :

اوجد صورة النقطة (٤ ، - ٣) تحت تاثير ازاحة ٣ وحدات الى اليمين ووحدتين الى الاعلى

الحل: (س ، ص) ⟵ (س + ٣ ، ص +٢)

(٤ ، -٣) ⟵ (٤+٣ ، - ٣ + ٢) = (٧ ، - ١)

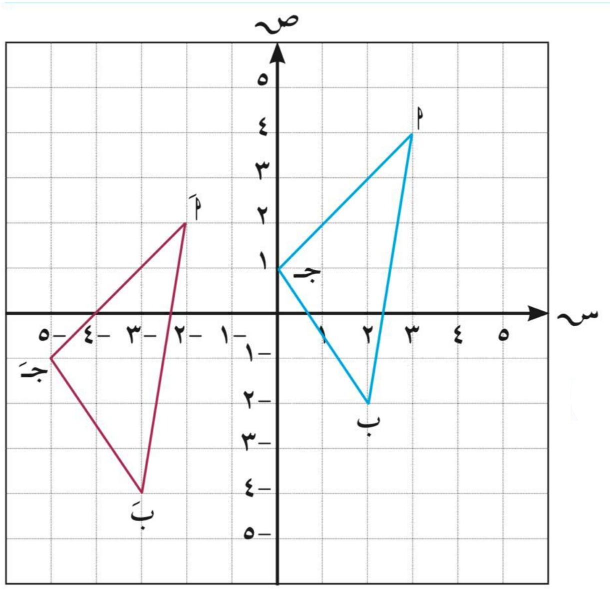
....

مثال(٥)

صف الازاحة التي تنقل المثلث ا ب جـ

الي المثلث ا/ب/جـ/ ، ثم اكتب القاعدة

بصورة رمزية



الحل:

ازاحة ٥ وحدات لليسار ووحدتان للاسفل

(س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص – ٢)

مثال(٦):

اذا كانت م/ (- ٣ ، ٢) هي صورة م (٢ ، - ١) تحت تاثير ازاحة في المستوى الاحداثي فاكتب القاعدة بصورة رمزية لهذه الازاحة ثم تحقق من صحتها

الحل :

(س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص + ٣)

التحقق :

م (٢ ، - ١) ⟵ (٢ – ٥ ، - ١ +٣) =(- ٣ ، ٢) = م/

....

مثال(٧)

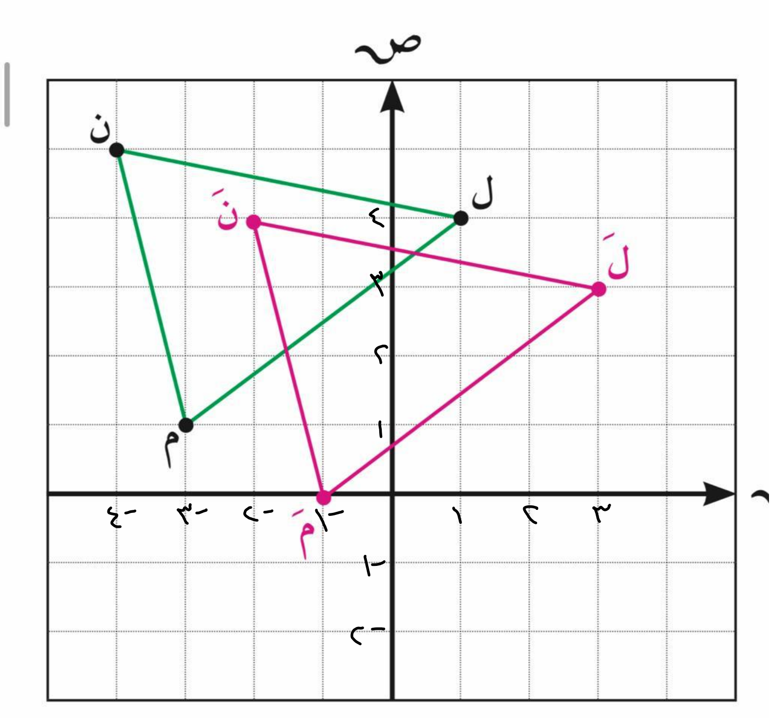
ارسم صورة المثلث ل م ن

بازاحة حسب القاعدة

(س ، ص) (س+٢ ، ص – ١)

الحل :ازاحة الى اليمين وحدتان

ووحدة واحدة للاسفل



الدرس الثالث :الدوران في المستوى الاحداثي

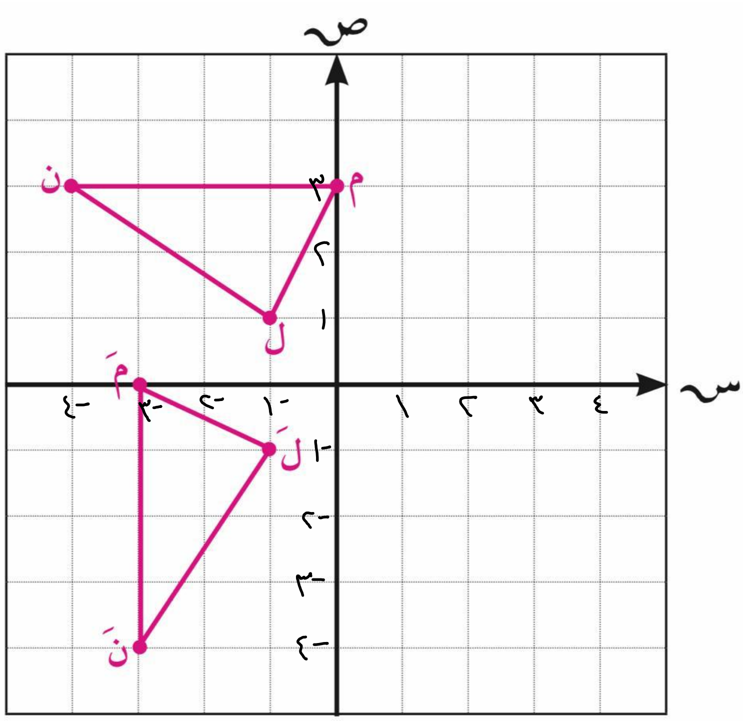
* (س ، ص) ← د (و ، ٩٠°) (- ص ، س) يسمى دوران ربع دورة **(تبديل مع تغير اشارة الاول)**

* (س ، ص) ← د(و، ١٨٠°) (- س ، - ص) يسمى دوران نصف دورة **(تغير الاشارتين فقط)**

* (س ، ص) ← د (و ، ٢٧٠°) (ص ، - س) يسمى دوران ثلاثة ارباع دورة **(تبديل مع تغير اشارة الثاني)**

....

مثال(١):



في المستوى الاحداثي ارسم المثلث ل م ن

بحيث ل (-١، ١) ، م(٠، ٣) ، ن(-٤ ،٣)

ثم ارسم صورته بدوران مركزه نقطة الاصل

وزاويته ٩٠°

الحل:

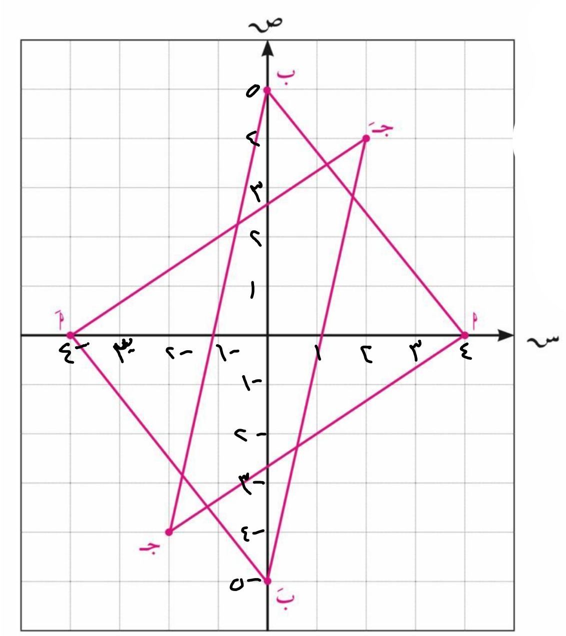
ل(-١ ، ١) ← ل/(-١ ، -١)

م(٠ ،٣) ← م/(-٣ ، ٠)

ن(-٤ ،٣) ← ن/(-٣ ، -٤)

....

مثال(٢)



ارسم صورة المثلث ا ب جـ الذي رؤوسه

ا(٤ ، ٠) ، ب(٠ ،٥) ، جـ (-٢ ، -٤)

بدوران نصف دورة حول نقطة الاصل

الحل:

ا(٤ ،٠) ← ا/(-٤ ،٠)

ب(٠ ،٥) ← ب/(٠ ، -٥)

جـ(-٢ ،-٤) ← جـ/(٢ ، ٤)

مثال(٣)

ارسم صورة الشكل الرباعي س ص ع ل

حيث س(١ ، ٠) ، ص(-٢ ،-٣) ،ع(٣، ٥) ،

ل(-٤ ،٠) بالدوران حول نقطة الاصل

وبزاوية قياسها ١٨٠°

ارسم بايدك دايماً

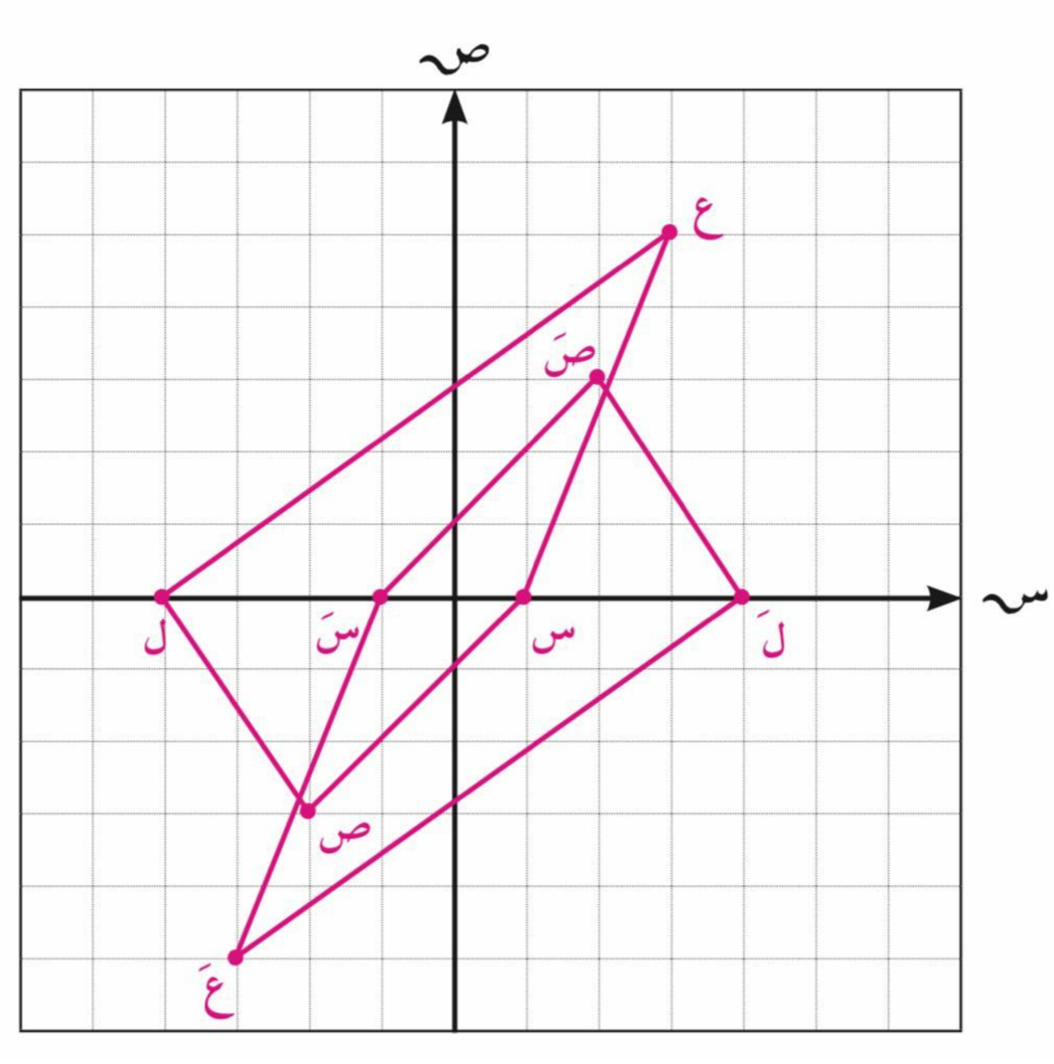
الحل:

س(١ ،٠) ← س/(-١ ،٠)

ص(-٢ ،-٣) ← ص/(٢ ،٣)

ع(٣ ،٥) ← ع/(-٣ ، -٥)

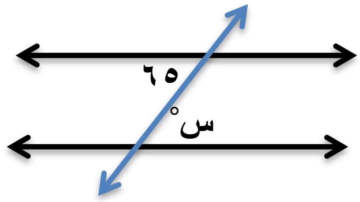
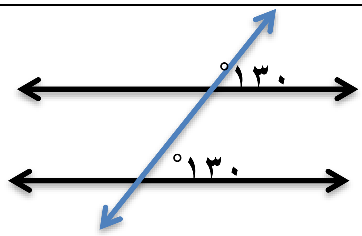
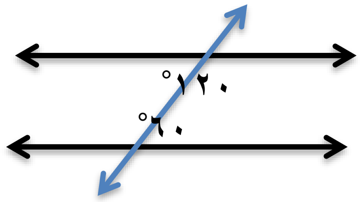
ل(-٤ ،٠) ← ل/(٤ ، ٠)



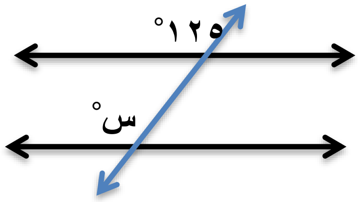
الوحدة الاولى : الاشكال الرباعى

الدرس الاول: المستقيمات المتوازية

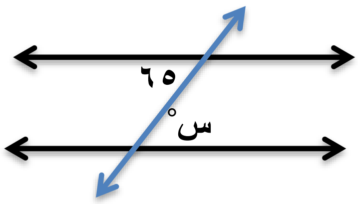
اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فان :

كل زاويتين متبادلتين متطابقتان	كل زاويتين متناظرتين متطابقتان	كل زاويتين متحالفتين متكاملتان
		

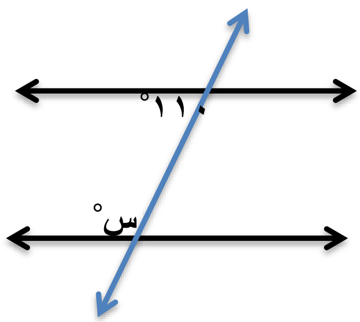
مثال(١):في كل الاشكال التالية اوجد قيمة (س°)



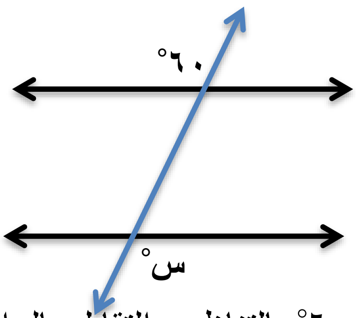
١٢٥° بالتوازي والتناظر



٦٥° بالتبادل والتوازي



٧٠° بالتحالف والتوازي



٦٠° بالتناظر والتقابل بالراس

....

نتيجة :

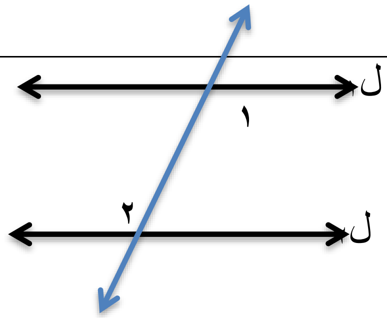
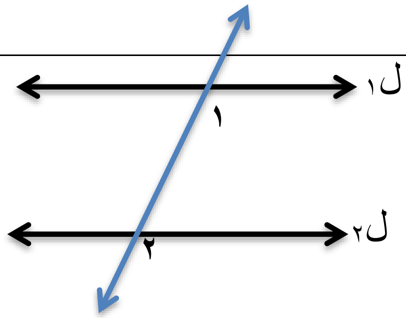
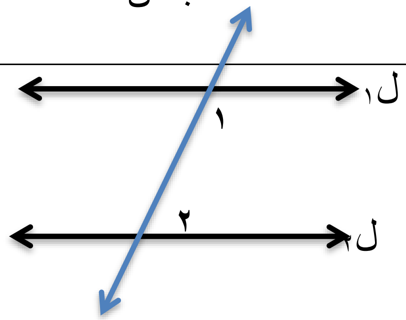
اذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وتوفرت احد الشروط التالية :

(١) زاويتان متبادلتان متطابقتان

(٢) زاويتان متناظرتان متطابقتان

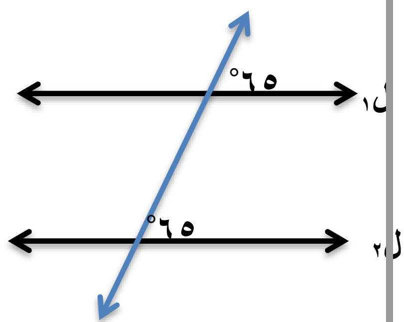
(٣) زاويتان متحالفتان متكاملتان

فان المستقيمين يكونان متوازيين

اذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وكان		
الزاويتان المتبادلتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتناظرتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتحالفتان ١ ، ٢ متطابقتان
		
فان ل١ // ل٢	فان ل١ // ل٢	فان ل١ // ل٢

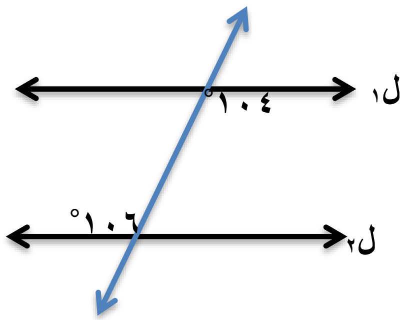
مثال(٢):

في اي من الاشكال التالية يكون المستقيمان ل١ ، ل٢ متوازيين ؟ وضح السبب



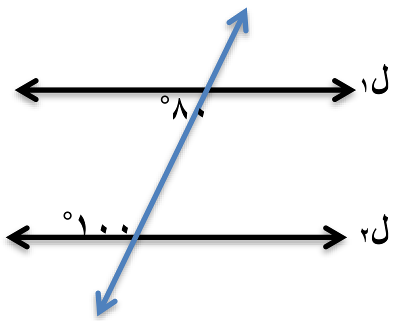
زاويتان متناظرتان متطابقتان

ل١ // ل٢



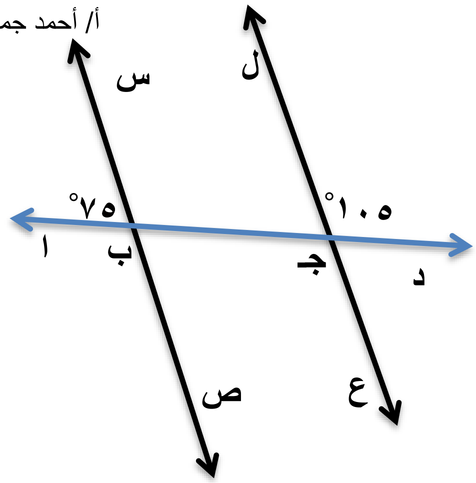
زاويتان متبادلتان غير متطابقتان

ل١ ، ل٢ غير متوازيان



زاويتان متحالفتان مجموعهما ١٨٠°

ل١ // ل٢



مثال(٣):

في الشكل المقابل ا د قاطع للمستقيمين س ص ، ع ل

في ب ، جـ على الترتيب ، ق(ا ب^ ص) = ٧٥° ،

ق (ل جـ^د) = ١٠٥° برهن ان س ص // ع ل

البرهان

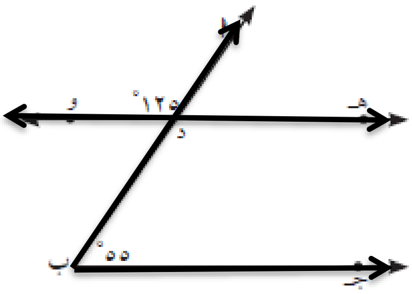
∵ ق (ل جـ^د) = ١٠٥°

∴ ق (ب جـ^ ل) = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥° بالتجاور على مستقيم واحد

∵ ق(ب جـ^ل) = ق (ا ب^ص) وهما في وضع تناظر

∴ س ص // ع ل

....



