أوراق العمل

الصف الحادي عشر علمي

الفترة الدراسية الثانية

مـادة الريـاضيـات

٢٠٢٣/٢٠٢٢

الإسم :

W.R.E

Complex Numbers

Imaginary

الوحدة التخيلية : هي العدد الذي مربعه (-1) و يرمز له بالرمز $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{i}^2 = -1$

- الأعداد التخيلية : لأي عدد حقيقي موجب m، $\Longleftarrow$ $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,\mathrm{i}$
- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in R^*$ أعداد تخيلية

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة و السالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكون مجموعة الاعداد التخيلية

كتاب الطالب حاول أن صـ 13 رقم 1 : بسط كلا مما يلي مستخدما الوحدة التخيلية $\boldsymbol{i}$

c $\sqrt{-36}$	b $-\sqrt{-8}$	a $\sqrt{-2}$

تعريف العدد المركب : هو عدد على الصورة $z = a + b\,i$ حيث a ، b عددان حقيقيان ، $\boldsymbol{i}$ الوحدة التخيلية

و يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + b\,i$ و تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب

حيث a الجزء الحقيقي Real Part ، حيث b الجزء التخيلي Imaginary Part

و يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

$z = a + b\,i$

$\downarrow$ الجزء الحقيقي $\downarrow$ الجزء التخيلي

لاحظ :

و إذا كان $b = 0$ فإن $z = a$ يسمى عددا حقيقيا

و إذا كان $z = b\,i$ عددا تخيليا فإن $a = 0$

أكمل الجدول :

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	$2 + 3\,i$
-5	4	
		$i - 1$
		7
-1	0	

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 2 : أكتب كلا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية :

a $\sqrt{-18}+7$

b $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$

c $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

- كل عدد حقيقي هو عدد مركب . $a = a + 0\,i$
- مجموعة الأعداد الحقيقية و مجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة .

المخطط التالي يوضح ذلك

الأعداد المركبة

الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية

$\frac{4}{7}$ ، 0.3

الأعداد الصحيحة

-1,2,-3

الأعداد الكلية

0,1,2,3,7

الأعداد الغيرنسبية

$-\sqrt{2}$ ، e ، π

الأعداد التخيلية

$-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$

$2\,\boldsymbol{i}$

تساوي عددين مركبين

يتساوي عددان مركبان إذا و فقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان و تساوى جزءاهما التخيليان و ليكن :

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ ، } z_2 = a_2 + b_2\, i$$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ، } b_1 = b_2$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 15 رقم 3 : أوجد قيم كل من $x،y \in R$ في كل مما يأتي

a $x + 5\,i = 7 - 3y\, i$

b $(x+3) + y^2\, \mathrm{i} = 5 - y\, i$

c $3\, i = 2x - 5y\, i$

ملحوظة : إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر و جزءه التخيلي يساوي الصفر

$x + y\,i \; = \; 0 \Longrightarrow x \; = \; 0 \;،\; y = 0$

التمثيل البياني لعدد مركب :

يمكن وضع العدد المركب $z = a + b\,i$ على صورة الزوج المرتب (a, b)

حيث : الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي و الإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي

$z = a + b\,i \longleftrightarrow M\,(a, b)$

الصورة الجبرية الصورة الديكارتية

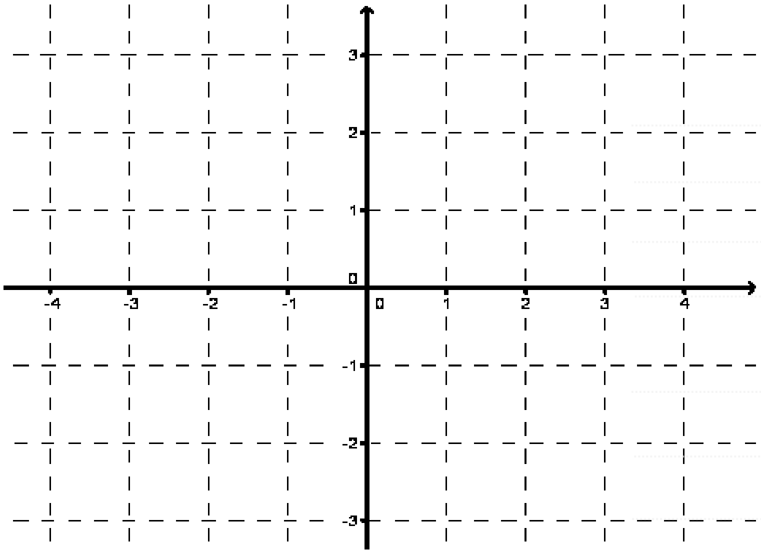
كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عدد مركبا ، و كل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي
في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي المستوى المركب (مستوى أرجاند)
و يسمى محور السينات بالمحور الحقيقي ، و يسمى محور الصادات بالمحور التخيلي .

كتاب الطالب مثال صـ 17 رقم 4 :

مثل كلا مما يلي في المستوى المركب :

a $z_1 = 3 + 2\,i$ b $z_2 = -1$

c $z_3 = -i - 2$ d $z_4 = i$



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 16 رقم 5 :

أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية : k(-7, 0) , H(1 ,-2) , N(-4 , 1)

جمع و طرح الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة

أولا جمع و طرح الأعداد المركبة : في الجمع نجمع جزءيهما الحقيقين معا و نجمع جزءيهما التخيلين معا
كذلك في الطرح نطرح جزءيهما الحقيقين معا و نطرح جزءيهما التخيلين معا

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$ ، $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي :

الخاصية	$\forall\, z_1 ، z_2 ، z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 :

إذا كان $z_1 = -2 + 5i$ ، $z_2 = 3.4 - 1.2i$ ، $z_3 = -0.3i$ فأوجد :

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_2 - z_1$ (c) $z_3 - z_2 - z_1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 :

إذا كان $z_1 = 2 + 3i$ ، $z_2 = 4 - i$ ، $z_3 = 2i$ فأوجد :

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 - z_2$ (c) $z_3 + z_2 + z_1$

ملاحظات :

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $0 = 0 + 0i$
- المعكوس الجمعي للعدد المكب $z = a + b\,i$ هو العدد المركب $-z = -a - b\,i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرا فإن كلا منهما معكوس جمعي للأخر و العكس صحيح

$$z_1 + z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = -z_2$$

لإيجاد ناتج طرح $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لـ z_2 إلى z_1 أي أن

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ثانيا ضرب الأعداد المركبة

خواص عملية ضرب الأعداد المركبة :

الخاصية	$\forall z_1 , z_2 . z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة ($1 = 1 - 0i$)

لضرب عدديين يمكن إستخدام $\boldsymbol{i^2 = -1}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 19 رقم 7 : أوجد ناتج

(a) $(6 - 5i)(4 - 3i)$

(c) $(12i)(7i)(i + 1)$

قاعدة الضرب : $\forall z_1 . z_2 \in \mathbb{C}$. $c \in R$

حيث $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_1 = a_1 + b_1 i$

يبرهن كسؤال عادي ① $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$

برهان الحالة الثانية مطلوب ② $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 20 رقم 8 :

إذا كان $z_2 = 1 + 4i$, $z_1 = 2 - 3i$ فأوجد

(b) $z_1 . z_2$

(a) $\frac{1}{2} z_1$

ضرب و قسمة الأعداد المركبة

قوى العدد المركب (i) كما يلي :

إذا كان P عدد كلي فإن :

$$\boxed{i^{4P} = 1 \quad . \quad i^{4P+1} = i \quad . \quad i^{4P+2} = -1 \quad . \quad i^{4P+3} = -i}$$

فمثلا :

$i^{15} = i^{4\times3+3} = -i$ $i^{2013} = i^{4\times503+1} = i$ $i^{29} = i^{4\times7+1} = i$

تدريب : $i^{101} =$ $i^{82} =$ $i^{59} =$ $i^{444} =$

كتاب الطالب مثال صـ 20 رقم 9 :

إذا كان $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \quad , \quad z_2 = -2i \quad , \quad z_1 = i$

أوجد

b) ${z_3}^2$

a) ${z_1}^{21}$

c) ${z_2}^6$

ثالثا قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب :

مرافق العدد المركب $z = a + b\,i$ هو العدد المركب $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - b\,i$

ملاحظة :

لإيجاد مرافق العدد المركب يجب أن يكون العدد المركب على الصورة الجبرية $z = a + b\,i$ حيث $a \cdot b \in R\ \forall$

خواص مرافق العدد المركب :

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن

- $\overline{(\bar{z_1})} = z_1$
- $\overline{z_1\ z_2} = \bar{z_1}\ \bar{z_2}$
- $z_1 + \bar{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \bar{z_1} = 2b_1$
- $z_1\ \bar{z_1} = {a_1}^2 + {b_1}^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$

تابع ضرب و قسمة الأعداد المركبة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 10 :

إذا كان $z_2 = 3+5i$ ، $z_1 = 2-7i$ فأوجد :

ⓓ $\overline{z_1} \, . \, \overline{z_2}$

ⓒ $\overline{(z_1 \, . \, z_2)}$

ⓑ $\overline{(z_1 - z_2)}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + b\,i$ هو z^{-1}

أي أن :

$$\mathbf{z^{-1}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2 + \mathbf{b}^2} - \frac{\mathbf{b}}{\boldsymbol{a}^2 + \mathbf{b}^2}\boldsymbol{i} \Longleftarrow \mathbf{z^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}+\mathbf{b}\,\boldsymbol{i}} \times \frac{\boldsymbol{a}-\mathbf{b}\,\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{a}-\mathbf{b}\,\boldsymbol{i}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 11 : أوجد المعكوس الضربي لكل من :

ⓒ $z_3 = 6i$

ⓐ $z_1 = -3i - 7$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 24 رقم 12 :

أوجد ناتج قسمة $6i - 3$ على $1 + 2i$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 24 رقم 13 :

أكتب كلا من مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب :

a $\dfrac{3+i}{2+5i}$

b $\dfrac{2-i}{2+i}$

تمرين :

c $\dfrac{2}{3-i}$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 22 : بسط ما يلي : $\left(-2+\sqrt{-9}\right)\left(6+\sqrt{-25}\right)$

كراسة التمارين صـ 10 رقم 26 : إذا كان $z=\dfrac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ — (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\overline{z}=-3-4i$ — (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ — (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ — (a) (b)

في التمارين (5—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

ⓐ $18+17i$ ⓑ $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

ⓒ $6+17i$ ⓓ 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

ⓐ $z=-3+4i$ ⓑ $z=5+4i$ ⓒ $z=-3$ ⓓ $z=5$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\dfrac{i}{i+2}$ هي:

ⓐ $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ ⓑ $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

ⓒ $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ⓓ $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

ⓐ $-i$ ⓑ i ⓒ 1 ⓓ -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

ⓐ $\mathbb{Z}^+$ ⓑ $\{0,2,4,6,...\}$ ⓒ $\{1,3,5,...\}$ ⓓ $\{2,4,6,...\}$

كراسة التمارين صـ ١٠ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب :

هي المسافة بين بين النقطة التي تمثل هذا العدد المركب و نقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب

$z = a + b\,i \longrightarrow |z| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 26 رقم 1 : أوجد

ⓑ $|-2 + 5\,i|$

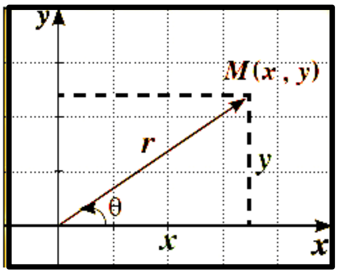
ⓐ $|6 - 4\,i|$

الإحداثيات القطبية :

يمثل الزوج المرتب $(r.\theta)$ الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب

و يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية باستخدام

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 27 رقم 2 :

أوجد الزوج المرتب $(x.y)$ الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين :

ⓑ $B\left(2\,,\dfrac{2\pi}{3}\right)$

ⓐ $A(5,300)$

تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

و يمكن التحويل من الإحداثيات الديكارتية $(x.y)$ إلى الإحداثيات القطبية $(r.\theta)$

باستخدام $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد $\propto$ باستخدام $\tan \propto = \left|\frac{y}{x}\right|$

ثم نحدد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كل من x, y و نوجدها

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 28 رقم 3 :

أوجد الزوج المرتب $(r.\theta)$ لكل من نقطة مما يلي حيث $0 \le \theta < 2\pi$

(b) $C(4.-2\sqrt{5})$

(a) $D(3\sqrt{3}, 3)$

<u>الصورة المثلثية</u>

يمكن كتابة العدد المركب $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ على الصورة :

$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta\,)$ و تعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z

و يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة و يرمز له $|z|$ و يتعين بالعلاقة $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ سعة العدد المركب و تتعين من $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r}$

أو من $x \ne 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ و تحديد الربع

<u>ملاحظة :</u> الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة ، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$

فإن كلا مما يلي سعة للعدد نفسه : $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi\ \ldots\ldots\ \theta + 2\pi k\ :\ k \in Z$

و إذا كانت $\theta \in [0.2\pi)$ أو $0 \le \theta < 360$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 28 رقم 4 :

ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية :

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

كتاب الطالب مثال صـ 28 رقم 4 :

ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية :

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$

b $z_2 = -2 - 2\, i$

c $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 31 رقم 6 : ضع كلا مما يلي في الصورة الجبرية :

ⓐ $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ⓑ $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

<u>الصورة المثلثية في حلات خاصة :</u>

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على خط الأعداد على المحور الأفقي (محور السينات) .
وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على على المحور التخيلي (محور الصادات)

العدد	المقياس	سعة (الراديان)
a	a	0
$-a$	$\|-a\| = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\|-b\| = b$	$\frac{3\pi}{2}$

<u>ملاحظة</u> : إذا كان $Z = 0$ فإن : θ غير معينة . $r = 0$. $y = 0$. $x = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 32 رقم 7 :

ضع في الصورة المثلثية كلا من الأعداد التالية

ⓐ $z_1 = 2i$

ⓑ $z_2 = 5$

ⓒ $z_3 = \frac{-3}{4}$

ⓓ $z_4 = -\frac{3}{4}\,i$

صـ 13

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ — (a) (b)

في التمارين (7–13)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ⓑ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓒ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ⓓ $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓑ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ⓓ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

ⓐ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

ⓑ $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓒ $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓓ $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

ⓐ $35 - 12i$ ⓑ $35 + 12i$ ⓒ $81 - 12i$ ⓓ $81 + 12i$

كراسة التمارين صـ 13 البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

حل معادلات الدرجة الأولى :

نحل معادلات الدرجة الأولي في الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي نحل بها في الأعداد الحقيقية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 33 رقم 1 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كتاب الطالب مثال صـ 34 رقم 2 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 2 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\bar{z} + 1$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

تابع حل المعادلات

ثانيا حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد فى $\mathbb{C}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 3 :

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$

(a) $3x^2 + 48 = 0$

(b) $-5x^2 - 150 = 0$

(c) $8x^2 + 2 = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 4 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

تابع حل المعادلات

كتاب الطالب مثال صـ 35 رقم 4 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 8 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 2x + 4 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 9 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + \frac{4}{z} = 2$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

الجذر التربيعي لعدد مركب :

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب Z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي Z

ليكن $Z = a + bi$ نبحث عن $w = m + ni$ بحيث يكون : $w^2 = Z$

$$(m + ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

إذن $m^2 - n^2 = a$ ، $2mn = b$

للمساعدة في حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$

أي $\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

كتاب الطالب مثال صـ 36 رقم 6 :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = 3 + 4i$

تابع حل المعادلات

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 37 رقم 6 :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

كتاب الطالب مثال صـ 37 رقم 7 :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = 7 - 24i$

تابع حل المعادلات

كراسة التمارين صـ 15 رقم 2 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + 2\bar{z} = 4 + i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 3 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 4 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i,2+i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ (a) (b)

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

كراسة التمارين صـ 16 البنود الموضوعية

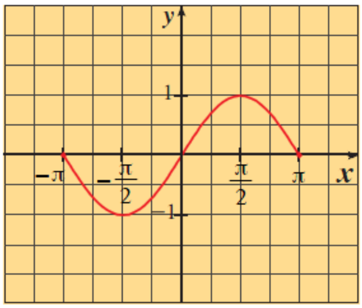
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، الظل)

الدوال الجيبية Sine Functions

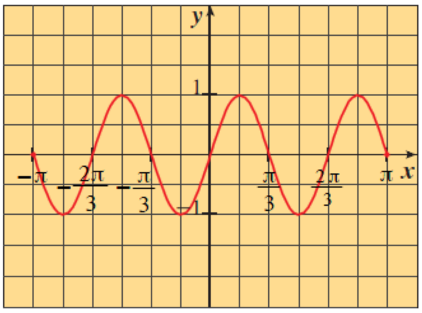
تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ وكل منها دالة دورية.

تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



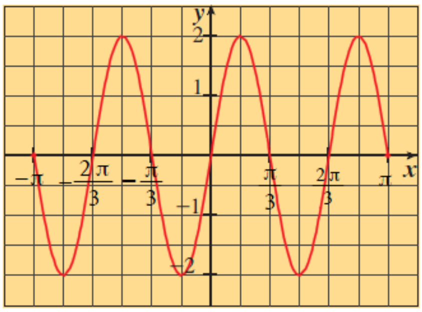
$y = \sin x$

شكل (1)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = 2\sin 3x$

شكل (3)

① تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية. ② $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$ ③ $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 1 : أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

ⓑ $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

ⓐ $y = -2\cos 5x$

كتاب الطالب مثال صـ 45 رقم 1 : أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

ⓑ $y = -5\cos\frac{x}{3}$

ⓐ $y = 2\cos x$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

(b) الدورة هي π ، $a = 0.25$

(c) الدورة هي 2 ، $a = 1$

كتاب الطالب مثال صـ 46 رقم 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

(b) الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

التمثيل البياني لدالة الجيب

التمثيل البياني للدوال المثلثية :

أولا : دالة الجيب

هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، ودالة الجيب هي دالة دورية ذات دورة 2π

للحصول على التمثيل البياني لِـ $y=\sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

$y = sinx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx					

من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x)=-\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 48 رقم 3 :

أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

(a) $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 48 رقم 3 : أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

b $y = -4\sin x \;,\; x \in [-\pi \;,\; 2\pi]$

تابع كتاب الطالب مثال صـ 47 رقم 3 :

أوجد السعة و الدورة للدالة . ثم ارسم بيان الدالة b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \;,\; -4\pi \le x \le 4\pi$

التمثيل البياني لدالة جيب التمام

دالة جيب التمام :

مجال دالة جيب التمام $y=\cos x$، هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π
ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y=\cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0,2\pi]$

$y = cosx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx					

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\pi+2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x)=\cos x \ , \ x\in\mathbb{R}$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $a=\frac{\max f-\min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 49 رقم 4 :

أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

ⓐ $y=3\cos 2x$

تابع التمثيل البياني لدالة جيب التمام

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 49 رقم 4 : أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة:

ⓑ $y=-2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0\le x\le 2\pi$

كتاب الطالب مثال صـ 49 رقم 4 :

أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

ⓑ $y=-5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x\in[-3\pi\ ,\ 3\pi]$

التمثيل البياني لدالة الظل

ثالثا دالة الظل : هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \;:\; \cos x \neq 0$$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \;,\; n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tanx					

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $x \in D \;,\; \tan(-x) = -\tan x$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ وتكرر نفسها في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} \;,\; \frac{\pi}{2b}\right)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 5 : أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة: $y = -\tan x$ ⓐ

تابع التمثيل البياني لدالة الظل

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 5 :

أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

ⓑ $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x , x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)

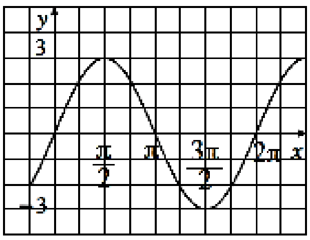
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة.