مثال(٤):

في الشكل المقابل: ق(ا د^و) = ١٢٥°

،ق(د ب^جـ)= ٥٥°، اثبت ان هـ و// ب جـ

الحل: ∵ ق(ا د^و) = ١٢٥°

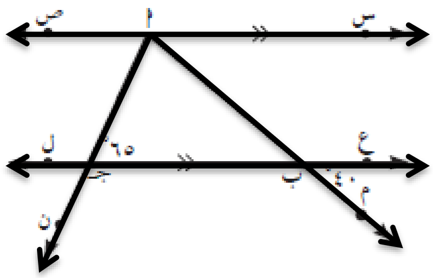
∴ ق(هـ د^ب) = ١٢٥° بالتقابل بالراس

∵ ق(هـ د^ب) + ق(د ب^جـ) = ١٢٥° + ٥٥° = ١٨٠°

وهما في وضع تداخل (تحالف)

∴ هـ و // ب جـ

مثال(٥):



في الشكل المقابل: س ص // ع ل ،

ق(ع ب^م) = ٤٠° ،ق(ا جـ^ب)= ٦٥°،

اوجد بالبرهان كلا من :

ق(س ا^جـ) ، ق(س ا^ب) ، ق(جـ ا^ب)

البرهان :

∵ س ص // ع ل

∴ ق(ا جـ^ب) = ق(ص ا^جـ) بالتبادل

ق(ص ا^جـ) = ٦٥° (١)

ق(س ا^ب) = ق(ع ب^م) بالتناظر

ق(س ا^ب) = ٤٠° (٢)

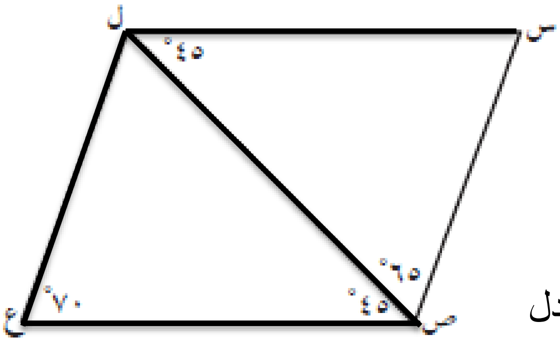
ق(ا ب^جـ) = ق(ع ب^م) بالتقابل بالراس

في ▲ ا ب جـ ق(جـ ا^ب) = ١٨٠° - [٤٠° + ٦٥°] = ١٨٠° - ٦٥° = ٧٥°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

....

مثال(٦): في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه



برهان : س ل // ص ع ، س ص // ع ل

البرهان :

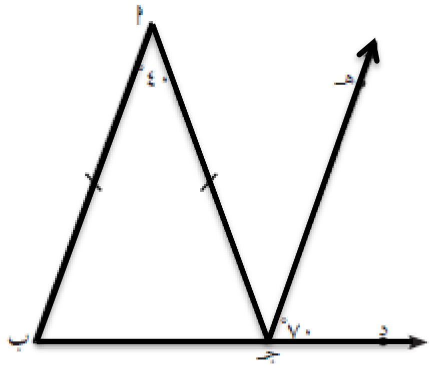
∵ ق(س ل^ص) = ق(ع ص^ل) = ٤٥° وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع (١)

∴ ق(س ص^ع) + ق(ع^) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠° وهما متحالفتان

س ص // ع ل (٢)

مثال(٧):



في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه

اثبت ان جـ هـ // ب ا

البرهان:

∵ ا جـ = ا ب في ▲ ا ب جـ

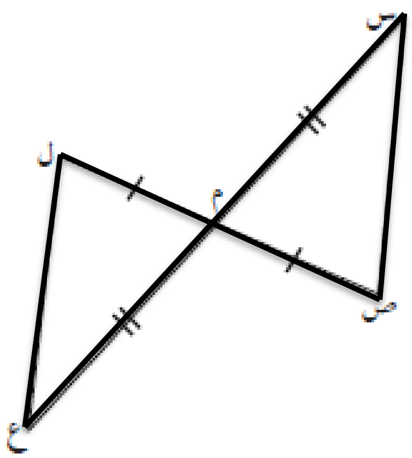
∴ ق (ب^) = ق (ا جـ^ب) = (١٨٠° - ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

∵ ق (ب^) = ق (هـ جـ^د) وهما في وضع تناظر

∴ جـ هـ // ب ا

....

مثال(٨):



في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه

اثبت ان (١) ▲ س م ص ≡ ▲ ع م ل

(٢) س ص // ع ل

البرهان:

(١) ▲ س م ص ، ▲ ع م ل

فيهما:
- م س = م ع معطى (١)
- م ص = م ل معطى (٢)
- ق (س م^ ص) = ق(ل م^ع) (٣) بالتقابل بالراس

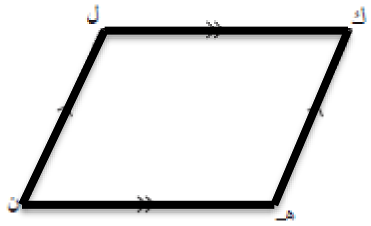
من (١) ، (٢) ، (٣) ▲ س م ص ≡ ▲ ع م ل ب (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق ان ق (س ^) = ق(^ع) وهما في وضع تبادل

∴ س ص // ع ل

الدرس الثاني: متوازي الاضلاع

متوازي الاضلاع: هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

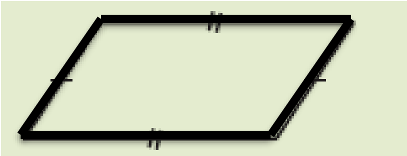


ك ل ن هـ متوازي اضلاع وعلى ذلك :

ك ل // هـ ن ، هـ ك // ن ل

خواص متوازي الاضلاع:

الخاصية الاولى:



في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

مثال(١): في الشكل المقابل متوازي اضلاع

اوجد محيط متوازي الاضلاع

الحل :

د جـ = ٤ سم السبب كل ضلعان متقابلان متطابقان

ا د = ٤ سم السبب كل ضلعان متقابلان متطابقان

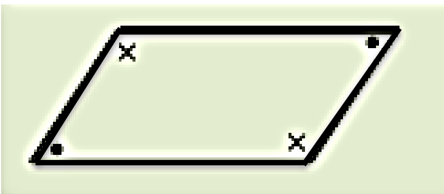
محيط متوازي الاضلاع = ٤ + ٥ + ٤ +٥ = ١٨ سم

....

الخاصية الثانية:

في متوازي الاضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

مثال(٢):



ا ب جـ د متوازي اضلاع ، ق(ا^) = ٦٥°

اوجد ق(ب^) ، ق(جـ^) ، ق(د^)

الحل :

.. ا ب جـ د متوازي اضلاع

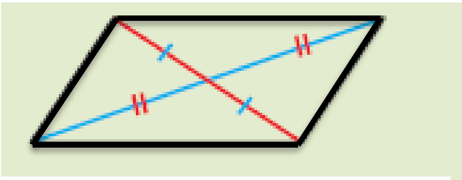
ق(ب^) = ١٨٠° - ٦٥° = ١١٥° كل زاويتين متتاليين متكاملتان

ق(جـ^) = ق(ا^) = ٦٥° كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

ق(د^) = ق(ب^) = ١١٥° كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

الخاصية الثالثة:

في متوازي الاضلاع القطران ينصف كل منهما الاخر

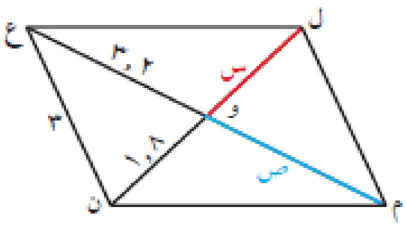


مثال(٣):

ل م ن ع متوازي اضلاع تقاطع قطريه في و

اوجد (١) س ، ص

(٢) محيط المثلث ل م و



الحل:

∵ ل م ن ع متوازي اضلاع

∴ القطران ينصف كلا منهما الاخر

ل و = ون = ١,٨

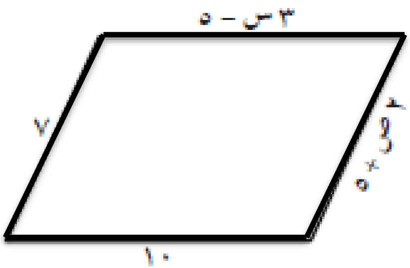
م و = و ع = ٣,٢

....

مثال(٤):

في متوازي الاضلاع المقابل

اوجد قيمة كل من س ، ص



الحل:

∵ ل م ن ع متوازي اضلاع

∴ كل ضلعان متقابلان متطابقان

٢ ص +٥ = ٧

٢ ص = ٧ – ٥

٢ص = ٢ (نقسم على ٢)

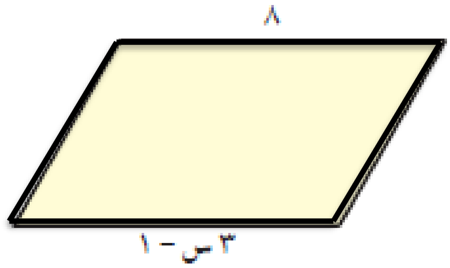
ص = ١

٣ س – ٥ = ١٠

٣ س = ١٠ + ٥

٣س = ١٥ (÷٣)

س = ٥



مثال(٥) في الشكل المقابل متوازي اضلاع

اوجد قيمة س

الحل:

من خواص متوازي الاضلاع

٣ س – ١ = ٨

٣ س = ٨ + ١

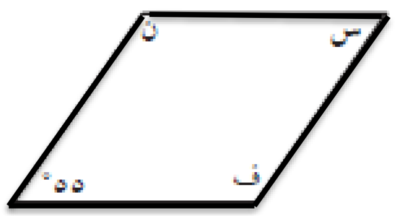
٣ س = ٩ نقسم المعادلة على ٣

س = ٣

....

مثال(٦)

اوجد قيمة كل من س ، ف ، ن في متوازيات الاضلاع التالية



(ا) س= ٥٥° زاويتان متقابلتان متطابقتان

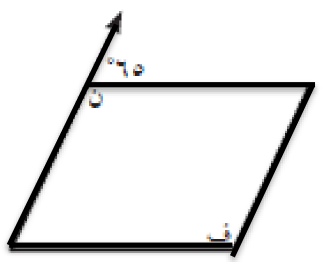
ف = ١٨٠° ـ ٥٥° = ١٢٥°

كل زاويتان متتاليتان متكاملتان

ن = ف = ١٢٥°

زاويتان متقابلتان متطابقتان

....



(ب) ن = ١٨٠° ـ ٦٥° = ١١٥°

بالتجاور على مستقيم واحد

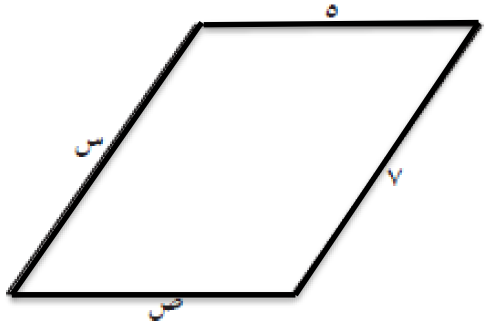
ن = ف = ١١٥°

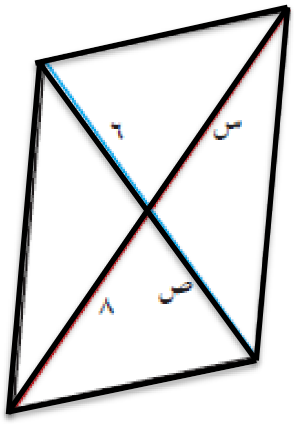
زاويتان متقابلتان متطابقتان

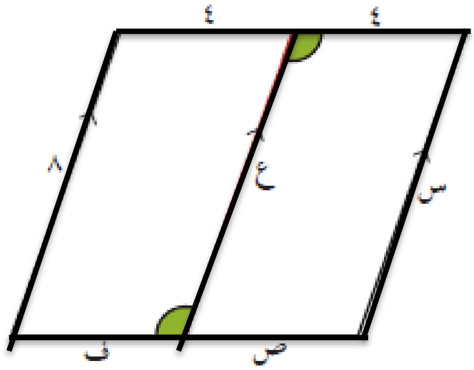
....

مثال(٧) :

اوجد الاطوال المجهولة في متوازيات الاضلاع التالية :







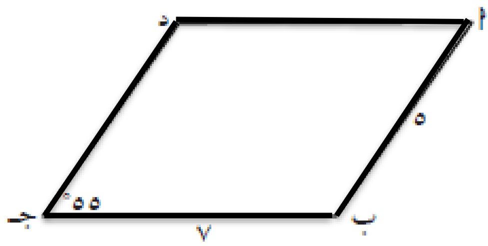
س = ٧
ص = ٥

س = ٨
ص = ٦

س = ٨
ص = ٤
ع = ٨
ف = ٤

....

مثال(٨): ا ب جـ د متوازي اضلاع فيه:



ا ب = ٥ سم ، ب جـ = ٧ سم ، ق(جـ^)= ٥٥°

اوجد ما يلي مع ذكر السبب

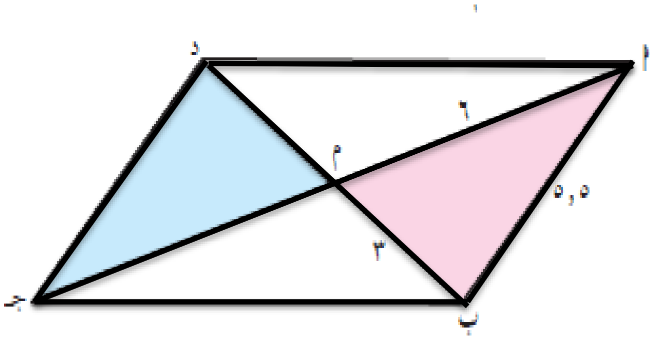
ا د = ب جـ = ٧ السبب : ضلعان متقابلان متطابقان

د جـ = ا ب = ٥ السبب : ضلعان متقابلان متطابقان

ق(ب^)= ق(جـ^)= ٥٥° السبب : زاويتان متقابلان متطابقان

ق(د^)= ق(ب^)= ١٢٥° السبب : زاويتان متقابلان متطابقان

مثال(٩)



ا ب جـ د متوازي اضلاع تقاطع قطريه في م ،

ا ب = ٥ ,٥ وحدة طول ، ب م = ٣ وحدة طول

احسب محيط ▲ د م جـ

الحل:

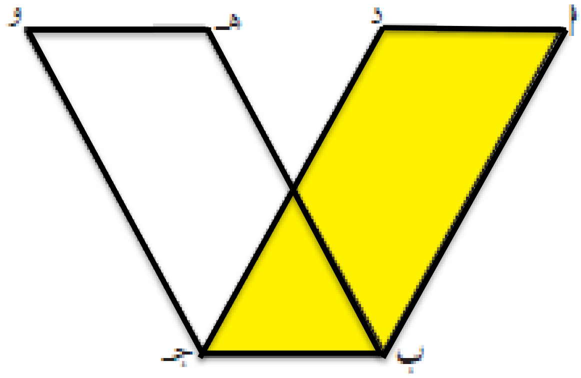
د م = ب م = ٣ وحدة طول السبب: القطران ينصف كلا منهما الاخر

م جـ = ا م = ٦ وحدة طول السبب: القطران ينصف كلا منهما الاخر

د جـ = ا ب = ٥ ,٥ وحدة طول السبب: ضلعان متقابلان متطابقان

محيط ▲ د م جـ = م د + م جـ + د جـ = ٣ + ٦ + ٥ ,٥ = ١٤ ,٥ وحدة طول

مثال(١٠):



ا ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا اضلاع

اثبت ان : ا د = هـ و

البرهان:

∵ ا ب جـ د متوازي اضلاع

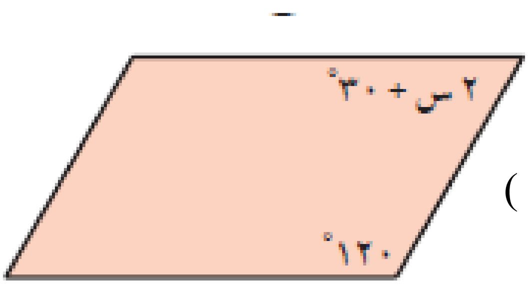
∴ ا د = ب جـ ضلعان متقابلان متطابقان (١)

∵ هـ ب جـ و متوازي اضلاع

∴ هـ و = ب جـ ضلعان متقابلان متطابقان (٢)

من (١) ، (٢) ا د = هـ و

مثال(١١) من الشكل المقابل متوازي اضلاع اوجد قيمة س



الحل : من خواص المتوازي

٢ س + ٣٠° + ١٢٠° = ١٨٠° (زاويتان متقابلتان متطابقتان)

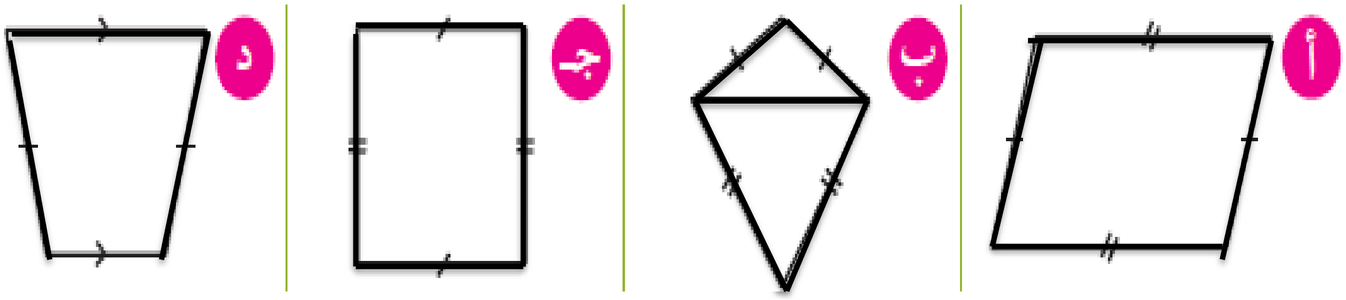
٢ س + ١٥٠° = ١٨٠° ٢ س = ١٨٠° - ١٥٠°

٢ س = ٣٠° س = ١٥°

الدرس الثالث : حالات الكشف عن متوازي الاضلاع

الحالة الاولى: اذا كان في الشكل الرباعي كل ضلعين متقابلين متطابقين فان الشكل يكون متوازي اضلاع

مثال(١): اي من الاشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن ان يكون متوازي اضلاع؟



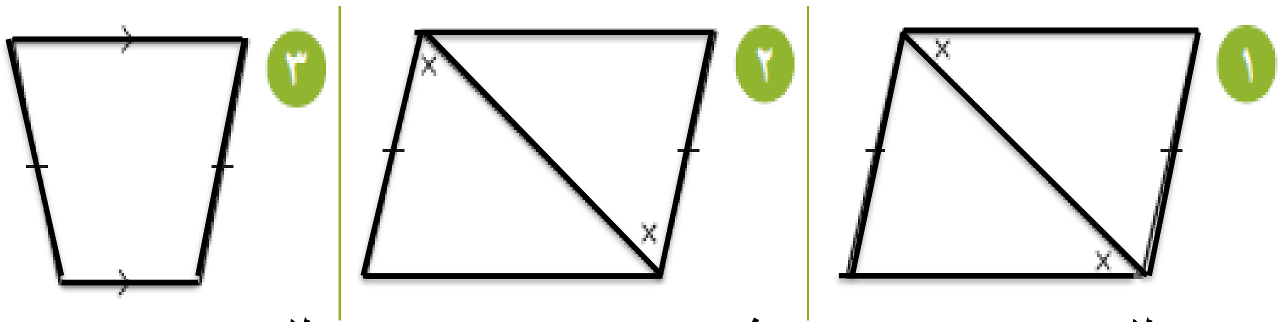
نعم لا نعم لا

....

الحالة الثانية: اذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

فان الشكل يكون متوازي اضلاع

مثال(٢): اي من الاشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن ان يكون متوازي اضلاع؟



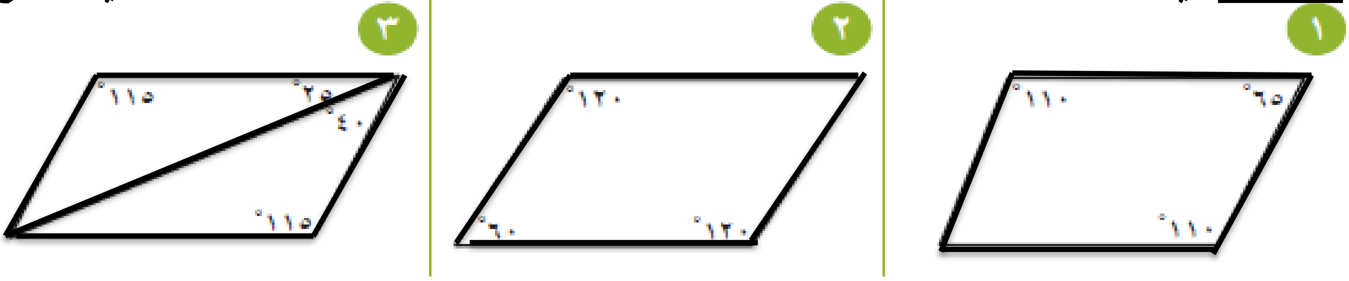
لا **نعم** **لا**

....

الحالة الثالثة: اذا كان في الشكل الرباعي كل زاويتين متقابلين متطابقتين فان الشكل يكون متوازي اضلاع

لاحظ ان : الشكل الرباعي يكون متوازي اضلاع اذا كانت كل زاويتين متتاليتين (متحالفتين)متكاملتين

مثال(٣): اي من الاشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن ان يكون متوازي اضلاع؟



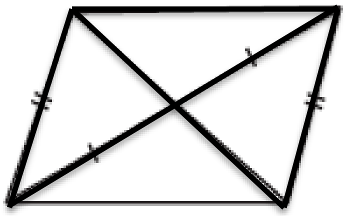
لا نعم نعم

الحالة الرابعة: اذا كان في الشكل الرباعي القطران ينصف كل منهما الاخر

فان الشكل يكون متوازي اضلاع

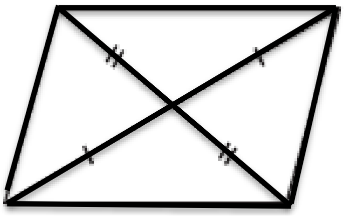
مثال(٢): اي من الاشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن ان يكون متوازي اضلاع؟

أ



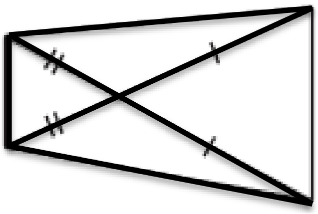
لا

ب



نعم

جـ

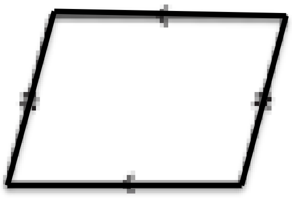


لا

....

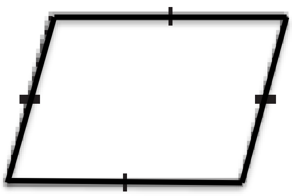
يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا توفرت فيه احد الشروط التالية:

(١) كل ضلعين متقابلين متوازيين



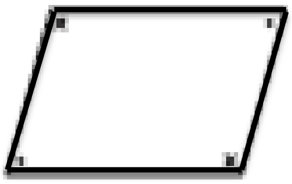
....

(٢) كل ضلعين متقابلين متطابقين



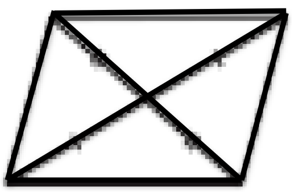
....

(٣) كل زاويتين متقابلتين متطابقتين



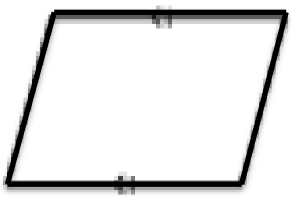
....

(٤) القطران ينصف كل منهما الاخر

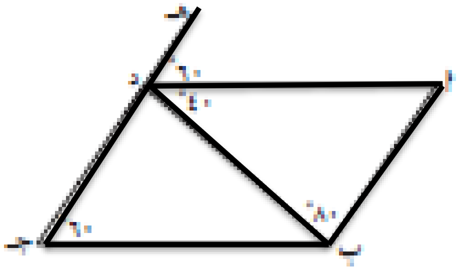


....

(٥) ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان



مثال(١)



برهن ان الشكل الرباعي ا ب جـ د متوازي اضلاع

البرهان:

∵ ق (هـ د ا^) = ق (^جـ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ا د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

ق (ا^) = ١٨٠° - (٨٠° + ٤٠°) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

∵ ق (ا^) = ق (هـ د^ا) وهما في وضع تبادل

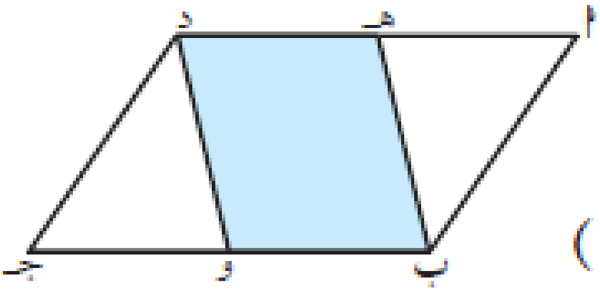
∴ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (١)

من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع (فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان)

....

<u>مثال(٢):</u>

اذا كان س ل = ص ع ، ق (م^) = ق (س ص^م)



برهن ان الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي اضلاع

البرهان :

∵ ق (م^) = ق (س ص^م) معطى

∴ م س = س ص

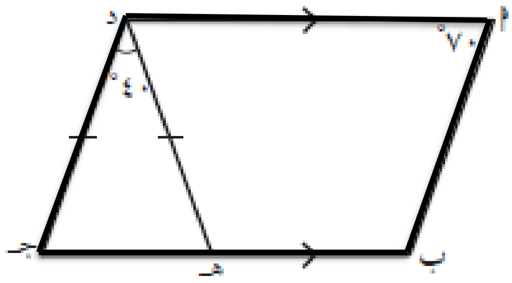
∵ م س = ل ع

∴ س ص = ل ع (١)

س ل = ص ع (٢)

من (١) ، (٢) ينتج ان

الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع (فيه كل ضلعان متقابلان متطابقان)



مثال(٣) : في الشكل المقابل : ا د // ب جـ ،

د هـ = د جـ ، ق (^ا) = ٧٠°،

ق (هـ د^جـ) = ٤٠° ، برهن ان

الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع

البرهان :

حل بإيدك عشان تفهم كويس

ق (ب^) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠° تحالف وتوازي

▲ المثلث د هـ جـ متطابق الضلعين

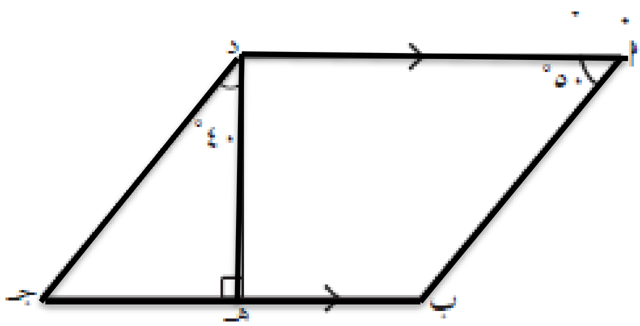
ق (جـ^) = ق (دهـ^جـ) = (١٨٠° - ٤٠°) ÷ ٢ = ١٤٠° ÷ ٢ = ٧٠°(مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°)

ق (ا د^هـ) = ٧٠° بالتبادل والتوازي ، ق (د^) = ٧٠° + ٤٠° = ١١٠°

∴ ق (^ا) = ق (جـ^) (١) ، ق (ب^) = ق (د^) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع (فيه كل زاويتان متقابلاتان متطابقتان)

....



مثال(٤) : اذا كان ا ب جـ د شكل رباعي فيه

ا د // ب جـ ، د هـ ⊥ ب جـ ، ق (^ا) = ٥٠°،

ق (هـ د^جـ) = ٤٠° ، برهن ان

الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع

البرهان : ق (ب^) = ١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠° تحالف وتوازي

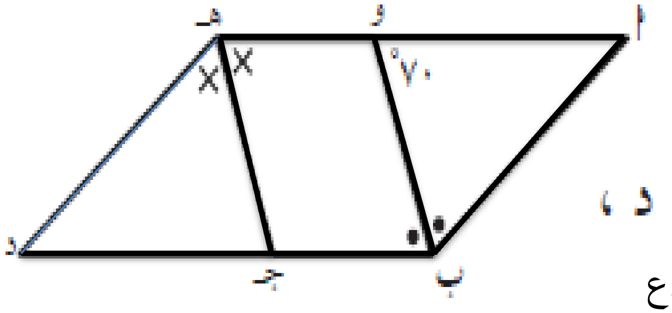
ق (جـ^) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°(مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°)

ق (ا د^هـ) = ٩٠° تبادل وتوازي

ق (د^) = ٩٠° + ٢٠° = ١٢٠°

ق (^ا) = ق (جـ^) = ٥٠°(١) ، ق (ب^) = ق (د^) = ١٣٠°(٢)

∴ من (١) ، (٢) ا ب جـ د متوازي اضلاع (كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)



مثال(٥):

اذا كان ا ب د هـ متوازي اضلاع ،

ق (د هـ^جـ) = ٧٠° فبرهن ان د ،

الشكل الرباعي و ب جـ هـ متوازي اضلاع

البرهان : ∵ ا ب جـ هـ متوازي اضلاع

∴ ا هـ // ب د من خواص المتوازي

∵ و ∈ ا هـ ، جـ ∈ ب د

∴ ا هـ // ب جـ (١)

ق (ا و^ب) = ق (ب و^جـ) = ٧٠° بالتوازي والتبادل *

∴ ق (هـ و^ب) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

∴ ق (ب و^هـ) + ق (ب و^جـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠° وهما في وضع تتالي ومتكاملتان

∴ و هـ // ب جـ (٢)

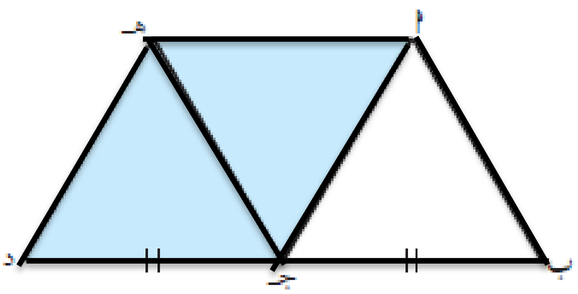
من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل و ب جـ هـ متوازي اضلاع (فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان)

....

مثال(٦): اذا كان ا ب جـ هـ متوازي اضلاع ،

ب جـ = جـ د ، فبرهن ان الشكل

الرباعي ا جـ د هـ متوازي اضلاع



البرهان: ∵ ا ب جـ هـ متوازي اضلاع

∴ ب جـ = ا هـ ، ب جـ // ا هـ

∵ ب جـ = جـ د

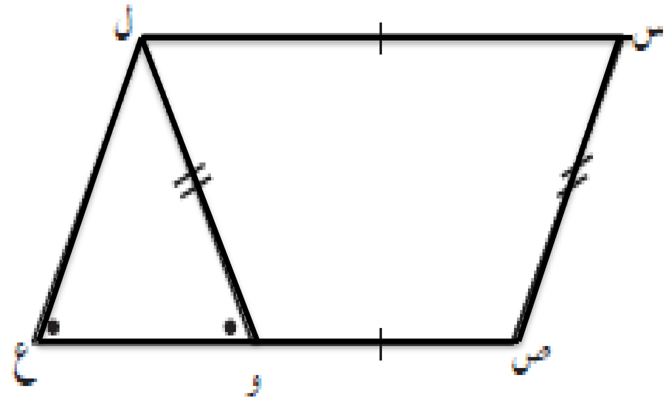
∴ جـ د = ا هـ (١)

∵ د ∈ ب جـ ، ب جـ // ا هـ

∴ جـ د // ا هـ (٢)

من (١) ، (٢) الشكل ا جـ د هـ متوازي اضلاع (فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

مثال(٧):



اثبت ان الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع

البرهان :

في △ ل و ع

∵ ق (ل و^ع) = ق (ل ع^و) *

∴ ل و = ل ع

∵ ل و = س ص

∴ س ص = ل ع (١)

∵ س ل = ص ع (٢)

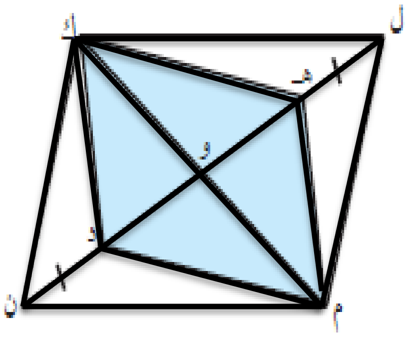
انتبه مثال هام جدا

من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع (فيه كل ضلعان متقابلان متطابقان)

مثال(٨): اذا ان الشكل ل م ن ك متوازي اضلاع

تقاطع قطريه في و ، ل هـ = ن د

برهن ان الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي اضلاع



البرهان :

∵ ل م ن ك متوازي اضلاع ، و نقطة تقاطع قطريه

∴ م و = و ك (١)

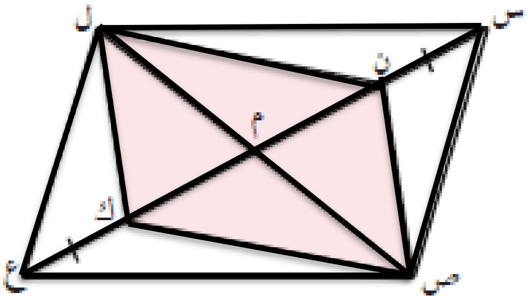
ل و = و ن

ل هـ = ن د بالطرح

∴ ل و – ل هـ = و ن – ن د

∵ و هـ = و د (٢)

من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل هـ م د ك متوازي اضلاع (فيه القطران ينصف كل منهما الاخر)



مثال(٩): اذا ان الشكل ن ص ك ل متوازي اضلاع

تقاطع قطريه في م ، س ن = ك ع

برهن ان الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي اضلاع

البرهان :

∵ ن ص ك ل متوازي اضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه

∴ م ص = م ل (١)

م ن = م ك

س ن = ك ع بالجمع

∴ م ن – س ن = م ك – ك ع

∴ م س = م ع (٢)

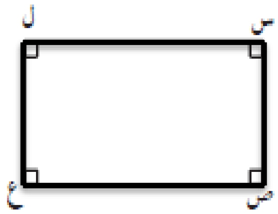
من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع (فيه القطران ينصف كل منهما الاخر)

حافظ على صلاتك

الدرس الرابع : المستطيل (خواصه والكشف عنه)

المستطيل : هو متوازي اضلاع احدى زواياه قائمة وله جميع خواص متوازي الاضلاع

مثال(١):



ا ب جـ د مستطيل فيه : ق (ب^) = ٩٠° ،

ا ب = ٣ سم ، ا د = ٤ ، م جـ = ٢,٥

اكمل ما يلي :

(١) د جـ = ا ب = ٣ لان كل ضلعان متقابلان متطابقان

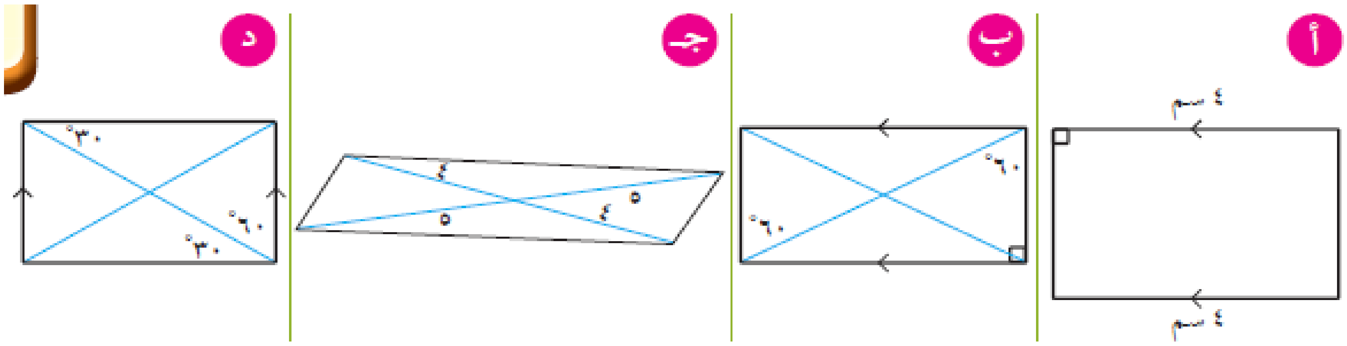
(٢) ا جـ = ٢,٥ + ٢,٥ = ٥ لان القطران ينصف كل منهما الاخر

(٣) ق (د^) = ٩٠° لان المستطيل زواياه قائمة

(٤) ق (جـ^) = ٩٠° لان المستطيل زواياه قائمة

....

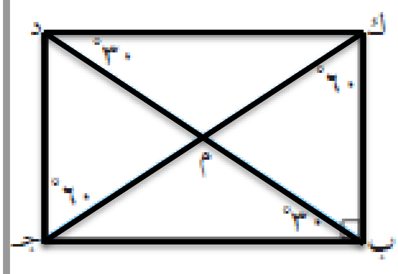
مثال(٢) : استخدم المعطيات (موظفا التعريف) التي على الاشكال لتبين ايا منها يمثل مستطيل



لا يمثل يمثل لا يمثل يمثل

....