(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

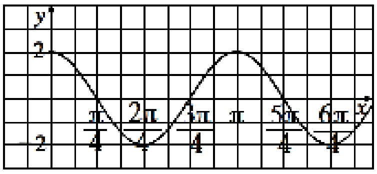
(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) f ليس لها سعة

تابع التمثيل البياني لدالة الظل – البنود الموضوعية

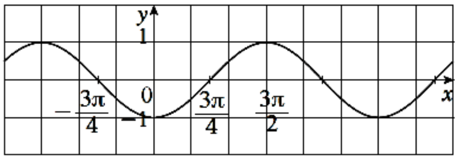
(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

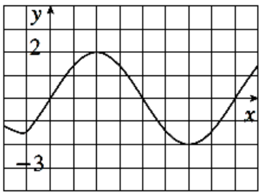
ⓐ $2\cos 2x$ ⓑ $\cos 2x$ ⓒ $\cos \frac{x}{2}$ ⓓ $\sin 2x$

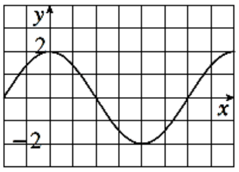
(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

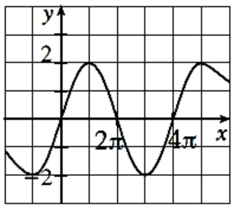


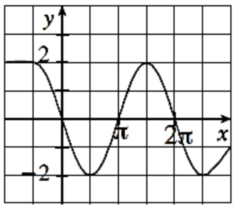
ⓐ π ⓑ 2π ⓒ 3π ⓓ $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a\sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

ⓐ


ⓑ


ⓒ


ⓓ


(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓑ $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$

ⓒ $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓓ $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

كراسة التمارين صـ ٢٠ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

قانون الجيب

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 64 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\alpha=36^\circ\ ,\ \beta=48^\circ\ ,\ a=8\text{ cm}$

كتاب الطالب مثال صـ 64 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\alpha=40^\circ\ ,\ \beta=60^\circ\ ,\ a=4\text{ cm}$

تابع قانون الجيب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 66 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 7\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

كتاب مثال أن تحل صـ 66 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

تابع قانون الجيب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 67 رقم 3 :

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^{\circ}$

كتاب مثال أن تحل صـ 67 رقم 3 :

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^{\circ}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\text{ cm}$ (b) (a)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 16\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (b) (a)

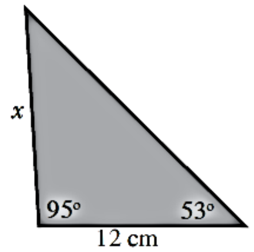
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$ (b) (a)

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^\circ$, $m(\widehat{B}) = 40^\circ$, $AC = 10\text{ cm}$ فإنّ طولي $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $70^\circ, 60^\circ, 50^\circ$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

(a) 11 cm
(b) 11.5 cm
(c) 12 cm
(d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^\circ$, $AC = 23\text{ cm}$, $AB = 19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm
(b) 18 cm
(c) 19 cm
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

كراسة التمارين صـ 26 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9

قانون جيب التمام

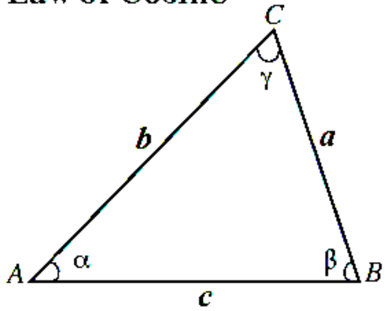
في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Law of Cosine



كتاب الطالب مثال صـ 71 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $a = 2\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $a = 11\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $\gamma = 20^\circ$

تابع قانون جيب التمام

كتاب الطالب مثال صـ 72 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 3\,\text{cm}\ ,\ c = 6\,\text{cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 2 : في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}\ ,\ b = 7\,\text{cm}\ ,\ c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تابع قانون جيب التمام الجيب – البنود الموضوعية

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 19\text{ cm}$, $BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^{\circ}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^{\circ}$, $BC = 44\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4° (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^{\circ}$, $AC = 10\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}\text{ cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\text{ cm}$ (c) $AB = 12.4\text{ cm}$ (d) $AB = 29\text{ cm}$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^{\circ}$, $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\text{ cm}$ (b) $BC \approx 36\text{ cm}$ (c) $BC \approx 68\text{ cm}$ (d) $BC \approx 21\text{ cm}$

(7) إذا كان $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

كراسة التمارين صـ 26 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

مساحة المثلث

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 76 رقم 1 :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\,\text{cm} \;,\; b = 4\,\text{cm} \;,\; c = 3\,\text{cm}$

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 75 رقم 2 :

أوجد مساحة ABC حيث: $a = 4\,\text{cm} \;,\; b = 4\,\text{cm} \;,\; c = 3\,\text{cm}$

تابع مساحة المثلث

كراسة التمارين حاول أن تحل صـ 30 رقم 2 :

أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين. $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ c = 8\,\text{cm}$

كتاب الطالب مثال صـ 76 رقم 2 :

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: $7\,\text{cm}\ ,\ 5\,\text{cm}\ ,\ 8\,\text{cm}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع وθ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\,\text{cm}$, $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$
فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $15\,\text{cm}^2$ (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $a = 2\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $m(\widehat{C}) = 40^\circ$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى:

(a) $4.6\,\text{cm}^2$ (b) $3.86\,\text{cm}^2$

(c) $1.93\,\text{cm}^2$ (d) $2.3\,\text{cm}^2$

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

(a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

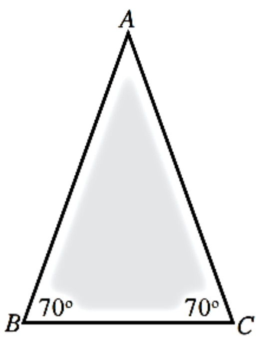
(c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$ (b) $a^2\text{ units}^2$

(c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالى:



(a) 5 cm (b) 8 cm

(c) 4 cm (d) 6 cm

كراسة التمارين صـ 30 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

إثبات صحة متطابقة مثلثية

تذكر ما يلي :

المتطابقات المثلثية الأساسية **Trigonometric Identities**

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 88 رقم 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 2 :

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 89 :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

كتاب الطالب مثال صـ 89 رقم 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

كتاب الطالب مثال صـ 90 رقم 4 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta}=(\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 4 :

أثبت أن: $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كراسة التمارين صـ 36 رقم 5 :

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

كراسة التمارين صـ 36 رقم 5 :

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(5) المقدار: $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$
(b) $\sin x \sec^2 x$
(c) $\cos x \sec^2 x$
(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$
(b) 2
(c) -2
(d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$
(b) $\sec x \sin x$
(c) $\sec x \cos x$
(d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $1 + \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x}$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1

(c) 2 (d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

كراسة التمارين صـ 36 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 93 رقم 1 :

حل المعادلة : $\sqrt{2}\cos x = 1$

كتاب الطالب مثال صـ 93 رقم 1 :

حل المعادلة : $\cos x + \sqrt{3} = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 94 رقم 2 :

حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = sin\,\theta$

كتاب الطالب مثال صـ 94 رقم 2 :

حل المعادلة : $4\sin\theta + 1 = sin\,\theta$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 95 رقم 3 :

حل المعادلة : $\tan x = 1$

كتاب الطالب مثال تحل صـ 95 رقم 3 :

حل المعادلة : $\tan x = \sqrt{3}$

تابع حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 96 رقم 4 :

حل المعادلة : $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta \quad = 0$

كتاب الطالب مثال صـ 96 رقم 4 :

حل المعادلة : $2\cos\theta \quad sin\theta \quad = -sin\theta$

تابع حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 97 رقم 5 :

حل المعادلة : $cos^2\theta + 3cos\theta + 2 = 0$

كتاب الطالب مثال صـ 96 رقم 5 :

حل المعادلة : $4sin^2x - 8sinx + 3 = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}$ هو: $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x=\sqrt{2}$ هو: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x=-\sqrt{3}$ هو: $x=+\frac{5\pi}{6}+k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x\tan^2 x=\sin x$ على الفترة $(0,\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x=1$ على الفترة $[0,2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x+\cos x=0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ على الفترة $[0,2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{7\pi}{6}\,,\ \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos x-2\sin x=-1$ على الفترة $[0,2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{6}\,,\ \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{6}\,,\ \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{3}\,,\ \frac{4\pi}{3}\,,\ \frac{7\pi}{4}$

كراسة التمارين صـ 38 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

متطابقات الدوال المتكافئة :

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 100 رقم 1 :

أثبت أن : $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 100 رقم 2 :