مثال(٣) في الشكل المقابل اثبت ان ك ب جـ د مستطيل



البرهان : ق (جـ ب^د) = ق (ك د^ب) = ٣٠° و هما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{ك د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

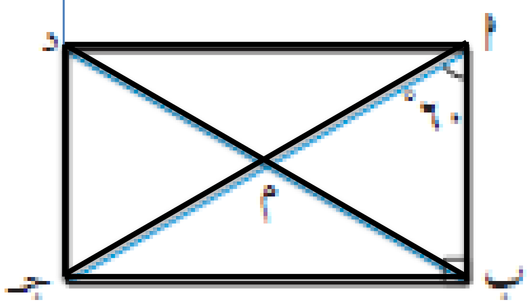
∴ ق (ب ك^جـ) = ق (د جـ^ك) = ٦٠° و هما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{ك ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (٢) من (١) ، (٢) ينتج ان

الشكل ك ب جـ د متوازي اضلاع

∴ ق (ب) = ٩٠° اذا الشكل ك ب جـ د مستطيل

مثال(٤) : ا ب جـ د مستطيل فيه :



ق (ب ا^جـ) = ٦٠° ، احسب ق (د ب^جـ)

البرهان:

∴ ا ب جـ د مستطيل

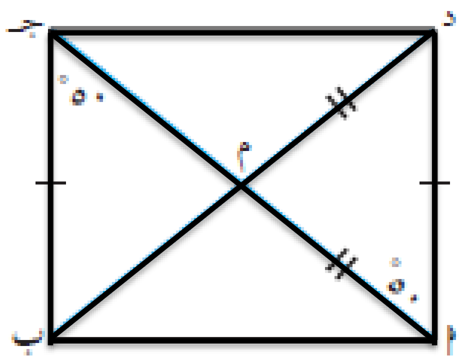
∴ ا م = م جـ = ب م = م د

∴ ا م = ب م في المثلث ا ب م

ق (ا ب^م) = ق (ب أ^م) = ٦٠°

∴ ق (د ب^جـ) = ٩٠° - ٦٠° = ٣٠°

مثال(٥): اب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م



ا د = ب جـ ، م د = م ا ، ق (د ا^جـ) = ق (ب جـ^ا) = ٥٠°

اثبت ان ا ب جـ د مستطيل ثم اوجد ق (ب أ^جـ)

البرهان : ∴ ا د = ب جـ (١)

∴ ق (د ا^جـ) = ق (ب جـ^ا) = ٥٠° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{ا د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج ان الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع

فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

ف المثلث ا م د

∴ م د = م ا *

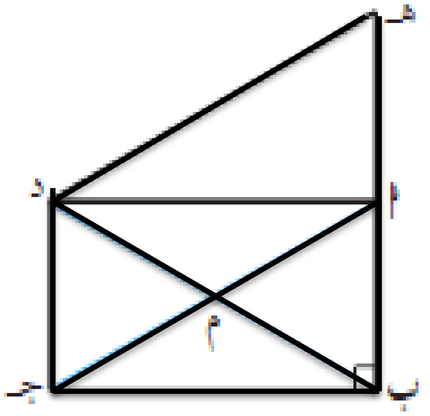
∴ ق (د ا^م) = ق (ا د^م) = ٥٠°

ق (ا م^د) = ١٨٠° - (٥٠° +٥٠°) = ١٨٠° - ١٠٠° = ٨٠°

∴ ق (د م^ا) = ق (جـ م^ب) = ٨٠° بالتقابل بالراس

في المثلث م جـ ب ∴ ق (م ب^جـ) = ١٨٠° - (٥٠° +٨٠°) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°

∴ م جـ = م ب * * (من * ، **) القطران ينصف كل منهما الاخر ممطابقان الشكل يكون مستطيل



مثال(٦):

هـ ا جـ د متوازي اضلاع ، ق (ا ب^جـ) = ٩٠°

، ا د//ب جـ، هـ ، ا ، ب على استقامة واحدة

اثبت ان : ا ب جـ د مستطيل

البرهان :

∵ هـ ا جـ د متوازي اضلاع

∴ ا هـ// د جـ

∵ هـ ، ا ، ب على استقامة واحدة

∴ ا ب//د جـ (١)

∵ ا د//ب جـ (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع (فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان)

∵ ق (ا ب^جـ) = ٩٠° *

∴ الشكل ا ب جـ د مستطيل (احدى زواياه قائمة)

الدرس الخامس : المعين (خواصه والكشف عنه)

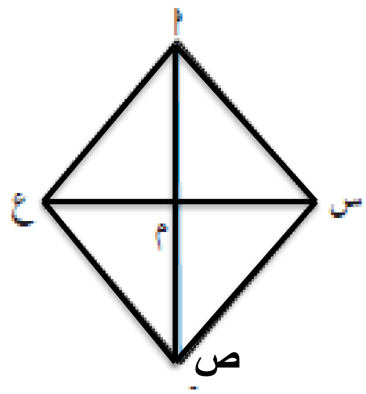
المعين: هو متوازي اضلاع جميع اضلاعه متساوية (له جميع خواص متوازي الاضلاع)

** المعين قطراه متعامدان

** كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه

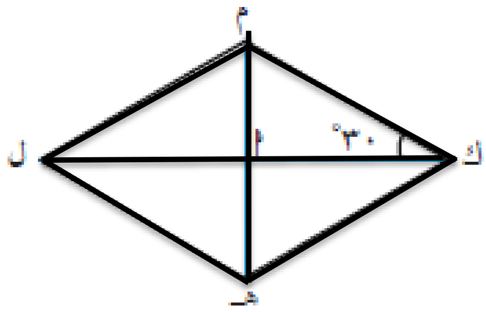
مثال(١):

في الاشكال التالية معينات ،اوجد المطلوب مع ذكر السبب



ق (س م^أ) = ٩٠°

السبب القطران متعامدان



ق (م ك^هـ) = ٩٠°

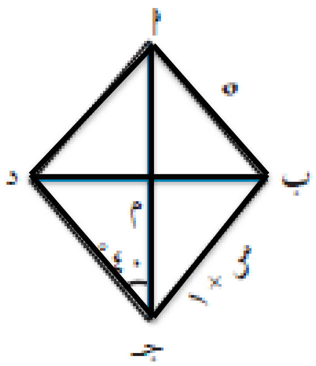
القطران ينصف زاويتين متقابلتين

ق (م ل^هـ) = ٦٠°

السبب زاويتان متقابلتان متطابقتان

ق (ل هـ^ك) = ١٨٠° - ٦٠° =١٢٠°

السبب : زاويتان متتاليتان متكاملتان



طول ب جـ = ٥ سم

اضلاع المعين متطابقة

اوجد قيمة س

س + ١ = ٥

س = ٥ ــ ١ = ٤

محيط المعين = ٤ × ٥ = ٢٠

....

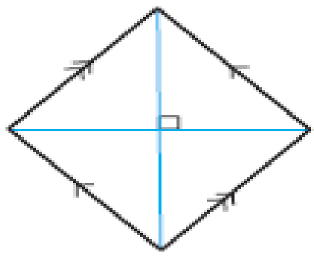
يكون متوازي الاضلاع معينا اذا توفر فيه احد الشرطين التاليين :-

(١) اذا تطابق ضلعان متجاوران فيه

(٢) اذا تعامد قطراه

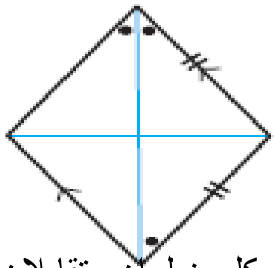
مثال(١) : اي الاشكال التالية يمثل معينا مع ذكر السبب ؟

أ



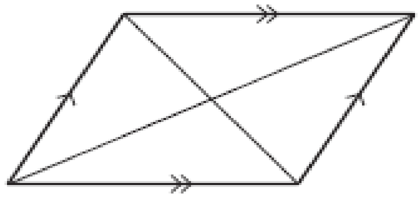
الشكل متوازي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان القطران متعامدان اذا الشكل معين

ب



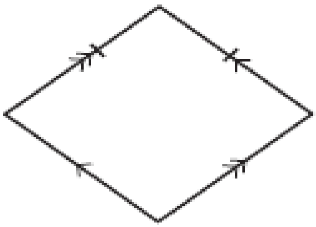
الشكل متوازي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان فيه ضلعان متجاوران متطابقان يكون معين

جـ



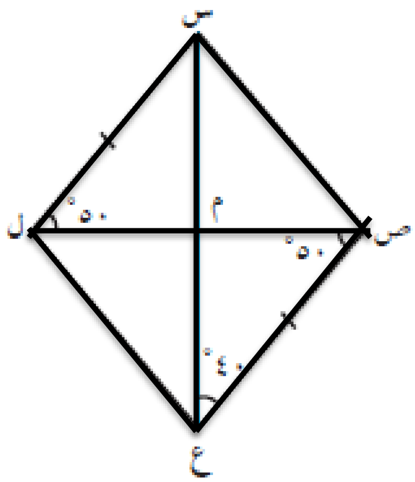
ليس معينا

د



متوازي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان وفيه ضلعان متجاوران متطابقان يكون معين

مثال(٢): في الشكل المقابل :



ق (س ل^ص) = ق (ع ص^ل) = ٥٠°،

ق (ص ع^س) = ٤٠° ، س ل = ص ع

اثبت ان الشكل الرباعي س ص ع ل معين

البرهان:

∴ ق (س ل^ص) = ق (ع ص^ل) = ٥٠° وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع　　　(١)

، س ل = ص ع　　　(٢)

من (١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع (فيه ضلعان متقابلان متوازيان) *

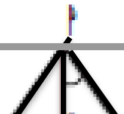
في المثلث ص م ع

ق (س ل^ص) = ١٨٠° - (٥٠° + ٤٠°) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠°

∴ ص م ⊥ م ع (القطران متعامدان) *

اذا الشكل الرباعي متوازي اضلاع فيه القطران متعامدان يكون معينا..

مثال(٣) : ا ب جـ د معين تقاطع قطراه في م ، ق (ب ا^جـ) =٣٥°، جـ د = ٥ وحدة



(ا) احسب قياسات زوايا المعين

الحل: ق (ا^) = ٣٥° +٣٥° =٧٠° القطرينصف زاويتين متقابلتان

ق (جـ^) = ق (ا^) =٧٠° من خواص المعين

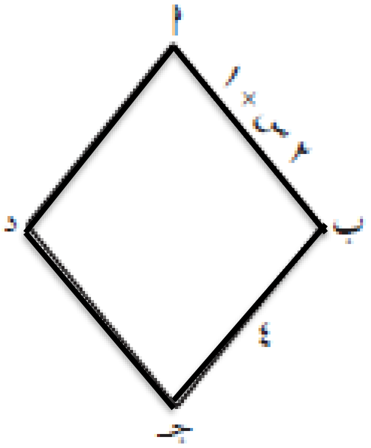
ق (اب^م) = ١٨٠° - (٩٠° +٣٥°)= ١٨٠° - ١٢٥° =٥٥ °

ق (ب^) = ٥٥° +٥٥°=١١٠° ، ق (د^) =١١٠°

(ب) اوجد طول ب جـ

ب جـ = جـ د = ٥ من خواص المعين الاضلاع متطابقة

(جـ) اوجد ق (ا م^ب) = ١٨٠°(٩٠° +٣٥°)=١٨٠° - ١٢٥° =٥٥° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°



مثال(٤) : ا ب جـ د معين ، ا ب = ٢ س + ١ ،

ب جـ = ٤ وحدة اوجد قيمة س

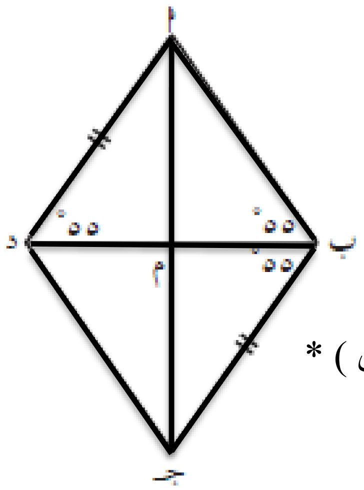
الحل: ∵ ا ب جـ د معين

∴ ا ب = ب جـ (الاضلاع متطابقة)

٢ س + ١ = ٤

٢ س = ٤ – ١ = ٣ س = ١,٥

مثال(٥):في الشكل المقابل :



اثبت ان الشكل الرباعي ا ب جـ د معين

البرهان: ∵ ق (ا د^ب) = ق (جـ ب^د) = ٥٥° وهما في وضع تبادل

∴ ا د//ب جـ (١)

، ا د = ب جـ معطى (٢)

من (١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع (فيه ضلعان متقابلان متوازيان) *

في المثلث ا ب جـ

∵ ق (ا ب^د) = ق (ا د^ب)

∴ ا ب = ا د (ضلعان متجاوران) *

اذا الشكل الرباعي متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان يكون معينا

الدرس السادس: المربع (خواصه والكشف عنه)

المربع: هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان

المربع : هو معين قياس احدى زواياه قائمة

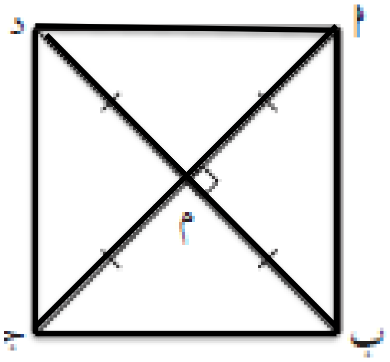
للمربع كل خواص المستطيل وكل خواص المعين

الكشق عن المربع

اذا كان في متوازي الاضلاع القطران متطابقان ومتعامدان فان المتوازي يكون مربع

....

مثال(١): في الشكل المقابل ا ب جـ د متوازي اضلاع



اثبت ان الشكل مربع

البرهان :

∵ ا ب جـ د متوازي اضلاع

∵ م ا = م جـ = م ب = م د

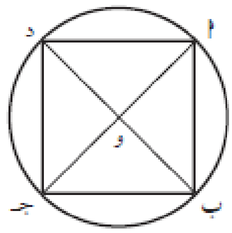
∴ اجـ = ب د القطران متطابقان (١)

ا م ⊥ ب م القطران متعامدان (٢) معطى

من (١) ،(٢) يكون المتوازي ا ب جـ د مربعا

....

مثال(٢): في الشكل المقابل ا جـ ، ب د قطران في دائرة مركزها و



$\overline{\text{ا جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ اثبت ان ا ب جـ د مربع

البرهان: ∵ و دائرة

∴ ا و = و جـ (انصاف اقطار) (١)

ب و = ود (انصاف اقطار) (٢)

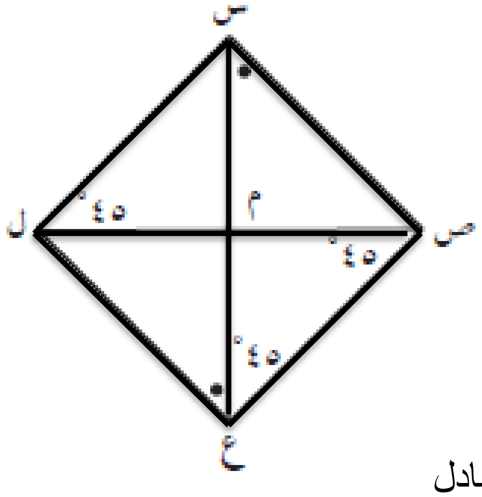
من (١) ، (٢) الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع (القطران ينصف كل منهما الاخر)

∵ ا جـ = ب د (قطران في الدائرة) اذا القطران متطابقان *

∵ $\overline{\text{ا جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ اذا القطران متعامدان *

اذا المتوازي ا ب جـ د فيه القطران متطابقان ومتعامدا ن يكون مربعا

مثال(٣):



في الشكل المقابل اثبت ان س ص ع ل مربع

البرهان :

∵ ق (ص س^م) = ق (ل ع^م) (معطى) وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ (١)

∵ ق (ع ص^ل) = ق (س ل^ص)= ٤٥° (معطى) وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (٢)

من(١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع *

ق (ص م^ع)= ١٨٠°- (٤٥° +٤٥°) = ٩٠°

القطران متعامدان *

∵ م ص = م ع في المثلث م ص ع
م س = م ل في المثلث م س ل

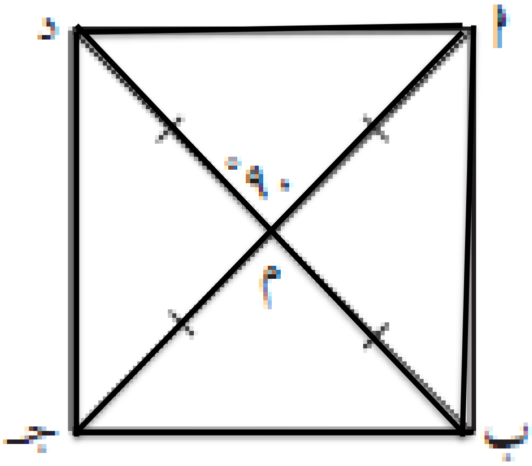
∵ ص م = م ل (من خواص المتوازي)
س م = م ع (من خواص المتوازي)

القطران متطابقان * *

من (*) ، (**) الشكل س ص ع ل متوازي اضلاع فيه القطران متطابقان ومتعامدان يكون مربعا

....

مثال(٤):



من الشكل المقابل اثبت ان الشكل مربع

البرهان:

∴ ا م = م ع (١) معطى

ب م = م د (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع

∴ ا م = م ب = م جـ = م د (معطى)

اذا ا جـ = ب د القطران متطابقان *

∴ ق (ا م^د)= ٩٠°

ا جـ ⊥ ب د القطران متعامدان *

المتوازي ا ب جـ د فيه القطران متطابقان ومتعامدان يكون مربعا

مثال(٥):

في الشكل المقابل : ل س ص ع فيه :

ل م = ٣ ب + ٤ ، ع م = ٢ جـ - ١ ،

م ص = ٧ اوجد قيمة كل من ب ، جـ

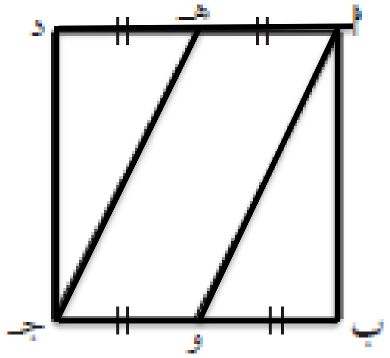
الحل: س ص ل ع مربع

ل م = ص م = م ع = م س القطران ينصف كل منهما الاخر

٢ جـ - ١ = ٧	٣ ب + ٤ = ٧
٢ جـ = ٧ + ١	٣ ب = ٧ ـ ٤
٢ جـ = ٨	٣ ب = ٣
جـ = ٤	ب = ١

الدرس السابع : تطبيقات (حل مسائل على الاشكال الرباعية)

مثال(١):



ا ب جـ د مربع ، هـ منتصف ا د ، و منتصف ب جـ

اثبت ان ا و جـ هـ متوازي

البرهان:

∵ ا ب جـ د مربع

∴ ا د // ب جـ

∵ هـ منتصف ا و ، و منتصف ب جـ

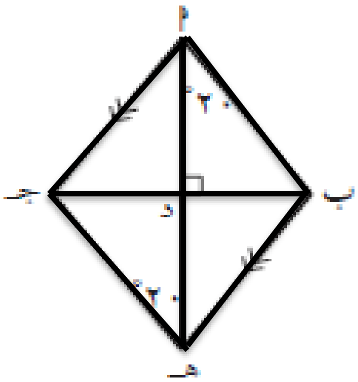
∴ ا هـ // و جـ (١)

ا هـ = و جـ (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع (فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان)

....

مثال(٢):



في الشكل المقابل اثبت ان ا ب هـ جـ معين

البرهان: ∵ ق (ب ا^هـ) = ق (جـ هـ^ا)= ٢٠° (معطى)

وهما في وضع تبادل

ا ب // جـ هـ (١)

ا جـ // ب هـ (٢) معطى

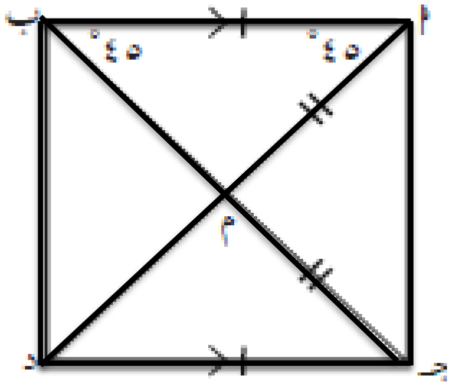
من (١) ، (٢) الشكل ا ب هـ جـ متوازي اضلاع

∵ ق (ا د^ب)= ٩٠°

∴ القطران متعامدان

المتوازي ا ب هـ جـ فيه القطران متعامدان يكون معينا

مثال(٣):



اثبت ان الشكل ا ب جـ د مربع

البرهان:

بما ان ا ب = جـ د معطى (١)

، $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ معطى (٢)

∴ الشكل ا ب جـ د متوازي اضلاع

في المثلث ا م ب

∵ ∴ ق (ا م^ب)= ١٨٠°- (٤٥°+٤٥°)=٩٠°

∴ $\overline{\text{ا م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب م}}$

القطران متعامدان *

∴ ق (م ا^ب) = ق (م ب^ا)= ٤٥°

ا م = م ب

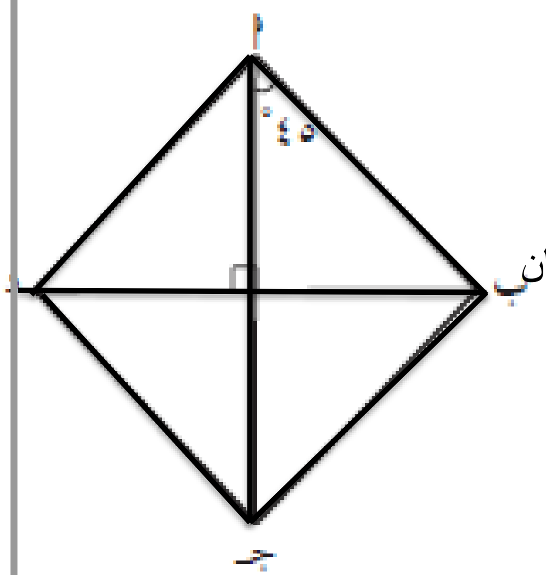
ا م = م جـ معطى

ا د = ب جـ

القطران متطابقان * المتوازي ا ب جـ د يكون مربعا

....