أثبت أن : $csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -sec\ \theta$

كتاب الطالب مثال صـ 101 رقم 2 :

أثبت أن : $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sec\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 101 رقم 2 :

أثبت أن : $sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

متطابقات المجموع و الفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 103 رقم 3 :

أوجد دون استخدام الالة الحاسبة كلا مما يلي :

$a)\ \sin 15$ $\qquad$ $b)\ \cos 75$ $\qquad$ $c)\ \tan 105$

تابع متطابقات المجموع و الفرق

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 104 رقم 4 :

إذا كان :

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$cos\beta = \frac{-12}{13} \quad , \quad \pi > \beta > \frac{3\pi}{2}$$

أوجد كلا مما يلي : $c)\ \sin(\beta - \alpha)$ $\quad b)\ \tan(\alpha + \beta)$ $\quad a)\ \cos(\alpha + \beta)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos(h+\frac{\pi}{2}) = -\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$ (a) (b)

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94°\cos 18°+\sin 94°\sin 18°$ تساوي:

(a) $\cos 112°$ (b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$ (d) $\sin 76°$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

كراسة التمارين صـ 40 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$\boxed{\cos 2\theta = cos^2\theta - \ sin^2\theta}$$

كتاب الطالب مثال صـ 105 رقم 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزواية : $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزواية : $\cos 2\theta = 1 - \ 2sin^2\theta$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1 \\ \cos 2\theta = 1 - \ 2sin^2\theta \end{array}}$$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 2:

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 2 :

إذا كان $sin\, x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

$$\sin 2\theta = 2sin\theta \ cos\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 3 :

إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. $sin\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ فأوجد $sin\,2\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 3 :

إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $cos\,\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $sin\,2\theta$

$$tan2\,\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 4 :

إذا كان : $\tan\theta = \sqrt{3}$ استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

تابع متطابقات ضعف الزاوية

كتاب الطالب مثال صـ 107 رقم 5:

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 2\theta = \frac{1- tan^2\theta}{1+ tan^2\theta}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 5 :

أثبت صحة المتطابقة : $2cos\, 2\theta = 4\, cos^2\theta - 2$

تابع متطابقات ضعف الزاوية

كتاب الطالب مثال صـ 108 رقم 6 :

أثبت صحة المتطابقة : $cos\ 3\theta = 4\ cos^3\theta - 3\cos\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 108 رقم 6 :

أثبت صحة المتطابقة : $sin\ 3\theta = 3sin\theta - 4\ sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 109 رقم 7 :

إستخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15$

كتاب الطالب مثال صـ 109 رقم 8 :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$, $\sin\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$

تابع متطابقات نصف الزاوية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 109 رقم 8 :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$. $sin\ \theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\tan\frac{\theta}{2}$. $cos\frac{\theta}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ — (a) (b)

(2) $\sin 4x = -4\cos x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin x$ — (a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ — (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ — (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ — (a) (b)

في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$

(b) $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$

(d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$

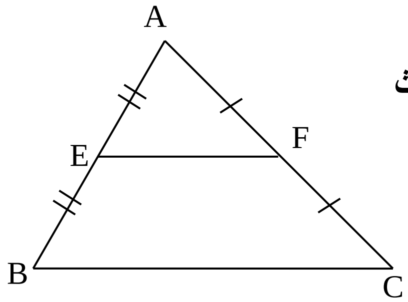
(d) $\frac{3}{5}$

كراسة التمارين صـ 43 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8

حقائق ونظريات هندسية سابقة

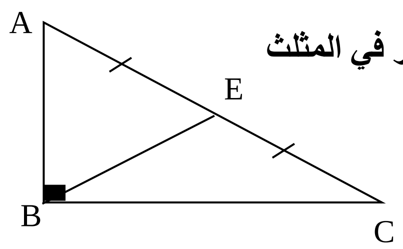
نظريات في المثلث:



١) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله .

$\because$ E منتصف $\overline{AB}$, F منتصف $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $EF = \frac{1}{2}\ BC$



٢) طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث قائم الزاوية تساوي نصف طول الوتر .

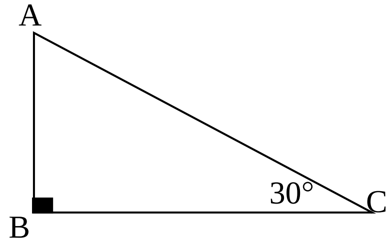
$\because$ E منتصف $\overline{AC}$

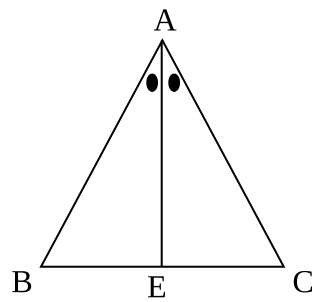
$\therefore$ $BE = \frac{1}{2}\ AC$

3) في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ° 30 مساوياً نصف طول الوتر .

$\because$ المثلث ABC ثلاثيني ستيني

$\therefore$ $AB = \frac{1}{2}\ AC$





4) في المثلث المتطابق الضلعين:

a) زاويتا القاعدة متطابقتان . $m(\hat{B}) = m(\hat{C})$

b) منصف زاوية الرأس عمودي على القاعدة وينصفها $\overline{AE} \perp \overline{BC}$

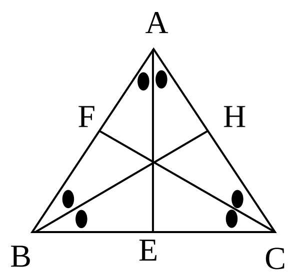
٥) في المثلث المتطابق الأضلاع:

a) زواياه متطابقة وقياس كل منها °60. $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60°$

b) منصف زاوية أي رأس عمودي على القاعدة وينصفها

$\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, $\overline{CF} \perp \overline{AB}$

c) إذا كان طول ضلعه ℓ فإن طول ارتفاعه = $\frac{\sqrt{3}\,\ell}{2}$

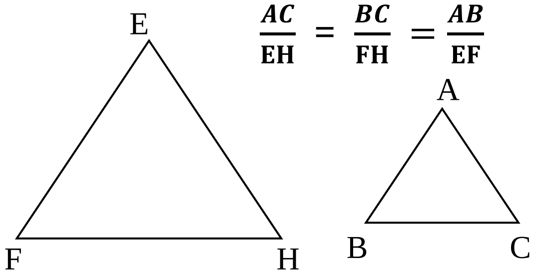


6) **<u>تشابه المثلثات</u>: a) يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحدهما مع نظائرها في المثلث الآخر.**

b) يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع نظيرتها في المثلث الآخر وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EH} \quad , \quad m(\widehat{A}) = m(\widehat{E})$$

c) يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة . $\frac{AC}{EH} = \frac{BC}{FH} = \frac{AB}{EF}$



7) **<u>تطابق المثلثات</u>: a) يتطابق مثلثان إذا تطابقت أضلاعهما المتناظرة (ض ، ض ، ض) .**

b) يتطابق مثلثان إذا تطابق في أحدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما مع نظائرها في المثلث الآخر. (ض ، ز ، ض) .

c) يتطابق مثلثان إذا تطابق في أحدهما زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما مع نظائرها في المثلث الآخر (ز ، ض ، ز) .

<u>متوازي الأضلاع</u>: هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .

<u>خواصه</u> : ١) كل ضلعين متقابلين متطابقين ٢) كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

٣) كل زاويتين متتاليتين مجموع قياسهما ١٨٠° ٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

<u>يكون الشكل الرباعي متوازي الأضلاع</u>: <u>إذا</u> :

١) كان فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين ٢) كان فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

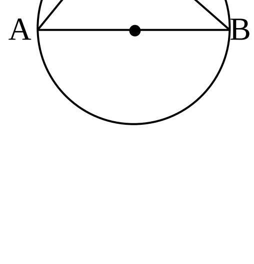
٣) توازى وتطابق فيه ضلعان متقابلان ٤) توازى فيه كل ضلعين متقابلين

٥) ينصف القطران كل منهما الآخر .

<u>الدائرة</u>: في الدائرة قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة يساوي ٩٠° .

$\because$ $\widehat{ACB}$ **زاوية محيطية مرسومة على القطر** $\overline{AB}$

$\therefore$ $m(\widehat{ACB}) = 90°$

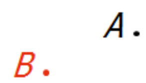


.