مثال(٤): ا ب جـ د معين فيه ق (ب ا^جـ)= ٤٥°،



اثبت ان الشكل مربع

البرهان: ∵ ا ب جـ د معين

∴ ق (ب ا^جـ) = ق (د ا^جـ)= ٤٥° القطر ينصف زاويتان متقابلاتان

∴ ق (ب ا^د) = ٤٥° + ٤٥°= ٩٠°

∴ ق (ا^) = ٩٠°

الشكل ا ب جـ د المعين احدى زواياه قائمة يصبح مربعا

الوحدة الثالثة : المقادير الجبرية

الدرس الاول: قوانين الاسس

لكل عدد نسبي ا غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$

مثال(١): اختصر كلا مما يلي :

(ا) $٦^{٤} \times ٦^{٧} = ٦^{٤+٧} = ٦^{١١}$

(ب) $س^{٢} \times س^{٣} = س^{٢+٣} = س^{٥}$

(جـ) $ص \times ص^{٢} \times ص^{٣} = ص^{١+٢+٣} = ص^{٦}$

(د) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢+٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

لكل ا عدد غير نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون : $\frac{ا^{م}}{ا^{ن}} = ا^{م-ن}$

مثال(٢): اكمل ما يلي:

(ا) $\frac{٣^{٥}}{٣^{٢}} = ٣^{٥-٢} = ٣^{٣}$

(ب) $\frac{٧^{٣}}{٧} = ٧^{٣-١} = ٧^{٢}$

لكل عدد ا نسبي غير صفري ، م عدد صحيح يكون :

(١) $ا^{صفر} = ١$

(٢) $ا^{-م} = \frac{١}{ا^{م}}$

مثال(٣): اختصر

(ا) $= ٨^{٥-٣} = ٨^{٢}$

(ب) $\frac{س^{٥}}{س^{٥}} = س^{٥-٥} = س^{٠} = ١$

(جـ) $\frac{س^{٧}}{س^{-٣}} = س^{٧-(-٣)} = س^{٧+٣} = س^{١٠}$

مثال(٤): اختصر ما يلي

(ا) $٧^{-٣} \times ٧^{١} = ٧^{-٣+١} = ٧^{-٢} = \frac{١}{٤٩}$

(ب) $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-١}} = ٩^{-٣-(-٢)} = ٩^{-٣+٢} = ٩^{-١} =$

(جـ) $٨^{٥} \times ٨^{-٤} = ٨^{٥+-٤} = ٨^{١} = ٨$

(د) $س^{٤} \times س^{-٦} = س^{٤-٦} = س^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$

....

لكل ا ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $(ا \times ب)^{م} = ا^{م} \times ب^{م}$

مثال(٥): اوجد ناتج ما يلي

(ا) $(٢ \times ٣)^{٢} = ٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٤ \times ٩ = ٣٦$

(ب) $(٥ \times ٤)^{٣} = ٥^{٣} \times ٤^{٣} = ١٢٥ \times ٦٤ = ٨٠٠٠$

(جـ) $٢^{٢} \times ٣^{٢} = (٢ \times ٣)^{٢} = ٦^{٢} = ٣٦$

(د) $٥^{٣} \times ٤^{٣} = (٥ \times ٤)^{٣} = ٢٠^{٣} = ٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠ = ٨٠٠٠$

....

لكل ا ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{م} = \frac{ا^{م}}{ب^{م}}$

مثال(٦) اختصر كلا مما يلي:

(ا) $(٤ ا)^{٥} = ٤^{٥} \times ا^{٥} = ٢٥٦ ا^{٥}$

(ب) $(٢ س ص)^{٤} = ٢^{٤} س^{٤} ص^{٤} = ١٦ س^{٤} ص^{٤}$

(جـ) $ص س^{٢} \times ص^{٣} = ص^{١+٣} س^{٢} = ص^{٤} س^{٢}$

....

مثال (٧) : اوجد ناتج ما يلي

(ا) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$

(ب) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣^{٣}}{٥^{٣}} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

لكل ا ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{م} = \frac{ا^{م}}{ب^{م}}$

ملاحظة : $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{ا}\right)^{م}$

مثال (٨) : اوجد ناتج ما يلي معتمدا على قوانين الاسس

(ا) $\frac{٢٤^{٥}}{٨^{٥}} = \left(\frac{٢٤}{٨}\right)^{٥} = ٣^{٥}$

(ب) $\frac{٢^{٤}}{٦^{٤}} = \left(\frac{٢}{٦}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١^{٤}}{٣^{٤}} = \frac{١}{٨١}$

(جـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٣} = \frac{٢^{٣}}{٥^{٣}} = \frac{٨}{١٢٥}$

(د) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤^{٢}}{٣^{٢}} = \frac{١٦}{٩}$

....

مثال(٩): اكمل ما يلي

(ا) $(٣^{٢})^{٣} = ٣^{٢} \times ٣^{٢} \times ٣^{٢} = ٣^{٢+٢+٢} = ٣^{٦}$

(ب) $(ا^{٣}ب^{٢})^{٢} = ا^{٣}ب^{٢} \times ا^{٣}ب^{٢} = ا^{٣+٣} \times ب^{٢+٢} = ا^{٦}ب^{٤}$

....

لكل ا عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون: $(ا^{م})^{ن} = ا^{م ن}$

مثال(١٠): اوجد ناتج ما يلي:

(ا) $\frac{٩^{٤}}{٣^{٤}} = \frac{(٣^{٢})^{٤}}{٣^{٤}} = \frac{٣^{٨}}{٣^{٤}} = ٣^{٨-٤} = ٣^{٤}$

(ب) $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

(جـ) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٦} \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٦} = \frac{٣^{٦}}{٥^{٦}} \times \left(\frac{١٠}{٣}\right)^{٦} = \left(\frac{٣ \times ١٠}{٥ \times ٣}\right)^{٦} = ٢^{٦}$

مثال(١١) : اختصر لا بسط صورة :

(ا) $\text{س} \times \text{س}^{٦} = \text{س}^{١+٦} = \text{س}^{٧}$

(ب) $(٥^{٢})^{٤} \times ٥ = ٥^{٨} \times ٥ = ٥^{٩} = ١٩٥٣١١٢٥$

(جـ) $(-٢)^{٣} \times (-٢)^{٧} = (-٢)^{٣+٧} = (-٢)^{١٠} = ١٠٢٤$

(د) $\text{س}^{١١} \times \text{س}^{٨} = \text{س}^{١١+٨} = \text{س}^{١٩}$

(هـ) $\text{س}^{٣} \times \text{س} \times \text{س}^{٢} = \text{س}^{٣+١+٢} = \text{س}^{٦}$

(و) $(\text{س}^{٢}\,\text{ص})^{-٢} \times (\text{س}^{-٧}\,\text{ص}^{-٤}) = \text{س}^{٢-٧} \times \text{ص}^{-٣-٤} = \text{س}^{-٥}\,\text{ص}^{-٧} = \dfrac{١}{\text{س}^{٥}\,\text{ص}^{٧}}$

(ز) $(\text{ا}^{-٣}\,\text{ب}) \times (\text{ا}^{٢}\,\text{ب}٢) \times (\text{ا}^{٢}\,\text{ب}) = \text{ا}^{-٣+٢+٢} \times \text{ب}^{١+٢+١} = \text{ا}^{١} \times \text{ب}^{٤} = \text{ا}\,\text{ب}^{٤}$

(ح) $(\text{س}^{٢}\,\text{ص})^{-٢} \times (\text{س}^{-٧}\,\text{ص}^{-٤}) = (\text{س}^{٢\times-٢}\,\text{ص}^{١\times-٢}) \times \text{س}^{٣\times٢} = (\text{س}^{-٤}\,\text{ص}^{-٢}) \times \text{س}^{٦}$

$= \text{س}^{-٤+٦}\,\text{ص}^{-٢} = \text{س}^{٢}\,\text{ص}^{-٢} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$

(ط) $(\text{ا}^{٥})^{٢} \times (\text{ا}\,\text{ب}) = \text{ا}^{٥\times٢} \times \text{ا}\,\text{ب} = \text{ا}^{١٠+١} \times \text{ب} = \text{ا}^{١١}\,\text{ب}$

(ي) $(-٢\,\text{ص})^{٣} = (-٢)^{٣}\,\text{ص}^{٣} = -٨\,\text{ص}^{٣}$

الدرس الثاني: كثيرات الحدود (متعددة الحدود – الحدوديات)

كثيرة الحدود (مقدار جبري) هي تعبير جبري يتكون من واحد او اكثر من الحدود الجبرية يتم بناؤها باستخدام عمليات الجمع والطرح

امثلة :

(١) ٢ س^{٥} ، - ٤ س^{٢} ، س ، - ٣ حدودية جبرية

(٢) ٢ س^{٥} – ٤ س^{٢} + س - ٣ كثيرة حدود

(٣) س$^{-٣}$ ، $\sqrt{\text{س}}$ - ٥ س + ٧ ، ٦ $^{\text{س}}$ + س^{٢} ليست كثيرات حدود (مقدار جبري)

....

مثال(١) حدد من التعابير الجبرية التالية ما يمثل حدودية وما لا يمثل ذلك

(١) ٤ س^{٥} + ٢ س^{٢} – ٦ س تمثل

(٢) ٣ س^{٢} - $\sqrt{\text{س}}$ لا تمثل لوجود الجذر

(٣) ٥ س^{٢} – س ص + ص^{٢} + ٤ ص – ٧ تمثل

(٤) ص^{٣} – ٣ س^{٢} + س يمثل

(٥) $\frac{٣}{\text{س}}$ لا يمثل لوجود الكسر

(٦) ٣$^{\text{س}}$ + ٥ لا يمثل لوجود الاس

....

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تسميات خاصة
س ، ٣ س^{٤} ، - ٥	وحيدة الحد
ل +٢ ، ٦ س^{٢} – ٢ س ، م^{٢} + ١	ثنائية الحد (حدانية)
٣ + س + ٧ س^{٢} ، س^{٦} – ٥ س^{٢}+ ٢ س^{٣}	ثلاثية الحد (حدودية ثلاثية)

جميع الحدوديات في الجدول السابق تسمى حدوديات في متغير واحد (مقدارجبري) ، بينما الحدوديات

- س – ٢ ص ، ٥ س^{٢} – س ص + ص^{٢} + ٤ ص – ٩ تسمى حدوديات في متغيرين

درجة الحدودية وترتيبها :

* درجة كثيرة الحدود ذات متغير واحد هي قيمة اعلى (اس للمتغير) يظهر في اي حد

* درجة كثيرة الحدود ذات اكثر من متغير هي قيمة اعلى مجموع (لاسس المتغيرات) التي تظهر في اي حد

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية

	الحدودية متشابهة	الحدود المتساوية
التعريف	هي الحدود التي لها نفس المتغير مرفوعة لنفس الاس	هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية
امثلة	(١) ٤ $س^{٢}$ ، - ٢ $س^{٢}$ ، π $س^{٢}$ (٢) ٣ ص ، - ٥ ص (٣) ل $ع^{٢}$ ، - ٣ ل $ع^{٢}$	(١) ٣ $س^{٢}$ ، ٣ $س^{٢}$ (٢) ٥ ص ، ٥ ص (٣) ل $ع^{٢}$ ، $ع^{٢}$ ل

مثال(٢) حدد الحدود المتشابهة والمتساوية في ما يلي :

(١) $\frac{١}{٣}$ $ع^{٥}$ ص ، - ص $ع^{٥}$ متشابهة

(٢) ٤ $ك^{٣}$ ، - ٣ ك ، $ك^{٢}$ غير متشابهة

(٣) ٧ $س^{٤}$ ، ٢ $س^{٤}$ ، - $س^{٤}$ متشابهة

(٤) $س^{٢}$ ل ، س $ل^{٢}$ غير متشابهة

(٥) – ٥ $س^{٢}$ $ص^{٣}$ ، - ٥ $ص^{٣}$ $س^{٢}$ متساوية

(٦) ٥, ٠ $س^{٢}$ ص ، $\frac{١}{٢}$ ص $س^{٢}$ متساوية

....

مثال(٣) اكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة القياسية وحدد درجتها:

الحدودية	الصورة القياسية	درجة الحدودية
$ص^{٢}$ – ٢ ص + $ص^{٣}$	$ص^{٣}$ + $ص^{٢}$ – ٢ ص	الدرجة الثالثة
$س^{٤}$ + ٥ س – ٧ – $س^{٢}$	$س^{٤}$ – $س^{٢}$ + ٥ س – ٧	الرابعة
٢ $ع^{٢}$ – ٣ ع + $ع^{٤}$ + ٨	$ع^{٤}$ + ٢ $ع^{٢}$ – ٣ ع + ٨	الرابعة

مثال(٤) اوجد قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما س= ٣ ، ص = ـ٢

(ا) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢ ص^{٢} + ٢٥

الحل : $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٣} + ٢ × (ـ٢)^{٢} + ٢٥ = $\frac{١}{٣}$ × ٢٧ + ٢ ×٤ + ٢٥ = ٩ +٨+٢٥=٤٢

(ب) ٣ ص^{٤} – ٢ س ص – ٥٠

الحل : ٣ × (ـ٢)^{٤} – ٢ × ٣ × ـ ٢ – ٥٠ = ٣ × ١٦ + ١٢ – ٥٠ = ٤٨ +١٢ – ٥٠ = ١٠

مثال(٥) ضع الحدوديات التالية في الصورة القياسية ، ثم حدد درجة الحدودية:

(ا) ٦ س^{٥} + ٤ س – ٥

الحل: ٦ س^{٥} + ٤ س^{٣} – ٥

الدرجة الخامسة

(ب) – ٧ + ٤ ص^{٣} – ٥ ص^{٢} + ص^{٤}

الحل : ص^{٤} + ٤ ص^{٣} – ٥ ص^{٢} – ٧

الدرجة الرابعة

(جـ) ـ٤ ع + ٦ – ٢ ع^{٣}

الحل: ـ ٢ ع^{٣} – ٤ ع + ٦

الدرجة الثالثة

(د) ٢ س – ٥ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$

ـ ٥ س^{٢} + ٢ س + $\frac{١}{٢}$

الدرجة الثانية

مثال(٥): اوجد قيمة كثيرات الحدود التالية:

(ا) $-٤\,\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{س} + ٥ + ٢\,\text{س}^{٣}$ ، عندما س = ٢

الحل: $-٤ \times ٢^{٢} + \frac{١}{٢} \times ٢ + ٥ + ٢ \times ٢^{٣} = -٤ \times ٤ + ١ + ٥ + ٢ \times ٨ = -١٦ + ١ + ٥ + ١٦ = ٦$

....

(ب) $-\,\text{س ص}^{٢} + \frac{٣}{٤} \times ١^{٢} \times ٤^{٢} - ٩$ ، عندما س = ٤ ، ص = ١

الحل: $-٤ \times ١^{٢} + \frac{٣}{٤} \times ١^{٢} \times ٤^{٢} - ٩ = -٤ \times ١ + \frac{٣}{٤} \times ١ \times ١٦ - ٩$

$= -٤ + ١٢ - ٩ = -١٣ + ١٢ = -١$

....

دروس الوحدة دي كاملة هي تأسيس ليك

خليك شاطر فيها هتكون شاطر بالسنين

القادمة

٢/١ م- جمال

الدرس الثالث :جمع كثيرات الحدود وطرحها

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة معا

مثال(١) : اوجد ناتج جمع كثيرات الحدود التالية :

٢ س^{٢}+ ٤ س – ٦   مع – ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} – س + ٢

الحل :

الطريقة الراسية:

٢ س^{٣} +   + ٤ س - ٦

+   - ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} - س   + ٢

- ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س – ٤

الطريقة الافقية:

(٢ س^{٣} + ٤ س – ٦) + (- ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} – س + ٢)

= [٢ س^{٣} +(-٥ س^{٣})] + [٤ س + (- س)] + [-٦ + ٢] + ٢ س^{٢}

= - ٣ س^{٣} + ٣ س - ٤ + ٢ س^{٢} = -٣ س^{٣} +٢س^{٢} +٣س- ٤

....

مثال(٢): اجمع الحدوديات التالية

(ا) س^{٢} +٣س^{٤}-٧س ، - س^{٢}-١٠س^{٤} ، ٥س+٢س^{٢} – ٨س^{٣}

الحل: ٣ س^{٤} + س^{٢} – ٧ س

- ١٠ س^{٤} - س^{٢}

+   - ٨ س^{٣} +٢ س^{٢} +٥ س

- ٧ س^{٤} – ٨ س^{٣} +٢ س^{٢} – ٢ س

طرح الحدوديات:

لطرح كثيرات الحدوديات نضيف المعكوس الجمعي للمطروح

مثال(٣) اوجد ناتج ما يلي:

(٦ س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٤) – (س^{٣} - ٥ س^{٢} – ٣)

الحل: الطريقة الافقية

المعكوس الجمعي للحدودية الثانية –(س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٣) = - س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

نجمع الحدوديتين (٦ س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٤) + (- س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣)=

[٦س^{٣} +(- س^{٣})] + [-٢ س^{٢} +٥ س^{٢}] + [٤ +٣] = ٥ س^{٢} +٣ س^{٢} + ٧

الطريقة الراسية:

المعكوس الجمعي للحدودية الثانية –(س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٣) = - س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

٦ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٤

+ - س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

----

٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧

....

مثال(٤) : (ا) اطرح ٣ص^{٤} -٢ص^{٣} -٥ص من ١٢ص^{٣} – ص^{٤} + ٢ ص^{٢}

الحل: المعكوس الجمعي للمطروح – (٣ص^{٤} - ٢ ص^{٣} - ٥ص) = - ٣ص^{٤} + ٢ ص^{٣} + ٥ص

(١٢ص^{٣} – ص^{٤} + ٢ ص^{٢}) +(- ٣ص^{٤} + ٢ ص^{٣} + ٥ص)=

[١٢ص^{٣} +٢ص^{٣}] + [- ص^{٤} + - ٣ ص^{٤}] + [٢ص^{٢}] +٥ص =

١٤ص^{٣} – ٤ص^{٤} + ٢ص^{٢} +٥ص = -٤ص^{٤} +١٤ص^{٣} +٢ص^{٢} +٥ص

(ب) من – ٢س^{٢} – س + ١ اطرح – س^{٢} + ٣س- ٢

الحل: المعكوس الجمعي للمطروح س^{٢} - ٣ س + ٢

(– ٢س^{٢} – س + ١) + (س^{٢} - ٣ س + ٢) =

[- ٢س^{٢} + س^{٢}] + [- س + - ٣س] + [١ + ٢] = - س^{٢} – ٤ س + ٣

مثال(٥) : اجمع كثيرات الحدود التالية:

(ا) ٢ س^{٣} + ٥ س – ٢ ، -٣ س^{٣} -٢ س + ١٠

الحل: ٢ س^{٣} + ٥ س – ٢

\+ -٣ س^{٣} -٢ س + ١٠

- ١ س^{٣} + ٣ س + ٨

(ب) – س^{٣} + ٦ س – ٥ ، ٧ س – س^{٢} – ٣ ، س^{٢} + ٨

الحل: (– س^{٣} + ٦ س – ٥) + (٧ س – س^{٢} – ٣) + (س^{٢} + ٨) =

- س^{٣} + [- س^{٢} + س٢] + [٦س +٧س] + [-٥ +-٣+٨] =

- س٣ + ٠ + ١٣ س + ٠ = - س^{٣} + ١٣ س

....

مثال(٦) اوجد ناتج ما يلي

(ا) ٣س^{٤}- ٢ س^{٣} + ٧س - (٢ س^{٣}- س^{٤} + ٥س)

الحل : ٣س^{٤}- ٢ س^{٣} + ٧س - ٢ س^{٣}+ س^{٤} - ٥س =

[٣ س^{٤} + س^{٤}] + [- ٢س^{٣} + -٢ س^{٣}] + [٧س + - ٥ س] =

٤ س^{٤} + - ٤ س^{٣} + ٢ س = ٤ س^{٤} – ٤ س^{٣} +٢ س

....

مثال(٧) : اطرح ٥ س^{٢} +٦س^{٤} – ١ من ٤س^{٤} – ١٤س^{٢}+ س

الحل: المعكوس الجمعي للمطروح – (٥ س^{٢} +٦س^{٤} –١) = - ٥س- ٦ س^{٤} + ١= - ٦ س^{٤} – ٥ س^{٢} + ١

٤س^{٤} – ١٤س^{٢}+ س

\+ - ٦ س^{٤} – ٥ س^{٢} +١

- ٢ س^{٤} - ١٩ س^{٢} + س + ١

الدرس الرابع : ضرب كثيرات الحدود

ا × (س + ص) = (ا × س) + (ا × ص)

مثال (٨) : اوجد ناتج ما يلي

(ا) ٥ س^{٢} × ٧ س^{٣} = (٥ × ٧) × (س^{٢}× س^{٣}) = ٣٥ س$^{٢+٣}$ = ٣٥ س^{٥}

(ب) – ٣س^{٤} × - ٥ س^{٥} = (-٣ × -٥) × (س^{٤} × س٥) = ١٥ س$^{٤+٥}$ = ١٥ س٩

....

مثال(٩) :اوجد (٢ س^{٢}) × (٨س^{٤} +٣س)=

(٢س^{٢}×٨س^{٤}) + (٢س^{٢}×٣س) =

١٦ س$^{٢+٤}$ + ٦ س$^{٢+١}$ = ١٦ س^{٦} + ٦ س^{٣}

....

مثال(١٠) اوجد ناتج كل مما يلي

(ا) ٢س × ٣س^{٢} =(٢×٣) ×(س×س^{٢}) = ٦ س$^{١+٢}$ = ٦س^{٣}

(ب) $\frac{١}{٢}$ س × ($\frac{٢}{٣}$ س^{٢} – ٤ س +$\frac{٣}{٢}$) =

($\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٢}{٣}$ س^{٢}) + ($\frac{١}{٢}$ س × - ٤س) + ($\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٣}{٢}$)=

$\frac{١}{٣}$ س^{٣} + - ٢ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س

....

(جـ) (٣ص^{٢} + ص – ٢) × (- ٢ ص) =

٣ ص^{٢}×(-٢ص)+ ص ×(- ٢ ص) – ٢ ×(- ٢ ص) =

- ٦ ص^{٣} - ٢ ص^{٢} + ٤ ص

....

(د) (س + ٧) (س -٥) =

س×س+ س× -٥ + ٧×س +٧ × -٥ =

س^{٢} - ٥ س + ٧ س -٣٥ = س^{٢} +٢ س – ٣٥

(هـ) (ا – ب) (ا + ب) =

ا× ا + ا × ب – ب× ا – ب× ب = ا^{٢} + ا ب – ا ب + ب^{٢} = ا^{٢} + ب^{٢}

....

(و) (١٢ ا + ٣) (٥ ا^{٢} - ١٤ ا – ٧) =

١٢ ا × ٥ ا^{٢} + ١٢ ا × - ١٤ ا + ١٢ ا × -٧ + ٣ × ٥ ا^{٢} + ٣ × - ١٤ ا + ٣ × -٧ =

١٠ ا^{٣} -٨ ا^{٢} – ١٤ ا + ١٥ ا^{٢} -١٢ ا – ٢١ =

١٠ ا^{٣} +(-٨ ا^{٢} + ١٥ ا^{٢}) +(– ١٤ ا -١٢ ا) -٢١ = ١٠ ا^{٣} + ٧ ا^{٢} -٢٦ ا -٢١

....

مثال(١١) :اوجد (ص – ٧)^{٢}

الحل : (ص – ٧) (ص – ٧) =

ص × ص + ص × -٧ – ٧× ص -٧× -٧ =

ص^{٢} – ٧ ص – ٧ ص +٤٩ =

ص^{٢} -١٤ ص +٤٩

....

(ب) (ا^{٢} + ٥ ب)^{٢}

الحل: (ا^{٢} + ٥ ب) (ا^{٢} + ٥ ب) =

ا^{٢} × ا^{٢} + ا^{٢} × ٥ ب + ٥ ب × ا^{٢} + ٥ ب × ٥ ب =

ا^{٤} + ٥ ا^{٢} ب + ٥ ا^{٢} ب + ٢٥ ب^{٢} =

ا^{٤} + ١٠ ا^{٢} ب + ٢٥ ب^{٢}

....

مثال(١٢) اوجد مربع (س^{٢} + ١)

الحل :

(س^{٢} + ١)^{٢} = مربع الاول + ٢ الحد الاول × الحد الثاني + مربع الثاني

= (س^{٢})^{٢} + ٢ × س^{٢} × ١ + (١)^{٢}

= س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١

مثال(١٣) اوجد مربع كل حدانية مما يلي

(أ) س- ٤

الحل:

(س- ٤)^{٢} = (س- ٤)(س- ٤)

= س× س + س × -٤ – ٤ × س -٤ ×-٤

= س^{٢} - ٤ س – ٤ س + ١٦

= س^{٢} – ٨ س + ١٦

....

(ب) ٣ ا – ٢ جـ^{٢}

الحل :

(٣ ا – ٢ جـ^{٢})^{٢} = (٣ ا – ٢ جـ^{٢}) (٣ ا – ٢ جـ^{٢})

= ٣ ا × ٣ ا + ٣ ا × - ٢ جـ^{٢} - ٢ جـ^{٢}× ٣ ا - ٢ جـ^{٢}× - ٢ جـ^{٢}

= ٩ ا^{٢} - ٦ ا جـ^{٢} - ٦ ا جـ^{٢} + ٤ جـ^{٤}

= ٩ ا^{٢} - ١٢ ا جـ^{٢} + ٤ جـ^{٤}

الدرس الخامس : قسمة كثيرة حدود على حد جبري

مثال(١) : اقسم (٦ س^{٥} + ٨ س^{٤} – ٢ س^{٢}) على س^{٢}

الحل:

$$\frac{٦\ س^{٥} + ٨\ س^{٤} - ٢\ س^{٢}}{س^{٢}} = \frac{٦\ س^{٥}}{س^{٢}} + \frac{٨\ س^{٤}}{س^{٢}} - \frac{٢\ س^{٢}}{س^{٢}} \quad \_\_\_\_\_\_$$

$$= ٦\ س^{٣} + ٨\ س^{٢} - ٢$$

....

مثال(٢) اختصر

(ا) $\frac{س^{٥}}{س^{٣}} = س^{٥-٣} = س^{٢}$

(ب) $\frac{٦س^{٤}}{٢س^{٢}} = \frac{٦}{٢} \times \frac{س^{٤}}{س^{٢}} = ٣\ س^{٢}$

(جـ) - $\frac{٨س^{٣}}{٨س^{٣}} = -١$

(د) $\frac{١٠س^{٢}}{٢٥س^{٥}} = \frac{١٠}{٢٥} \times \frac{س^{٢}}{س^{٥}} = \frac{٢}{٥\ س^{٣}}$

....

مثال(٣) :اقسم ٦س^{٢} ص^{٣} + ١٢ س^{٤} ص^{٤} – ١٨ س^{٥} ص^{٢} على ٦ س^{٢} ص^{٢}

الحل:

$$\frac{٦\ س^{٢}\ ص^{٣} + ١٢س٤\ ص^{٢} - ١٨\ س^{٥}ص^{٢}}{٦\ س^{٢}\ ص^{٢}} = \frac{٦\ س^{٢}\ ص^{٣}}{٦\ س^{٢}\ ص^{٢}} + \frac{١٢\ س^{٤}\ ص^{٤}}{٦\ س^{٢}\ ص^{٢}} - \frac{١٨\ س^{٥}\ ص^{٢}}{٦\ س^{٢}\ ص^{٢}}$$

$$= ص + ٢ - ٣\ س^{٣}$$

....

مثال(٤):مساحة مستطيل هي (٣ س^{٢} – ٢ س) مترا مربعا ، عرض المستطيل س مترا اوجد الطول

$$الطول = \frac{المساحة}{العرض} = \frac{٣\ س^{٢} - ٢\ س}{س} = \frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٢\ س}{س} = ٣\ س - ٢$$

الوحدة الرابعة : تحليل المقادير الجبرية

الدرس الاول:العامل المشترك الاكبر (ع . م . ا)

مثال(١) اوجد ع . م . ا لكل مما يلي:

(ا) ١٨ ، ٢٧

عوامل ١٨ هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨

عوامل ٢٧ هي ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ العوامل المشتركة هي ٣، ٩ ، ١

ع . م. ا = ٩

...

(ب) ٥ ص^{٢} ، ص^{٦}

٥ ص٢ = ٥× ص× ص

ص^{٦} = ص ×ص×ص×ص×ص×ص

ع.م.ا = ص × ص =ص^{٢}

...

(جـ) ٦ س^{٤} ص^{٣} ، ٩ س^{٢} ص^{٥}

٦ س^{٤} ص^{٣} = ٣ × ٢ × س^{٢} × س^{٢} × ص^{٣}

٩ س^{٢} ص^{٥}= ٣ × ٣ × س^{٢} × ص^{٣} × ص^{٢}

ع.م. ا = ٣× س^{٢} × ص٣ = ٣ س^{٢} ص٣

...

(د) ٤ ب^{٣} ، ١٤ ب^{٢} ، ٢٠ ب^{٥}

٤ب^{٣} = ٢×٢ × ب^{٢} ×ب

١٤ ب^{٢} = ٢ × ٧ ×ب^{٢}

٢٠ ب^{٥} = ٢×١٠× ب^{٢}× ب^{٣}

ع. م . ا = ٢ × ب^{٢} =٢ ب^{٢}

...

(هـ) ١٠ ص ع ، ٤٠ س٢ ص

ع . م . ا = ١٠ ص

<u>الدرس الثاني: التحليل باخراج العامل المشترك الاكبر</u>

مثال)(١) حلل المقادير التالية باخراج العامل المشترك الاكبر (ع . م . ا)

(ا) ٧ + ٧ ص   ع. م. ا = ٧

٧ + ٧ ص = ٧ (١ +ص)

....

(ب) ٩ س^{٢} + ٣ س   ع. م. ا = ٣ س

٩ س^{٢} + ٣ س = ٣س (٣ س + ١)

....

(جـ) س^{٢} ص + س ك   ع. م. ا = س

س^{٢} ص + س ك = س (س ص + ك)

....

(د) ٦ س^{٣} + ٨ ص س   ع. م. ا = ٢ س

٦ س^{٣} + ٨ ص س = ٢س (٣ س^{٢} + ٤ ص)

....

(هـ) ٨ س^{٢} ص^{٣} – ١٢ س^{٣} ص   ع. م. ا =٤ س^{٢} ص

٨ س^{٢} ص^{٣} – ١٢ س^{٣} ص = ٤س^{٢} ص (٢ ص – ٣ س)

....

(و) ٣ ل^{٥} ع^{٤} – ٩ ع^{٥} ل^{٣} + ٦ ع^{٢} ل^{٢} ع. م. ا =٣ ل^{٢} ع^{٢}

٣ ل^{٥} ع^{٤} – ٩ ع^{٥} ل^{٣} + ٦ ع^{٢} ل^{٢} =٣ ل^{٢} ع^{٢}(ل^{٣} ع^{٢} – ٣ ل ع^{٣} + ٢)

....

(ح) س (ا – ٢) – ص (ا – ٢)   ع. م. ا =(ا- ٢)

س (ا – ٢) – ص (ا – ٢) = (ا- ٢)(س – ص)

مثال(٢) اكتب المقادير التالية في ابسط صورة :

(أ) $\frac{س^٢ - س^٣}{س} = \frac{س^٢}{س} - \frac{س^٣}{س} = س - س^٢$

....

(ب) $\frac{٣س^٢ - ٦ س ص}{٣ س} = \frac{٣ س^٢}{س} - \frac{٣ س ص}{س} = س - ٢ ص$

....

(جـ) اذا كان : ا + ب = ١٥ ، فما هي قيمة ٢ ا + ٢ ب +٨

الحل : ٢ ا + ٢ ب +٨ = ٢ (ا + ب) + ٨

٢ × ١٥ + ٨ = ٣٠ + ٨ = ٣٨

الدرس الثالث: تحليل الفرق بين مربعين

الفرق بين مربعي كميتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكميتين في الفرق بينهما

اي ان : س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص) (س + ص)

مثال(١) حلل ما يلي تحليلا تاما:

(ا) ص^{٢} – ١٦ = (ص – ٤) (ص + ٤)

....

(ب) س – ٢٥ ع^{٢} = (س – ٥ ع) (س + ٥ ع)

....

(جـ) ٨١ – هـ^{٢} = (٩ – هـ) (٩ + هـ)

....

(د) ل^{٢} ك^{٢} – ٣٦ = (ل ك – ٦) (ل ك + ٦)

....

مثال(٣) حلل ما يلي تحليلا تاما :

(ا) س^{٣} – س = س (س^{٢} – ١)

= س (س – ١) (س + ١)

....

(ب) ٢ ل^{٢} – ١٨ = ٢ (ل^{٢} – ٩)

= ٢ (ل – ٣) (ل + ٣)

....

مثال(٤) حلل ما يلي تحيلا تاما:

(١) (س – ٢)^{٢} - ١٠٠ = [(س – ٢) – ١٠] [(س+ ٢) + ١٠]

= (س- ٢ – ١٠) (س + ٢ +١٠)

= (س – ١٢) (س + ١٢)

(ب) ٢٥ – (ن + ل)^{٢} = [٥ – (ن +ل)] [٥ + (ن – ل)]

= (٥ – ن – ل) (٥ + ن + ل)

(جـ) (٩٣)^{٢} – (٧)^{٢} = (٩٣ – ٧) (٩٣ + ٧)

= ٨٦ × ١٠٠ = ٨٦٠٠

(د) $\frac{١}{٩}$ س^{٢} - $\frac{١٦}{٢٥}$ ص^{٢} = ($\frac{١}{٣}$ س - $\frac{٤}{٥}$ ص) ($\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٤}{٥}$ ص) $\frac{١٦}{٢٥}$

(هـ) $\frac{٤ س^{٢}}{ب^{٢}}$ - $\frac{جـ^{٢}}{٩}$ = ($\frac{٢ س}{ب}$ - $\frac{جـ}{٣}$) ($\frac{٢ س}{ب}$ + $\frac{جـ}{٣}$)

(و) (٥ – ٤ م)^{٢} - ١٢١ = [(٥ – ٤ م) – ١١] [(٥ – ٤ م) + ١١]

= (٥ – ٤ م – ١١) (٥ – ٤ م + ١١)

= (- ٤ م – ٦) (- ٤ م + ١٦)

(ز) ١ – ص^{٢} = (١ – ص) (١ + ص)

(ح) ٤ م^{٢} – ٣٦ = (٢ م – ٦) (٢ م + ٦)

(ط) ٤ س^{٢} - ٩ ص^{٢} = (٢ س – ٣ ص) (٢ س + ٣ ص)

(ي) ٤ س^{٢} – ١٠٠ = ٤ (س^{٢} – ٢٥)

= ٤ (س – ٥) (س + ٥)

الدرس الرابع :حل معادلة من الدرجة الاولى في متغير واحد

مثال (١) اوجد حل المعادلات التالية حيث س ∋ ن

(ا) ٣ س – ٤ = - ١٨- س

الحل: ٣ س + س – ٤ = - ١٨

٤ س – ٤ = - ١٨ باضافة +٤ للطرفين

٤ س – ٤ +٤ = -١٨ +٤

٤ س = - ١٤ بقسمة الطرفين على ٤

س = $\frac{-١٤}{٤}$

....

(ب) ٥ (س – ٢) = ٥

الحل :

٥ س – ١٠ = ٥

٥ س -١٠ + ١٠ = ٥ +١٠

٥ س = ١٥

س = ٣

....

(جـ) $\frac{١}{٢}$ ك + ١٩ = ١١

الحل: $\frac{١}{٢}$ ك + ١٩ – ١٩ = ١١ – ١٩

$\frac{١}{٢}$ ك = - ٨

٢ × $\frac{١}{٢}$ ك = ٢ × - ٨

ك = - ١٦

....

(د) ٥ س = ٣ (س + ٢)

٥ س = ٣ س + ٦

٥ س – ٣ س = ٦   ٢ س = ٦   س = ٣

مثال(٢) اكتب ٠,$\overline{\text{٦}}$ على شكل كسر في ابسط صورة

الحل : ليكن ن = ٠,$\overline{\text{٦}}$ (١)

١٠ × ن = ١٠ × ٠,$\overline{\text{٦}}$

١٠ ن = ٦,$\overline{\text{٦}}$ (٢) اطرح (١) من (٢)

١٠ ن – ن = ٦,$\overline{\text{٦}}$ - ٠,$\overline{\text{٦}}$

٩ ن = ٦ بالقسمة على ٩

ن = $\frac{\text{٦}}{\text{٩}}$

ن = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

∴ ٠,$\overline{\text{٦}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

....

مثال(٣) يقول سالم اختي تبلغ من العمر ٤ اضعاف العمر الذي يبلغه اخي وعند جمع عمريهما معا فان المجموع يصبح ٢٠ فكم عمر اخو سالم ؟

الحل: نفرض عمر اخو سالم س

عمر اخت سالم ٤ س

المعادلة : ٤ س + س = ٢٠

٥ س = ٢٠

س = ٤ عمر اخو سالم ٤ سنوات

....

مثال(٤) يبلغ راتب مدير في احدي الشركات ٣ امثال راتب موظف في الشركة نفسها مصافا اليه ٦٠ دينار اذا كان راتب المدير يساوي ١٣٦٥ دينار فكم يبلغ راتب الموظق؟

الحل: نفرض ان راتب الموظف س   راتب المدير ٣ س +٦٠

المعادلة : ٣ س + ٦٠ = ١٣٦٥

٣ س + ٦٠ - ٦٠ =١٣٦٥ – ٦٠

٣ س = ١٣٠٥ بالقسمة على ٣

س = ٤٣٥ راتب الموظف

الدرس الخامس: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل

مثال(١) اوجد مجموعة حل المعادلة ٤ س^{٢} – ٥ س = ٠ حيث س ∋ ص

الحل : س (٤ س – ٥) = ٠

اما س = ٠ ∋ ص او ٤ س – ٥ = ٠

٤ س – ٥ +٥ = ٠+ ٥

٤ س = ٥

س = $\frac{٥}{٤}$ ∌ ص

م . ح = { ٠ }

....

مثال(٢) اوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} = ٤ حيث س ∋ ن

الحل : س^{٢} – ٤ = ٠

(س – ٢) (س + ٢) = ٠

اما س - ٢ = ٠ او س + ٢ = ٠

س = ٢ ∋ ن س = - ٢ ∋ ن

م . ح = { -٢ ، ٢ }

....

مثال(٣) اوجد مجموعة حل المعادلة (س + ٣)^{٢} - ١ = ٠ حيث س ∋ ط

الحل : (س + ٣)^{٢} - ١ = ٠

(س +٣ – ١) (س+ ٣ + ١) = ٠

(س + ٢) (س + ٤) = ٠

اما س + ٢ = ٠ او س + ٤ = ٠

س =- ٢ ∌ ط س = - ٤ ∌ ط

م . ح = { }

مثال(٤) اوجد مجموعة حل المعادلة ٢ م^{٢} = ٥٠ حيث س ∈ ن

الحل : ٢ م^{٢} - ٥٠= ٠

٢ (م^{٢} - ٢٥) = ٠

٢(م - ٥) (م + ٥) = ٠

اما ٢ = ٠ مرفوض أو م - ٥ = ٠ او م + ٥ = ٠

م = ٥ ∈ ن م = - ٥ ∈ ن

م . ح = { -٥ ، ٥ }

....