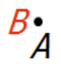
المستقيمات و المستويات في الفضاء

علاقة نقطة بنقطة في الفضاء

النقطتان مختلفتان

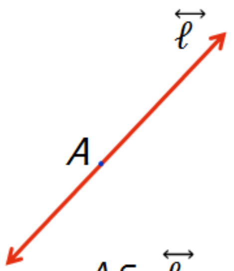


النقطتان منطبقان



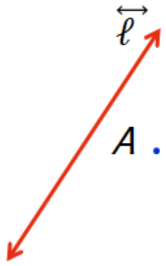
علاقة نقطة بنقطة بمستقيم

النقطة $\in$ المستقيم



$A \in \overleftrightarrow{\ell}$

النقطة $\notin$ المستقيم



$A \notin \overleftrightarrow{\ell}$

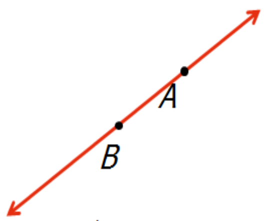
مسلمات (موضوعات) الفضاء

المسلمة (الموضوعة)

هي عبارة أولية (رياضية) نسلم بصحتها (نقبلها) دون برهان .

a

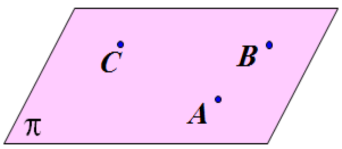
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط)



(ii) كل مستقيم في الفضاء يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين

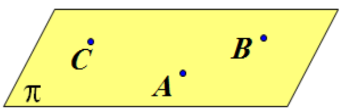
b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة



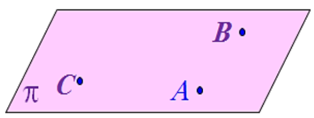
A , B , C ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة

(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة و ليست على إستقامة واحدة يحويها مستو واحد

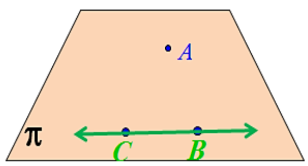


حالات تعيين المستوي فى الفضاء

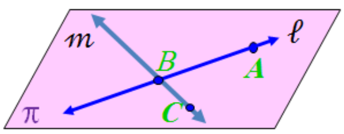
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على إستقامة واحدة تعين مستويا واحدا فقط



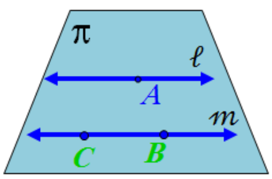
- أي مستقيم و نقطة خارجة عنه يعينان مستويا وحيدا فقط



- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا واحدا فقط

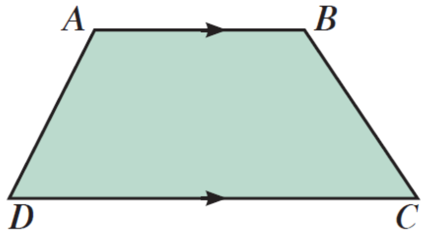


- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويا واحدا فقط



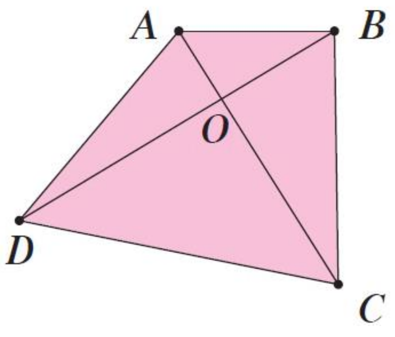
كتاب الطالب مثال صـ 119 رقم 1 :

أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعا في مستو واحد



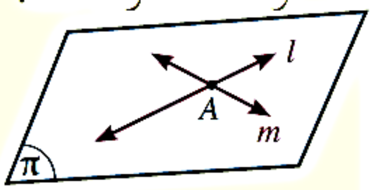
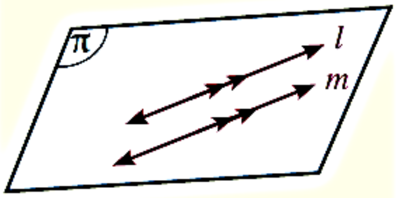
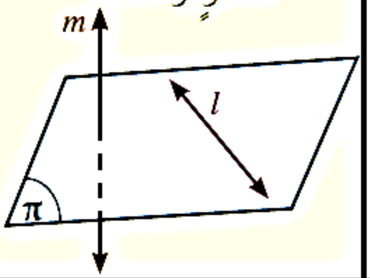
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 119 رقم 1 :

في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.



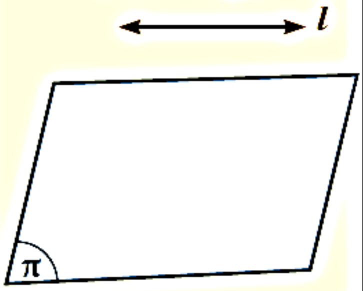
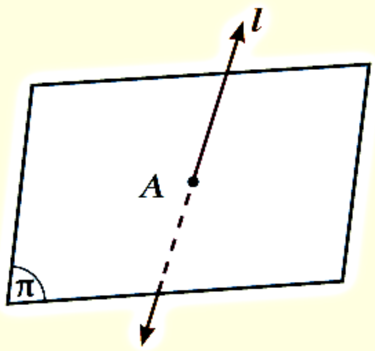
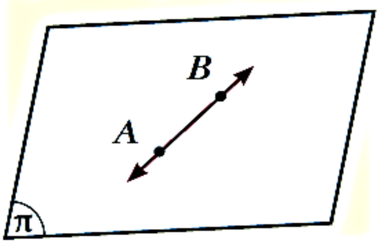
الأوضاع المختلفة لمستقيمان في الفضاء

يقال لمستقيمين مختلفين بالفضاء أنهما :

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعافي مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط.  	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.  	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \; , \; \overleftrightarrow{m} \subset \pi \; ,$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \,/\!/\, \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \; , \; m \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

أوضاع مستقيم و مستوي في الفضاء

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم و مستوي تسمح لنا

a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت).  	المستقيم يقطع المستوي.  	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \,/\!/\, \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \; \overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \pi$

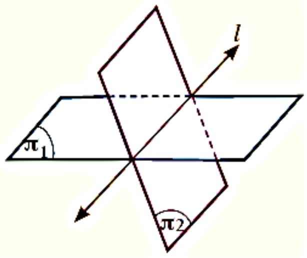
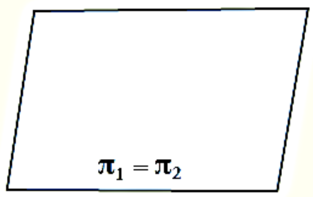
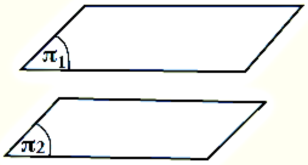
أوضاع مستويين في الفضاء

إذا إشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم

إذا إشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة و ليست على إستقامة واحدة يكون المستويان منطبقين

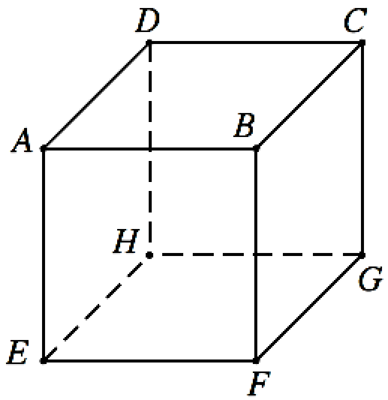
و يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات :

a المستويان متقاطعان في مستقيم. 	b المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان AB, HG يعينان مستويًا. (a) (b)

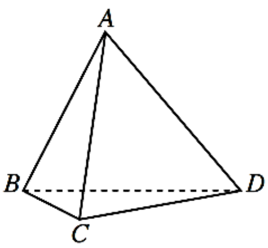
(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا. (a) (b)

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا. (a) (b)

(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا. (a) (b)

(5) المستقيمان BC, AB يعينان مستويًا. (a) (b)

في التمرينين (6—7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

(a) مستويًا واحدًا (b) مستويين مختلفين

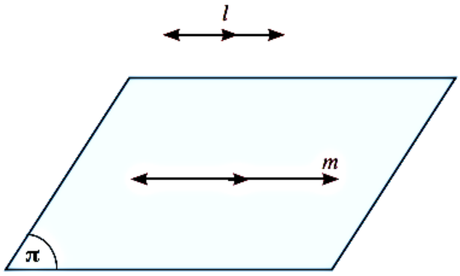
(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة (d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

كراسة التمارين صـ ٤٩ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7

نظرية (1)

إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي

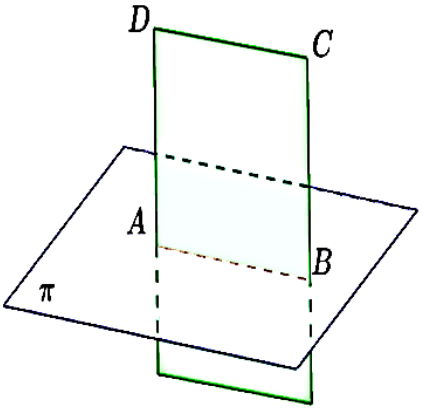


$\overleftrightarrow{l}$ خارج المستوي π.

$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$

كتاب الطالب مثال صـ 125 رقم 1 :



في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

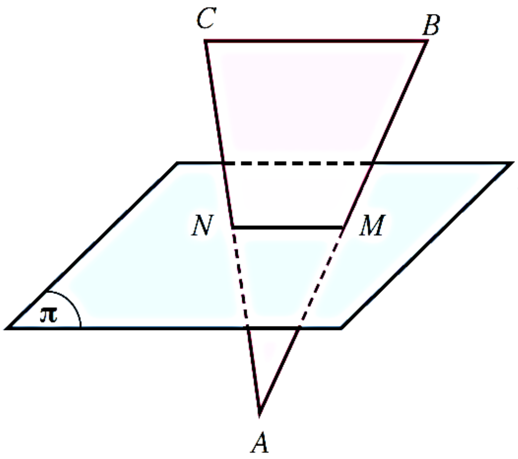
أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 125 رقم 1 :

في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،

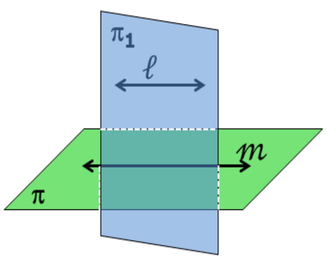
M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\pi \,//\, \overleftrightarrow{BC}$.



نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويا ، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوى ، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

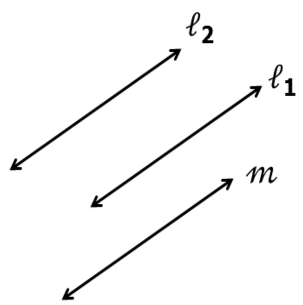


$\because\ \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \pi$ ، $\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{\ell}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيا



$\because\ \overleftrightarrow{\ell_1} \,//\, \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{\ell_2} \,//\, \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{\ell_1} \,//\, \overleftrightarrow{\ell_2}$

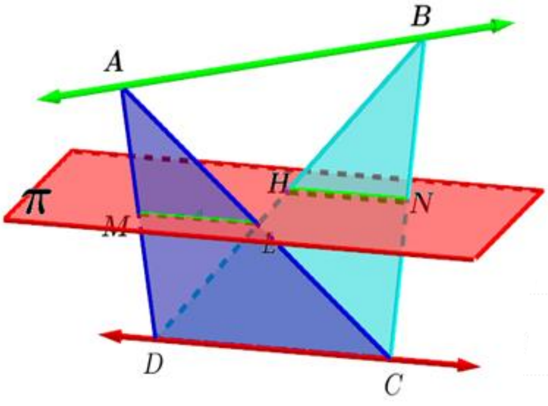
كتاب الطالب مثال صـ 126 رقم 2 :

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متخالفان، $\pi \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

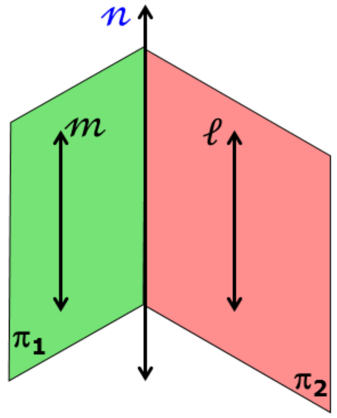
$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$



نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ، فإن
تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين

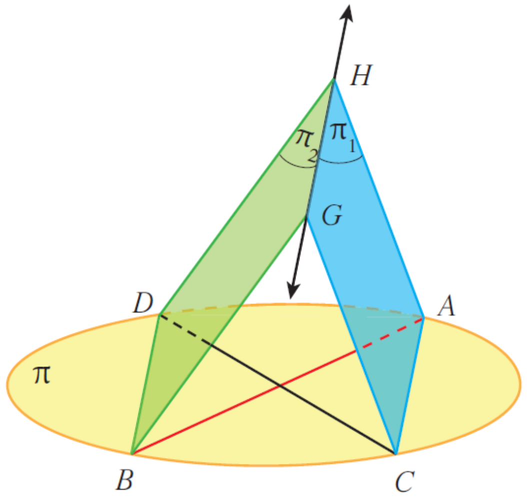


$\overleftrightarrow{\ell} \, // \overleftrightarrow{m} \quad , \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 , \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2 , \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} // \overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$

8

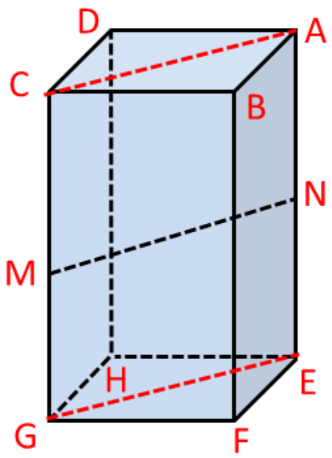
كتاب الطالب مثال صـ 127 رقم 3 :



في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

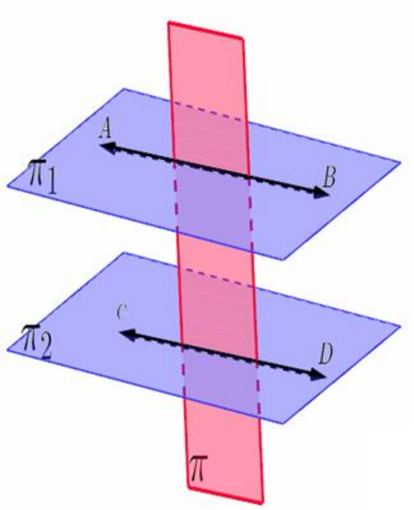


كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 127 رقم 3 :

$ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.



نظرية (4)

إذا قطع مستو مستويين متوازيين

فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين

$\pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD}$

تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء

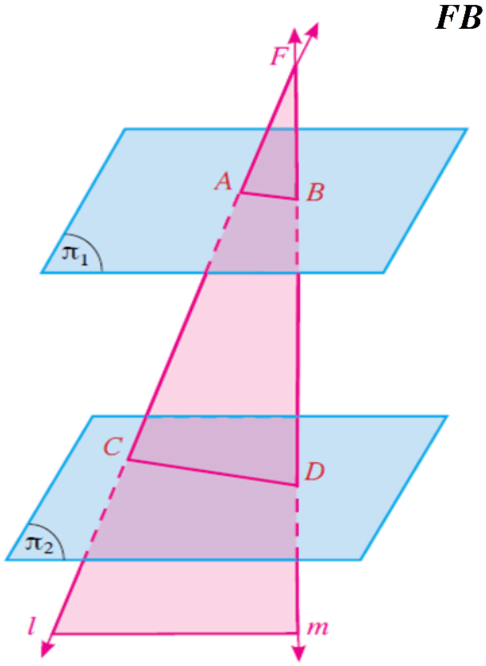
كتاب الطالب مثال صـ 128 رقم 4 :

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

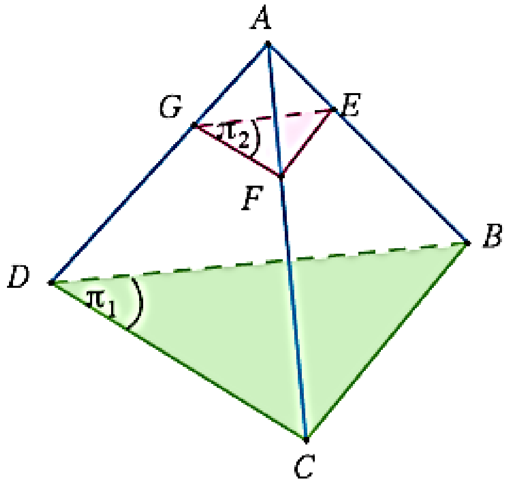
$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B ، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 129 رقم 4 :



في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC

كراسة التمارين صـ 52 رقم 7 :

ليكن π_2, π_1 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

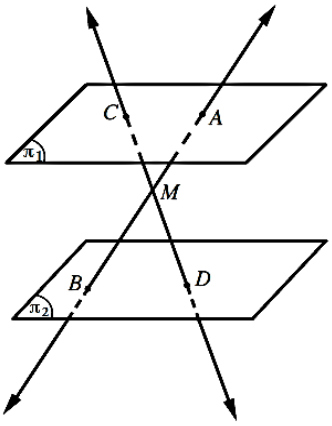
أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

كراسة التمارين صـ 52 رقم 8 :

$ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع

كراسة التمارين صـ 52 رقم 9 :



في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء
البنود الموضوعية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{m} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (a) (b)

(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما
هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين. (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

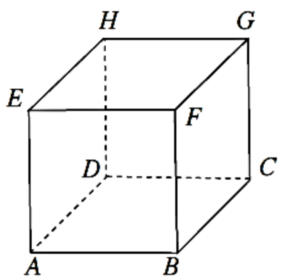
(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BD}$ هما:

(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد



كراسة التمارين صـ 52 : البنود الموضوعية

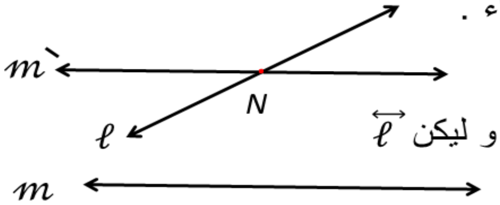
1	2	3	4	5	6	7	8

تعامد مستقيم مع مستوٍ

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و موازٍ للأخر

$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{\ell}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء .



نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين و ليكن $\overleftrightarrow{\ell}$

نرسم $\overleftrightarrow{m}$` يوازي $\overleftrightarrow{m}$ و يمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{\ell}$ هي أحد الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{m}$` ، $\overleftrightarrow{\ell}$

$\hat{N}$ الزاوية الحادة بين المستقيمين m ، ℓ

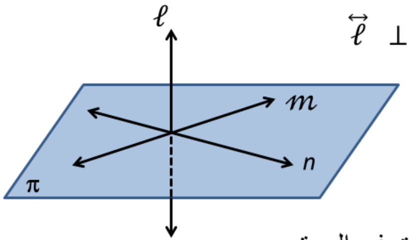
ملاحظة : لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

تعريف

يكون المستقيم ℓ عموديا على المستوى π إذا كان $\overleftrightarrow{\ell}$ عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في π و يرمز له بـ : $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

نقول أيضا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{\ell}$ $\qquad \pi \perp \overleftrightarrow{\ell}$

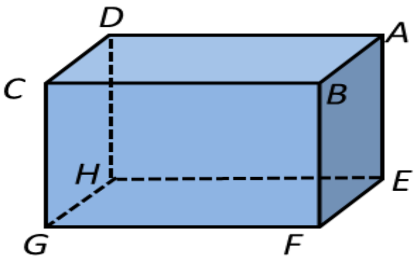
في الشكل المجاور : إذا كان $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$



فإن ℓ عموديا على كل المستقيمات في المستوى π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما



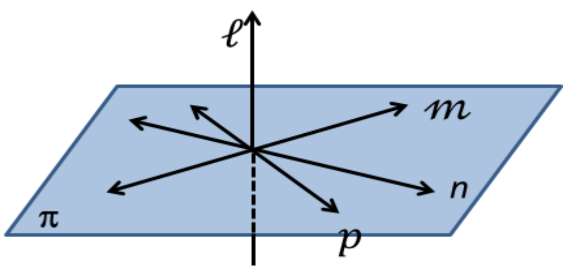
$$\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\}$$

$$\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH} \quad ، \quad \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$$

$$\overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستوٍ واحد عموديا على المستقيم المعلوم