مثال(٥) اوجد مجموعة حل المعادلة (ص + ٢)^{٢} - ٩ = ٠ حيث س ∈ ط

الحل : (ص + ٢)^{٢} - ٩ = ٠

(ص +٢ – ٣) (ص+ ٢ + ٣) = ٠

(ص - ١) (ص + ٥) = ٠

اما ص - ١ = ٠ او ص + ٥ = ٠

ص = ١ ∈ ن س = - ٥ ∈ ن

م . ح = {١ ، - ٥ }

....

مثال(٦) اوجد مجموعة حل المعادلات التالية حيث س ∈ ن

(س + ٤) (س - ٢) = ٠

اما س + ٤ = ٠ او س - ٢ = ٠

ص = - ٤ ∈ ن س = ٢ ∈ ن

م . ح = {- ٤ ، ٢ }

مثال(٧) (أ) اوجد مجموعة حل المعادلة ٣ س ٢ - ٢٧ = ٠حيث س ∋ ن

الحل : ٣ س ٢ - ٢٧= ٠

٣ (س ٢ - ٩) = ٠

٣(س - ٣) (س + ٣) = ٠

اما ٣ = ٠ مرفوض س - ٣ = ٠ او س + ٣ = ٠

س = ٣ ∋ ن س = - ٣ ∋ ن

م . ح = { -٣ ، ٣ }

....

(ب) (س + ٢)٢ - ٢٥ = ٠

(س +٢ – ٥) (س+ ٢ +٥) = ٠

(ص - ٣) (ص + ٧) = ٠

اما ص - ٣ = ٠ او ص + ٧ = ٠

ص = ٣ ∋ ن س = - ٧ ∋ ن

م . ح = {٣ ، - ٧ }

....

(ب) ٥ س ٢ = ٨٠

الحل : ٥ س ٢ - ٨٠= ٠

٥ (س ٢ - ١٦) = ٠

٥(س - ٤) (س + ٤) = ٠

اما ٥ = ٠ مرفوض او س - ٤ = ٠ او س + ٤ = ٠

م =٤ ∋ ن م = - ٤ ∋ ن

م . ح = { -٤ ، ٤ }

الدرس السادس : حل المتباينات من الدرجة الاولى في متغير واحد

مثال(١) حل المتباينات التالية حيث س ∋ ن

(أ) ٢ س + ٣ ≤ ١

الحل: ٢ س + ٣ - ٣ ≤ ١- ٣

٢ س ≤ -٢

س ≤ -١

حل المتباينة هو مجموعة الاعداد النسبية الاكبر من او تساوي – ١

....

(ب) $\frac{٢}{٣}$ س - $\frac{١}{٢}$ < $\frac{٣}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ < $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س < ٢

$\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٢}{٣}$ س < ٢ × $\frac{٣}{٢}$

س < ٣

حل المتباينة هو مجموعة الاعداد النسبية الاصغر من ٣

....

(ب) ٢ ص + ٤ ≥ ١٩

الحل: ٢ ص +٤ - ٤ ≥ ١٩- ٤

٢ ص ≥ ١٥

ص ≥ ٧,٥

حل المتباينة هو مجموعة الاعداد النسبية الاكبر من او تساوي ٧,٥

(جـ) ١٠ (س – ٥) > ٧(٦ – س)

١٠ س – ٥٠ > ٤٢ – ٧ س

١٠ س – ٧س > ٤٢ + ٥٠

١٧ س >٩٢

س > ٥ $\frac{٧}{١٧}$

مجموعة الحل هو مجموعة الاعداد النسبية الاكبر من ٥ $\frac{٧}{١٧}$

....

(د) ٢ س + ٤ ≥ ٣(س+١)

٢ س + ٤ ≥ ٣ س +٣

٣ س – ٢ س ≤ ٤ ـ٣

س > ١

مجموعة الحل هو مجموعة الاعداد النسبية الاكبر من ١

....

(هـ) ٢ س + ٣ > ١٥

الحل: ٢ س +٣ ـ ٣ > ١٥ـ ٣

٢ س > ١٢

س ,> ٦

حل المتباينة هو مجموعة الاعداد النسبية الاكبر من او تساوي٦

....

(و) ٥ م – ٣,٤ > ١,١

٥م – ٣,٤ +٣,٤ > ١,١+٣,٤

٥ م > ٤,٥

م > ٠,٩

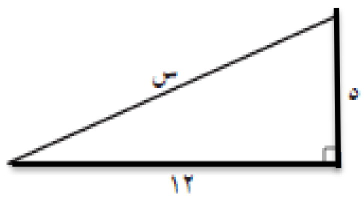
حل المتباينة هو مجموعة الاعداد النسبية الاكبر ٠,٩

الوحدة الخامسة : الهندسة والقياس

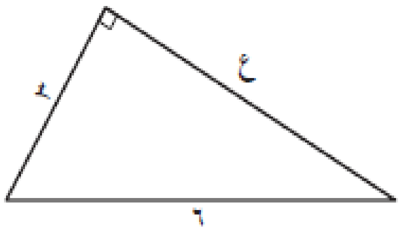
الدرس الاول: نظرية فيثاغورث

مثال(١) اوجد قيمة المجهول في كل مما يلي:

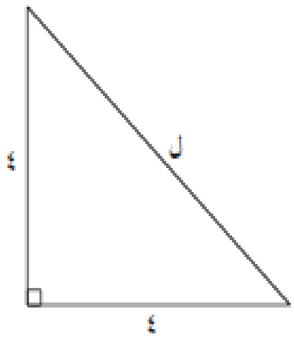
أ



ب



جـ



أ)
س^{٢} = ٥^{٢} + ١٢^{٢}

س^{٢} = ٢٥ + ١٤٤=١٦٩

س =$\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

ب)
ع^{٢} = (٦)^{٢} – (٣)٢

ع^{٢} = ٣٦ – ٩ = ٢٧

ع = $\sqrt{٢٧}$

جـ)
ل^{٢} = (٤)^{٢} + (٤)^{٢}

ل^{٢} = ١٦ + ١٦ = ٣٢

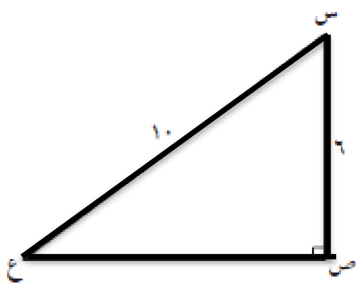
ل = $\sqrt{٣٢}$

....

مثال(٢) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه:

س ص = ٦ وحدة طول ، س ع = ١٠ وحدة طول

اوجد ص ع



الحل: ∵ س ص ع قائم في ص

(ص ع)^{٢} = (س ع)^{٢} – (س ص)^{٢}

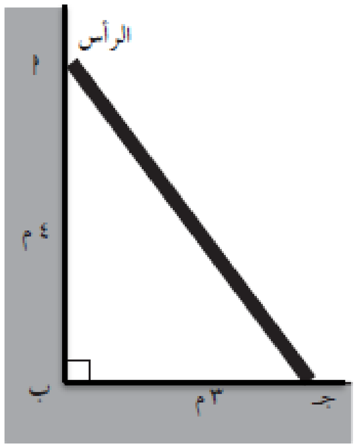
(ص ع)^{٢} = (١٠)^{٢} - (٦)^{٢}

(ص ع)^{٢} = ١٠٠ – ٣٦ = ٦٤

ص ع = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

مثال(٣)

سلم يرتكز على حائط راسي بحيث تبعد قمته عن سطح الارض بمقدار ٤ امتار ، وتبعد قاعدة السلم عن الحائط ٣ امتار اوجد طول السلم



الحل: ∴ ا ب جـ قائم في ب

(ا جـ)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

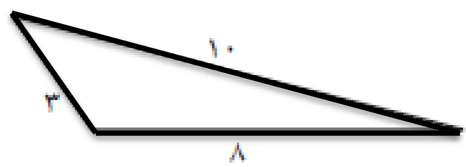
(ا جـ)^{٢} = (٤)^{٢} + (٣)^{٢}

(ا جـ)^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

ا جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

....

مثال(٤) في كل مما يلي حدد ما اذا كان المثلث قائم الزاوية ام لا

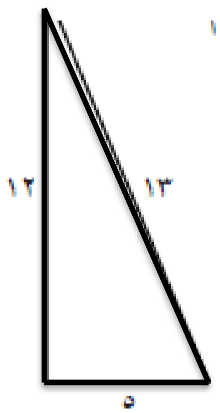


(١٠)^{٢}= ١٠٠

(٨)^{٢} + (٣)^{٢} = ٦٤ + ٩ = ٧٣

(١٠)^{٢} ≠ (٨)^{٢}+(٣)^{٢}

المثلث غير قائم



(١٣)^{٢} = ١٦٩

(١٢)^{٢} +(٥)^{٢} = ١٤٤+٢٥ = ١٦٩

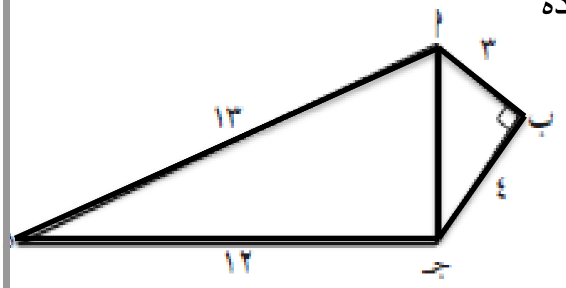
(١٣)٢ = (١٢)^{٢} +(٥)^{٢}

المثلث قائم

مثال(٥) في الشكل المقابل : ق(ب^) = ٩٠ ° ، ا ب = ٣ وحدة

، ب جـ = ٤ وحدة طول ، جـ د = ١٢ وحدة طول ، ا د = ١٣ وحدة

احسب طول ا جـ ثم اثبت ان المثلث اجـ د قائم الزاوية



البرهان :

.. ا ب جـ قائم في ب

$(ا جـ)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$

$(ا جـ)^{٢} = (٤)^{٢} + (٣)^{٢}$

$(ا جـ)^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥$

$ا جـ = \sqrt{٢٥} = ٥$

في المثلث اجـ د

$(اد)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩$

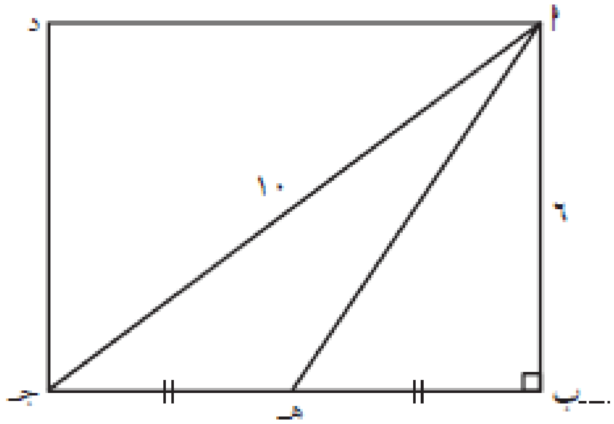
$(ا جـ)^{٢} + (جـ د)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}$

$= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

$(ا د)^{٢} = (ا جـ)^{٢} + (جـ د)^{٢}$

المثلث قائم الزاوية في جـ

....



مثال(٦) ا ب جـ د مستطيل فيه :

ا جـ = ١٠ وحدة ، ا ب = ٦ وحدة ،

هـ منتصف ب جـ اوجد بالبرهان طول

كل من ب جـ ، ب هـ ، ا هـ

البرهان:

.. ا ب جـ قائم في ب

(ب جـ)^{٢} = (ا جـ)^{٢} - (ا ب)^{٢}

(ا جـ)^{٢} = (١٠)^{٢} - (٦)^{٢}

(ا جـ)^{٢} = ١٠٠ ـ ٣٦ = ٦٤

ا جـ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

ب هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤

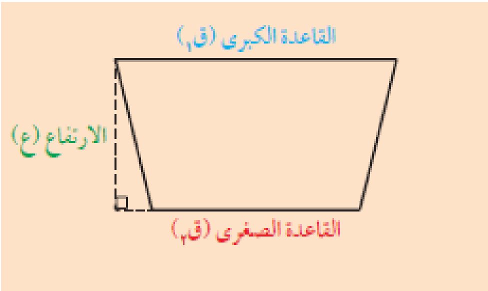
في المثلث اب هـ

(ا هـ)^{٢} = (٦)^{٢} + (٤)^{٢}

= ٣٦ + ١٦ = ٥٢

ا هـ = $\sqrt{٥٢}$

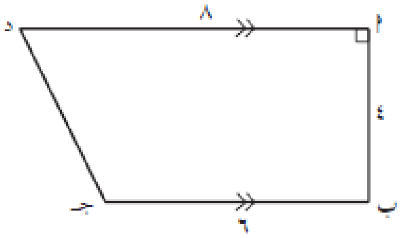
الدرس الثاني : مساحة شبه المنحرف



مساحة شبه المنحرف = مجموع طولى القاعدتين × الارتفاع

$$= \frac{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)}{٢} \times \text{ع}$$

مثال (١) : اوجد مساحة شبه المنحرف ا ب جـ د



الحل :

$$\text{م} = \frac{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)}{٢} \times \text{ع} = \frac{(٨ + ٦)}{٢} \times ٤ = ٧ \times ٤ = ٢٨$$

....

مثال(٢) اوجد مساحة شبه المنحرف الذي فيه :

(ا) ق١ =٧ وحدة ، ق٢ = ٥ وحدة ، ع = ٦ وحدة

الحل :

$$\text{م} = \frac{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)}{٢} \times \text{ع} = \frac{(٧ + ٥)}{٢} \times ٦ = ٦ \times ٦ = ٣٦$$

....

(ب) ق١ = ٦,٣ ، ق٢= ٣,٧ ، ع = ٧

الحل :

$$\text{م} = \frac{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)}{٢} \times \text{ع} = \frac{(٦,٣ + ٣,٧)}{٢} \times ٧ = ٥ \times ٧ = ٣٥$$

....

مثال(٣) اوجد ارتفاع شبه المنحرف مساحته ١٦ وحدة وطول القاعدتين فيه ٣ ، ٥ وحدة

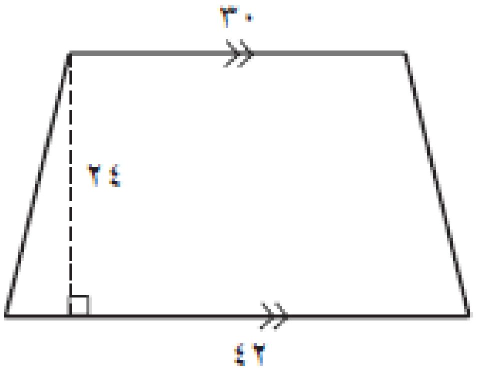
الحل :

$$\text{م} = \frac{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)}{٢} \times \text{ع} = \frac{(٣ + ٥)}{٢} \times \text{ع} = ١٦$$

$$٤ \times \text{ع} = ١٦$$

$$\text{ع} = ٤$$

مثال(٤) يبين الشكل المجاور حديقة منزلية على شكل شبه منحرف يراد زراعتها بالعشب الطبيعي اذا كان سعر الوحدة المربعة من العشب الطبيعي ١٢ دينارا فكم تكلق زراعة الحديقة بالعشب



الحل :

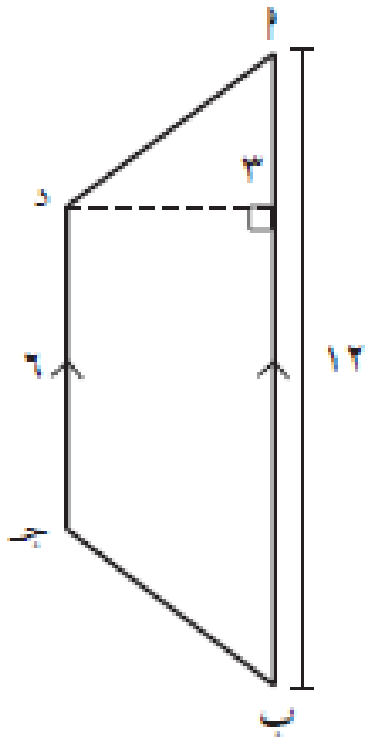
$$م = \frac{(ق_١ + ق_٢)}{٢} \times ع$$

$$= \frac{(٣٠ + ٤٢)}{٢} \times ٢٤ = ٣٦ \times ٢٤ = ٨٦٤ \text{ م}^٢$$

تكلفة زراعة الحديقة = ٨٦٤ × ١٢ = ١٠٣٦٨ دينار

....

مثال(٥) في الشكل المقابل ا ب جـ د شبه منحرف مساحته ٣٦ وحدة فيه : ا هـ = ٣ ، ا ب = ١٢ ، دجـ = ٦ اوجد كلا من د هـ ، ا هـ



الحل :

$$م = \frac{(ق_١ + ق_٢)}{٢} \times ع$$

$$= \frac{(١٢ + ٦)}{٢} \times ع = ٣٦$$

٩ × ع = ٣٦ ع = ٤ وحدة

في المثلث ا د هـ

$$(ا د)^٢ = (٣)^٢ + (٤)^٢$$

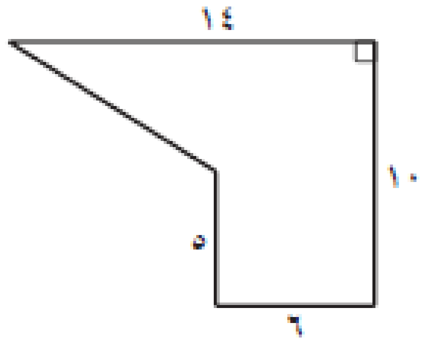
$$= ٩ + ١٦ = ٢٥$$

$$ا د = \sqrt{٢٥} = ٥$$

الدرس الثالث: حل مسائل مساحة الاشكال غير المنتظمة

مثال(١)

اوجد مساحة الشكل المقابل



الحل:

مساحة الشكل = م المستطيل + م المثلث

= الطول × العرض + $\frac{١}{٢}$ ق × ع

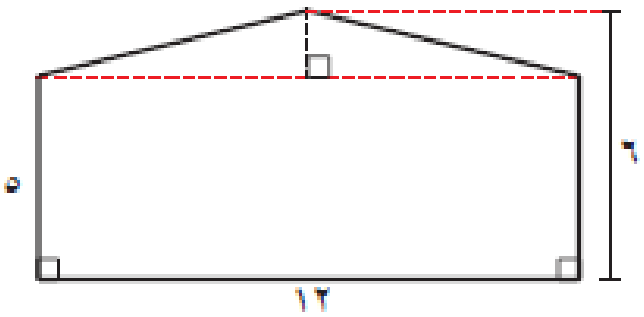
= ١٠ × ٦ + $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٨

= ٦٠ + ٢٠ = ٨٠

....

مثال(٢)

اوجد مساحة الشكل المجاور:



الحل:

مساحة المستطيل = ١٢ × ٥ = ٦٠

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١ = ٦

مساحة الشكل = ٦٠ + ٦ = ٦٦

الدرس الخامس : حجم الاسطوانة الدائرية ـ حجم المخروط الدائرى

حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة م × الارتفاع (ع)

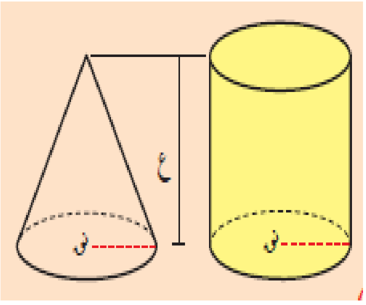
ح = م × ع

مساحة قاعدة اي اسطوانة م = π نق^{٢} (حيث نق نصف القطر)

حجم الاسطوانة (ح) = م × ع = π نق^{٢} × ع

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × حجم الاسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع



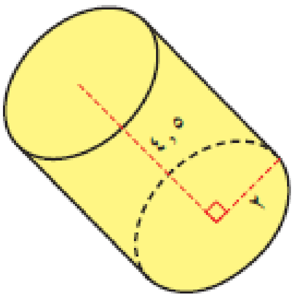
مثال(١):اوجد حجم الاسطوانة المبينة في الشكل المجاور (اعتبر π = ٣,١٤)

الحل:

نق = ٢ ، ع = ٤,٥ ، π = ٣,١٤

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= ٣,١٤×٢^{٢}×٤,٥ =٥٦,٥٢



....