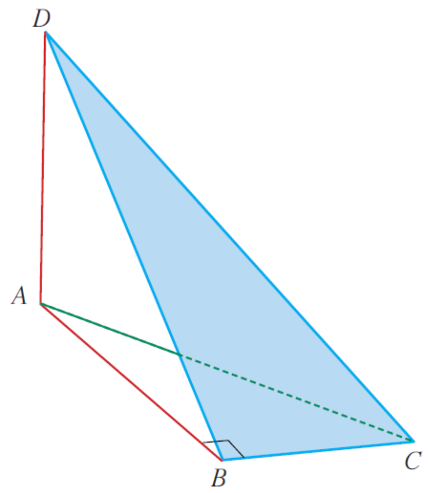


كتاب الطالب مثال صـ 131 رقم 1 :

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 132 رقم 1 :

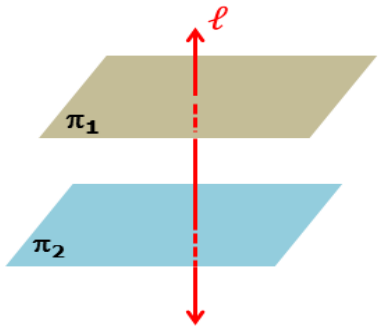
في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان

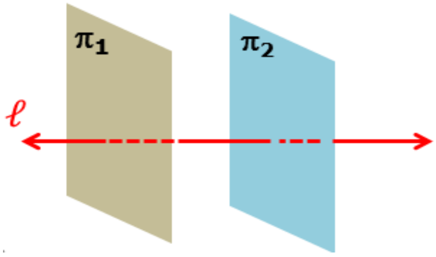
$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2 \longrightarrow \pi_1 \,//\, \pi_2$$



نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر

$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \,//\, \pi_2 \longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$$



كتاب الطالب مثال صـ 132 رقم 2 :

في الشكل المقابل:

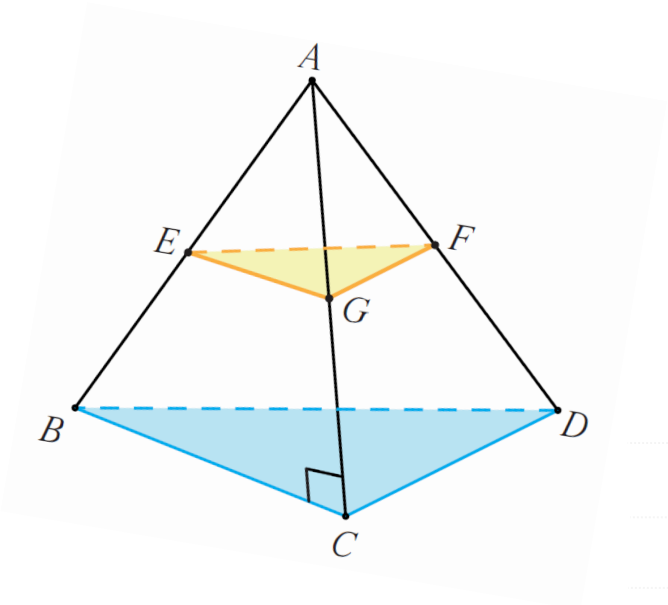
A نقطة خارج المستوى BCD،

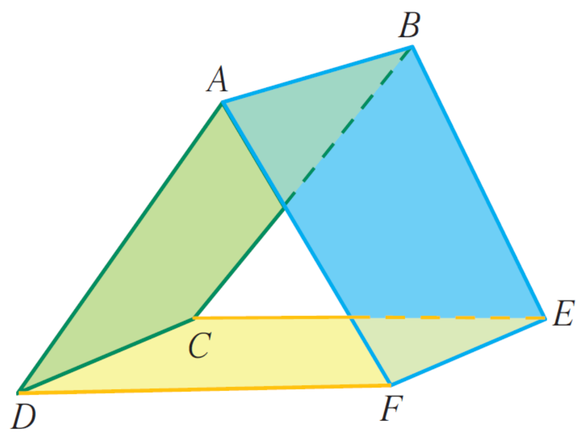
والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \,//\, (BCD)$.



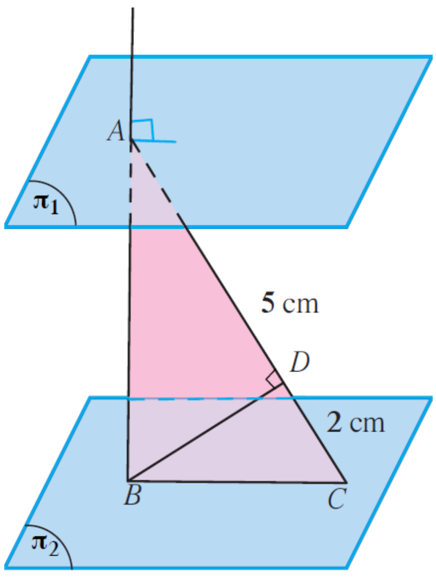


كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 133 رقم 2 :

في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$



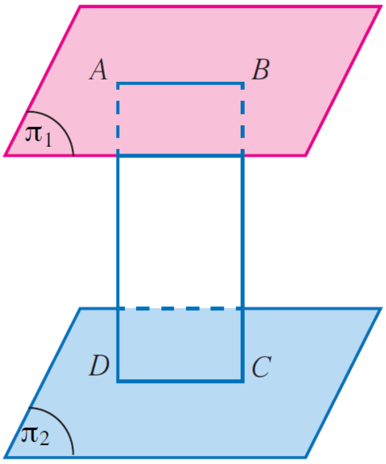
كتاب الطالب مثال صـ 134 رقم 3 :

في الشكل المقابل، $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 134 رقم 3 :

في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

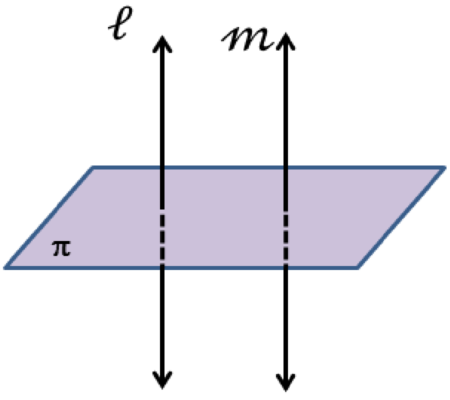
C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستو متوازيان .

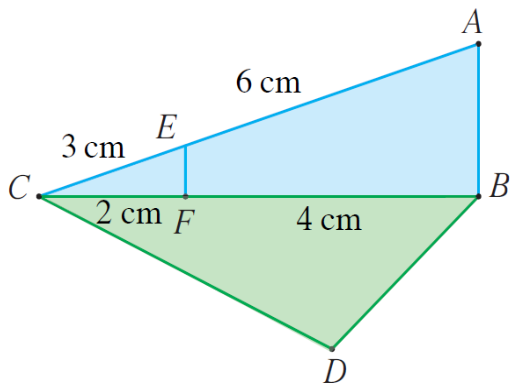


$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا

$$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

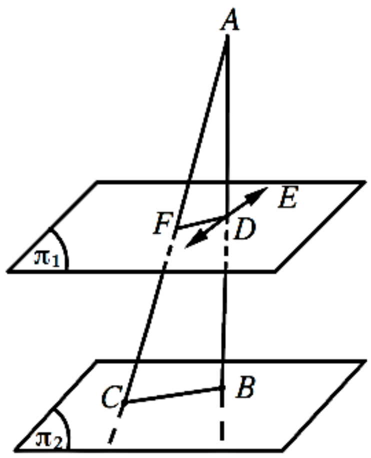


كتاب الطالب مثال صـ 135 رقم 4 :

في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\text{ cm}\ ,\ EA = 6\text{ cm}\ ,\ CF = 2\text{ cm}\ ,\ FB = 4\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



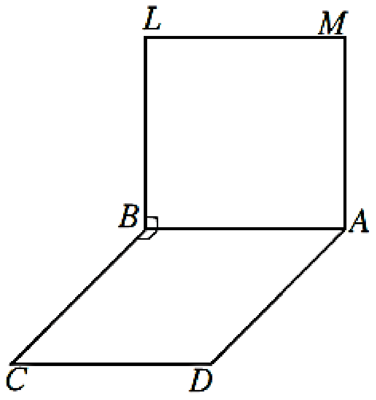
كراسة التمارين صـ 54 رقم 5 :

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي $\pi_1,\ \pi_2$ $\ \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}\ ,\ \overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

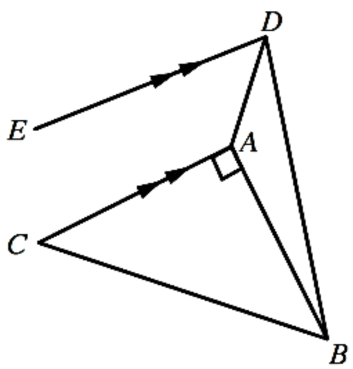
كراسة التمارين صـ 55 رقم 11 :



$ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

كراسة التمارين صـ 55 رقم 10 :



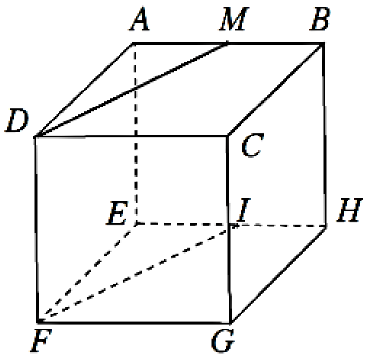
في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب،
النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