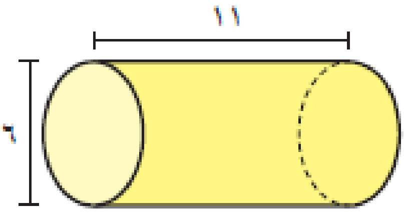
مثال(٢):اوجد حجم الاسطوانة المبينة في الشكل المجاور (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل:

٢نق = ٢٨ نق = ١٤ ، ع = ١٠ ، π = $\frac{٢٢}{٧}$

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ ×(١٤)^{٢}×١٠=٦١٦٠



....

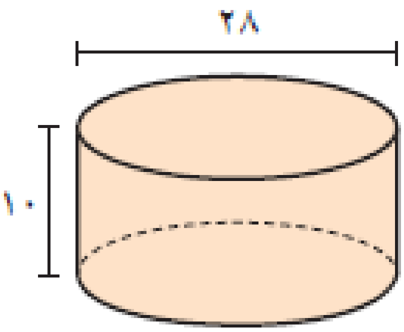
مثال(٣) اوجد حجم الاسطوانة بالشكل (اعتبر π = ٣,١٤)

الحل:

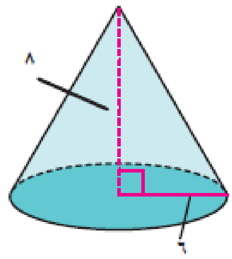
٢نق = ٦ نق = ٣ ، ع = ١١ ، π = ٣,١٤

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= ٣,١٤ ×(٣)^{٢}×١١=٣١٠,٨٦



مثال(٤) اوجد حجم المخروط في الشكل المجاور(اعتبر π =٣,١٤)



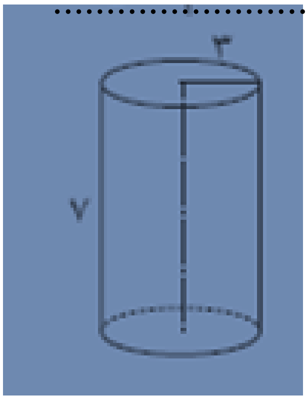
الحل : نق = ٦ ، ع = ٨

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ ×٣,١٤× (٦)^{٢} × ٨ = ٣٠١,٤٤

....

مثال(٥) اوجد حجم كل مجسم مما يلي



(١) (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

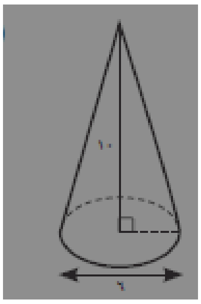
الحل

نق =٣ ، ع = ٧ ، π = $\frac{٢٢}{٧}$

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ ×(٣)^{٢}×٧=١٩٨

....



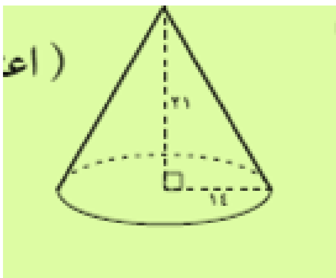
(٢) (اعتبر π =٣,١٤)

الحل : نق = ٣ ، ع = ١٠

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ ×٣,١٤× (٣)^{٢} × ١٠ = ٩٤,٢

....



(٣) اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$

الحل : نق = ١٤ ، ع =٢١

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × (١٤)^{٢} ×٢١ = ٤٣١٢

الوحدة السادسة:الاحتمال

الدرس الاول: طرائق العد

مبدا العد: هو عملية تتكون من خطوتين مستقلتين اذا كان عدد طرق اجراء الخطوة الاولى ن$_{١}$ ، وعدد طرق اجراء الخطوة الثانية ن$_{٢}$ فان عدد الطرق الممكنة لاجراء العملية هو :

ن$_{١}$ × ن$_{٢}$ ويمكن تعميم المبدا لاكثر من خطوتين

مثال(١) يقدم مطعم وجبات من طبق رئيسي اما لحم او سمك او دجاج وكل طبق رئيسي يقدم معه مقبلات من حساء او سلطة

(ا) اكمل مخطط الشجرة البيانية لتبين الوجبات الممكن تقديمها

الاطباق	المقبلات	الوجبات
لحم	حساء سلطة	(لحم ، حساء) (لحم ، سلطة)
سمك	حساء سلطة	(سمك ، حساء) (سمك ، سلطة)
دجاج سلطة	حساء	(دجاج ، حساء) (دجاج ، سلطة)

(ب) كم عدد الوجبات التي يمكن تقديمها ؟

عدد الوجبات = ٣ × ٢ = ٦ وجبات

....

مثال(٢) استخدم مبدا العد لايجاد عدد النواتج في كل حالة

(ا) ما عدد طرائق الاختيار لطلاء من نوعين من الطلاء ، ٥ الوان ؟

عدد الطرق = ٢ × ٥ = ١٠

(ب) ما عدد طرائق الاختيار لدراجة من ٥ الوان ، ٣ احجام ، ٤ موديلات ؟

٥× ٣ × ٤ = ٦٠

التباديل والترتيبات

$^{٤}ل_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر التي تم اختيارها

عندما يكون ترتيب العناصر مهما دون تكرار نسمي هذا الاختيار تبديلا ونرمز له بالرمز (ل)

مضروب العدد: اختيار(ن) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف وبدون تكرار اي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له بالرمز ن! ويكتب على الصورة :

ن!= ن(ن-١) (ن-٢).........×٢ ×١ = $^{ن}ل_{ن}$ ، ن ∋ص

التباديل : عند اختيار (م) عنصر من بين(ن) عنصر مختلف (م ≤ ن) ومن دون تكرار اي عنصر منها حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له برمز التبديلة ($^{ن}ل_{م}$) ويكتب على الصورة :

(١) $^{ن}ل_{م}$ = ن (ن-١)(ن-٢)........الى م من العوامل

(٢) $^{ن}ل_{م} = \dfrac{ن!}{(ن - م)!}$ ، ن ، م ∋ ص

....

مثال(١)

تستخدم احدى المدن لوحات ترخيص الدرجات والتي تحتوي على عدد مكون من ٣ ارقام مختلفة للوحة

(وباستخدام الارقام من ١ الى ٩) يريد المدير المسئوول عن تنظيم الدراجات ان يعرف لوحات التراخيص التي يمكن اصدارها

منازل العدد	احاد	عشرات	مئات
عدد طرائق الاختيار	٩	٨	٧

مثال(٢) اوجد كل من :

(ا) ٥! = ٥ × ٤ × ٣×٢×١ =١٢٠

(ب) ٤ != ٤ × ٣× ٢ × ١ = ٢٤

(جـ) ٧ × ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٧!

(د) $^{٩}ل_{٢}$ = ٩ × ٨ = ٧٢

(و) ٨×٧×٦×٥ = $^{٨}ل_{٤}$

(ز) (١٠ – ٧) ! = ٣! = ٣×٢×١ = ٦

ملاحظات :

(١) ٠!= ١

(٢) ١!= ١

(٣) ن!= ن ×(ن-١) حيث ن∈ص

فمثلا : ٥! = ٥× ٤!

= ٥×٤×٣!

= ٥× ٤×٣×٢! وهكذا

....

مثال(٣) اوجد كل مما يلي :

(ا) ٦!= ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٧٢٠

(ب) (٨-٤)!= ٤ !=٤×٣×٢×١=٢٤

(جـ) ٥×٤×٣×٢×١= ^{٥}ل$_{٥}$ = ٥!

(د) ^{٨}ل$_{٣}$ = ٨×٧×٦ =٣٣٦

(هـ) ٠! = ١

(و) ٢! × ٣! = (٢×١) ×(٣×٢×١) =١٢

(ز) ٤×٣!= ٤ × (٣×٢×١) = ٢٤

....

مثال(٤) اختير ٥طلاب للجنة الرياضية بفصلك على ان يتم اختيار رئيس ونائب رئيس ومقرر لهذه اللجنة من الطلاب الخمس فبكم طريقة يتم اختيار المرشحون للمناصب الثلاث

الحل:

عدد الطرق ^{٥}ل$_{٣}$ = ٥×٤×٣= ٦٠

....

التوافيق : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (م≤ ن) حيث ترتيب العناصر غير مهم سنرمز له برمز التوفيقة ($^{ن}ق_{م}$) وتكتب على الصورة:

$$^{ن}ق_{م} = \frac{^{ن}ل_{م}}{م\,!}$$

$$= \frac{^{ن}ل_{م}}{م\,! \times (ن-م)!}$$

....

مثال(٥) اوجد ما يساويه كل من

(أ) $^{٨}ق_{٨} = \frac{^{٨}ل_{٨}}{٨\,!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧\times٨}{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧\times٨} = ١$

(ب) $^{٨}ق_{٥} = \frac{^{٨}ل_{٥}}{٥!} = \frac{٤\times٥\times٦\times٧\times٨}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ٥٦$

(جـ) $^{٧}ق_{١} = \frac{^{٧}ل_{١}}{١!} = ٧$

....

مثال(٦)

كم عددا مكون من اربعة ارقام يمكن تكوينه من ١ الى ٥ اذا كان :

(ا) يمكن تكرار الارقام = $٥\times٥\times٥\times٥ = ٦٢٥$

(ب) لا يمكن تكرار الارقام= $^{٥}ل_{٤} = ٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ١٢٠$

....

مثال(٧)

في مزرعة ارانب يلزم وضع ٦ ارانب في ٦ اقفاص بكم طريقى يمكن عمل ذلك بحيث يكون ارنب واحد في كل قفص

الحل: $٦! = ٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ٧٢٠$

....

مثال(٨)

اتخذ خالد ٤ ارقام سرية لفتح الحاسوب اذا كان اختياره لارقام مختلفة من ١ الى ٦ فاوجد عدد الطرائق المختلفة في اختيار ذلك الرقم السري

الحل: ^{٦}ل $_{٤}$= ٦×٥×٤×٣ = ٣٦٠

....

مثال(٩)

كم عدد الطرائق التي يمكن ان يتم بواسطتها اختيار طالبين مع مراعاة الترتيب او ان يكون واحدا تلو الاخر من ٨ طلاب؟

الحل:

^{٨}ل $_{٢}$ = ٨×٧ =٥٦

....

مثال(١٠)

تالفت لجنة من ٤ طلاب في الصف الثامن البالغ عدده ٢٨ طالبا بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٤ طلاب مؤلفة من : رئيس ، نائب رئيس، امين سر ، امين صندوق؟

الحل:

٢٨ ×٢٧×٢٦×٢٥

....

مثال(١١)

عشرة من المخبرين السريين طلب رئيسهم ارسال اثنين منهم للقبض على احد المشتبه فيهم ما عدد الطرائق المختلفة لارسال اثنين منهم لانجاز هذه المهمة ؟

الحل:

^{١٠}ل $_{٢}$ = ١٠ ×٩ =٩٠

الدرس الثاني: فضاء العينة

ان مجموعة كل النواتج الممكنة عند اجراء تجربة عشوائية تسمى فضاء العينة (ف)

مثال(١)

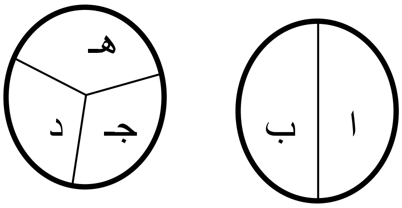
اكتب فضاء العينة لتجربة القاء حجر نرد ثم قطعة نقود

الحل: { ص ، ك } ، { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ف = { (ص،١)،(ص،٢)،(ص،٣)،(ص،٤) ،(ص،٥) ،(ص،٦) ،(ك،١) ،(ك،٢) ،(ك،٣) ،(ك،٤) ،(ك،٥) ،(ك،٦) }

....

مثال (٢) تم تدوير الداورتين المقابلتين معا اكتب فضاء العينة وحدد عدد النواتج الممكنة



الحل:

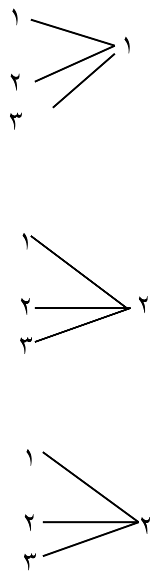
ف = { (ا ، هـ) ،،(ا،هـ) (ا،جـ) ،(ب،هـ) ،(ب،جـ) ،(ب،د)}

....

مثال(٣)

اختار جاسم الارقام التالية ١،٢،٣ ارسم مخطط الشجرة البيانية لتبين كل الاعداد المؤلفة من رقمين مختلفين التي تختارها من بين هذه الارقام

الحل:



مثال (٣)

يمكنك ان تختار شطيرة من بين ثلاثة انواع من الشطائر (دجاج ، لحم ، سمك) للغداء وعصيرا من بين ثلاثة انواع من العصير (برتقال ، مانجو، فراولة)

اكتب فضاء العينة ثم اوجد عدد الطرائق الممكنة التي يمكن ان تحصل عليها

الحل:

ف = {(دجاج ، برتقال) ،(دجاج ، مانجو) ،(دجاج ، فراولة) ،(لحم ، برتقال) ،(لحم،مانجو) ،(لحم ، فراولة) ،(سمك، مانجو) ،(سمك ، فراولة) ،(سمك ، برتقال) }

عدد الطرق = ٣× ٣ = ٩

....

مثال(٤) صندوق فيه ثلاث كرات الوانها هي الاحمر(ح)،البرتقالي(ب) ، الازرق(ز) اذا سحبت من الصندوق كرة عشوائيا ثم اعدتها وسحبت كرة مرة اخرى عشوائيا

اكمل لكتابة فضاء العينة (ف)

الكرة	ح	ب	ز
ح	(ح،ح)	(ح،ب)	(ح،ز)
ب	(ب،ح)	(ب،ب)	(ب،ز)
ز	(ز،ح)	(ز،ب)	(ز،ز)

....

مثال(٥)

اي الاحداث التالية (مؤكد – مستحيل – بسيط - مركب)

(ا) سحبت كرتين الاولى حمراء والاخرى برتقالية اللون بسيط

(ب) سحبت كرة حمراء اللون وكرة حمراء بسيط

(جـ) سحبت كرة برتقالية اللون وكرة صفراء مستحيل

(د) سحبت كرتين من اللون نفسه مركب

(هـ) سحبت كرة حمراء اللون وكرة سوداء اللون مستحيل

الدرس الثالث : الاحتمال

ان احتمال وقوع حدث ما يقارن ما يقارن عدد الطرائق التي يمكن ان يمكن ان يقع فيها هذا الحدث بعدد النواتج الممكنة بحيث يعبر عن الاحتمال بكسر اعتيادي كالتالي :

احتمال وقوع (حدث ا) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث ا}}{\text{عددعناصر فضاء العينة ف}}$ ⟸ ل(ا) = $\frac{\text{عدد عناصر ا}}{\text{عددعناصر ف}}$

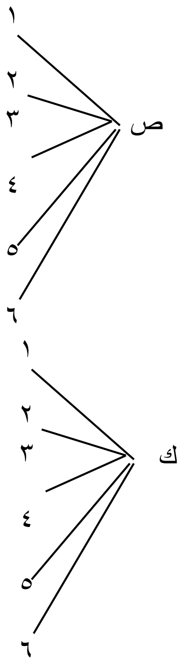
يرمز لاحتمال وقوع الحدث بالرمز ل

ملاحظات:

(١) احتمال فضاء العينة (الحدث المؤكد) = ١ اي ان ل (ف) = ١

(٢) احتمال الحدث المستحيل = صفر ل (Φ) = ٠

مثال (١) اذا تم رمي قطعة نقود معدنية وحجر نرد معا مرة واحدة



(١)اكمل مخطط الشجرة واكتب فضاء العينة

ف ={ (ص ، ١)، (ص ، ٢)، (ص ، ٣)، (ص ، ٤)، (ص ،٥)، (ص ، ٦)،

(ك، ١)، (ك، ٢)، (ك، ٣)، (ك، ٤)، (ك، ٥)، (ك، ٦)،}

(ب) نفرض ان ج حدث ظهور صورة وعدد زوجي

ج = { (ص، ٢)، (ص،٤) ،(ص،٦) }

عدد عناصر ج = ٣ عدد عناصر ف = ١٢

احتمال ظهور صورة وعدد زوجي = $\frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عددعناصر ف}}$ = $\frac{٣}{١٢}$

....

متال(٢) صندوق فيه ٩ كرات متماثلة تماما مرقمة من ١ الي ٩ سحبت كرة عشوائيا من الصندوق اوجد احتمال كل من الاحداث التالية:

(١) ا " ظهور عدد اصغر من ٤ " ن(ا) = ٣ ، ن(ف) =٩

ل(ا) = $\frac{\text{ن(ا)}}{\text{ن(ف)}}$ = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

(٢) ب " ظهور عدد فردي " ن(ب) = ٥

ل (ب) = $\frac{٥}{٩}$

(٣) جـ" ظهور عدد اصغر من ٤ اوظهور عدد فردي " جـ= { ١ ، ٢، ٣ ، ٥ ، ٧، ٩ }

ل (جـ) = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثال(٣) في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على وجهه اوجد احتمال كل من الاحداث التالية :

(ا) ظهور عدد زوجي = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(ب) ظهور عدد اولي = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(جـ) ظهور عدد اكبر من ٧ = $\frac{٠}{٦}$ = ٠

(د) ظهور عدد اصغر من ٦ = $\frac{٥}{٦}$

....

مثال(٤)

ثلاث بطاقات مرقمة بالارقام ١،٤,٧ في كيس ورقي سحبت بطاقة واحدة بطريقة عشوائية ثم اعيدت وسحبت بطاقة مرة اخرى

(ا) اكتب فضاء العينة

ف= { (١، ١) ،(١، ٤) ، (١ ، ٧) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٤) ،(٤ ، ٧)، (٧ ، ١) ،(٧ ، ٤) ، (٧ ، ٧)}

(ب) اكتب حدث ظهور عدد اولي في السحبة الاولى وعدد زوجي في السحبةالثانية

{ (٧ ، ٤) }

(جـ) احتمال ظهور عدد اولي في السحبة الاولى وعدد زوجي في السحبة الثانية

ل = $\frac{١}{٩}$

....

مثال(٥) القى سامي حجر نرد منتظما رميتين متتاليتين اوجد احتمال ظهور العدد ٦ الرمية الاولى والعدد ١ في الرمية الثانية

ل = $\frac{١}{٣٦}$

مثال (٦) في تجربة رمي قطعة نقود منظمة مرتين اوجد احتمال كل من الاحداث التالية:

(١) ا " ظهور صورة في الرمية الاولي " ن(ا) = ٢

ل = $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٢) ب " ظهور كتابة في الرمية الثانية "

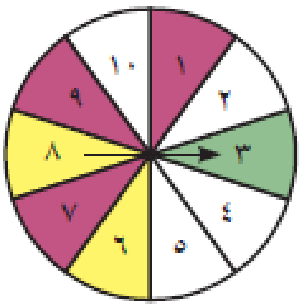
ل (ب) = $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٣) ج " ظهور صورة في الرمية الاولى او ظهور كتابة في الرمية الثانية "

ج ={ (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك) }

ل(ج) = $\frac{٣}{٤}$

مثال(٧) عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة اوجد احتمال وقوف المؤشر عند كل من



(ا) احتمال الحصول على (الرقم ١ او اصغر من ٨)

ل = $\frac{٧}{١٠}$

(٢) احتمال الحصول على (مضاعف للعدد ٢ اوعدد يقبل القسمة على ٤)

ل = $\frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$