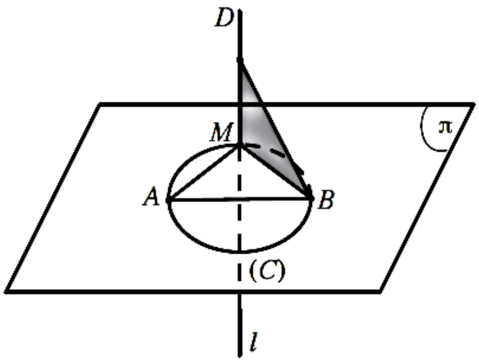
(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (a) (b)

(4) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ (a) (b)

(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ (a) (b)

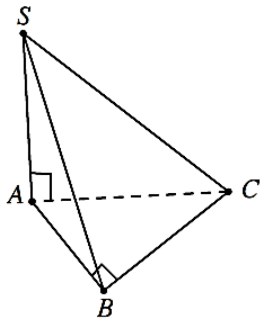
(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان. (a) (b)

(7) في الشكل المقابل :
إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:



(a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

(c) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ (d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$



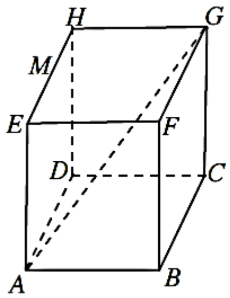
(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90°$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:

(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$



(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه $3\,cm$ فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي:

(a) $\sqrt{3}\,cm$

(b) $3\sqrt{3}\,cm$

(c) $9\,cm$

(d) $18\,cm$

كراسة التمارين صـ 55 : البنود الموضوعية

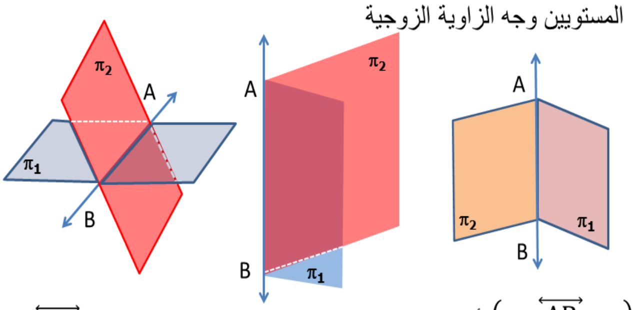
1	2	3	4	5	6	7	8	9

الزاوية الزوجية

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)

إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم و ينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية

يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلي نصفين و يسمى المستقيم المشترك حافة الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك و يسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية

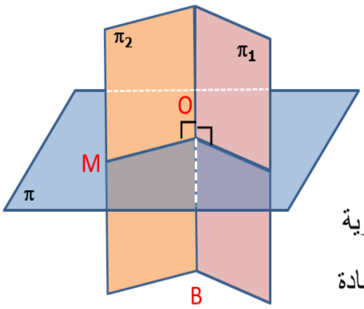


أو نرمز للزاوية الزوجية بحافتها فنكتب الزاوية $\overleftrightarrow{AB}$ ، $(\pi_1, \overleftrightarrow{AB}, \pi_2)$

الزواية المستوية للزاوية الزوجية

هي الزواية

التي تنشأ من تقاطع الزواية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها



و تكون قياس الزواية الزوجية

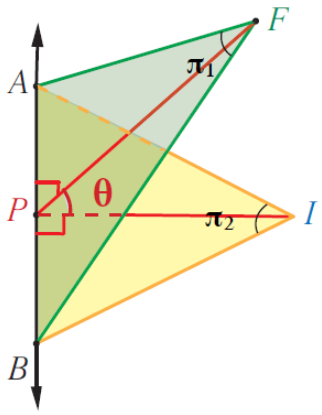
هو قياس إحدي زواياها المستوية

و دائما نأخذ قياس الزاوية الحادة

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1, π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

حافة الزاوية الزوجية ....

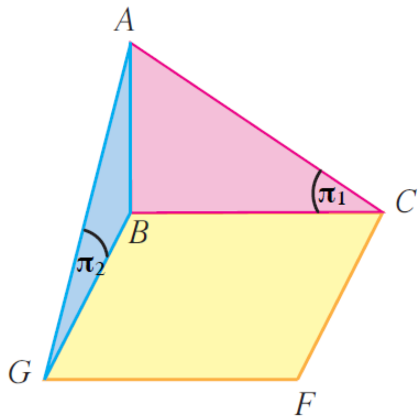
$...... \subset \pi_1$, $..... \perp \overline{AB}$

و كذلك $...... \perp \overline{AB}$, $....... \subset \pi_2$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

$\overline{BC} \subset \pi_1$, $...... \perp \overline{AB}$

و كذلك $......... \perp \overline{AB}$, $......... \subset \pi_2$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

تابع الزاوية الزوجية

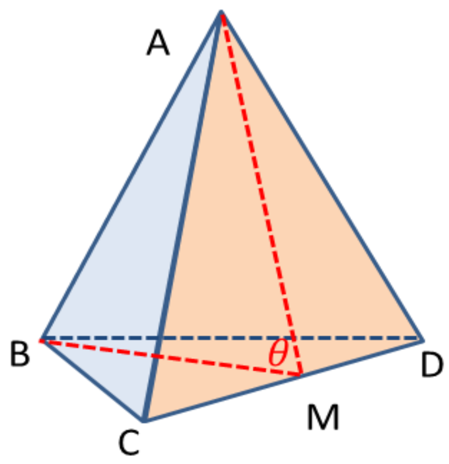
كتاب الطالب مثال صـ 139 رقم 1 :

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

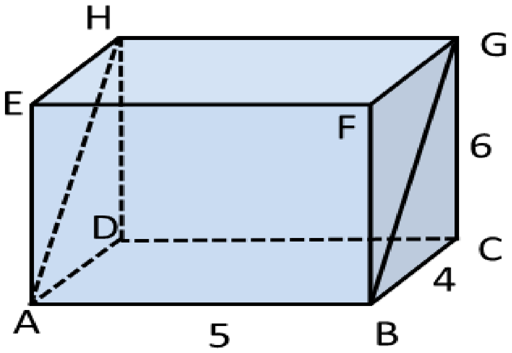
(a) حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

(b) أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

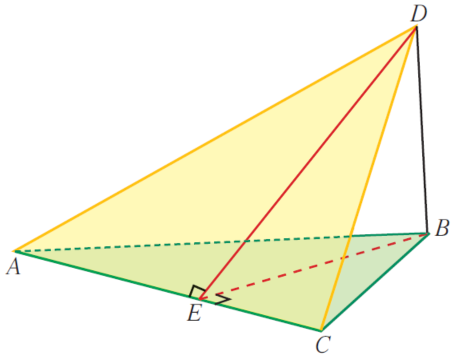


كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 140 رقم 1 :

في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.



كتاب الطالب مثال صـ 140 رقم 2 :



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\,\text{cm}$ ، $AB = 10\,\text{cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$ أوجد:

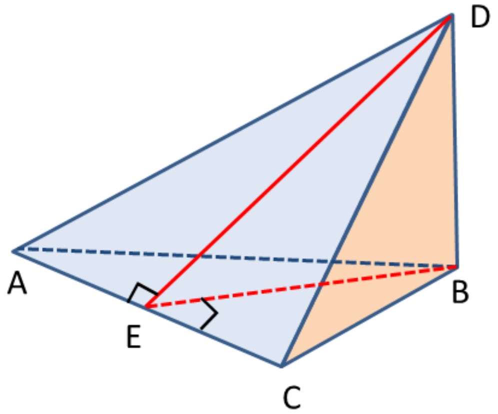
$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

a) $BE\,,DE$

b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $BAC\,,DAC$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 141 رقم 2 :

في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC ، DAC إذا كان $m(\widehat{BAC}) = 45^{\circ}$.

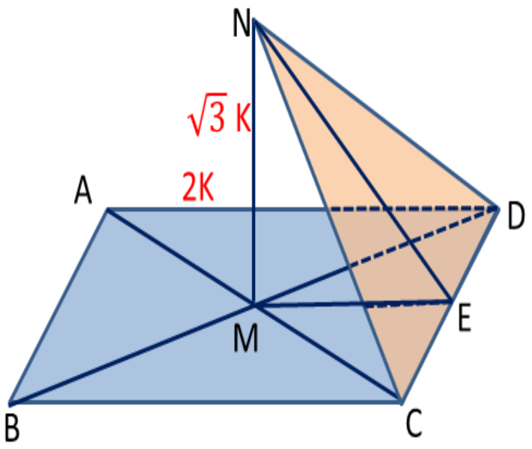


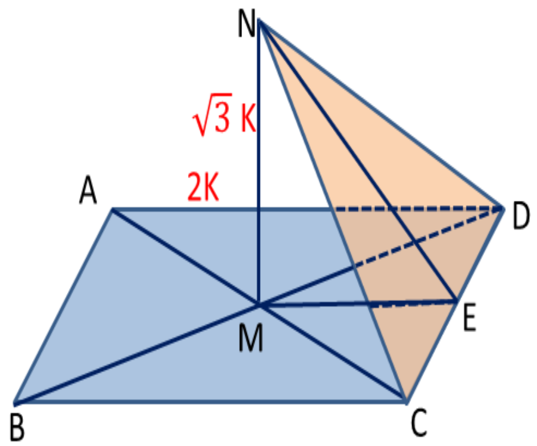
كتاب الطالب مثال صـ 142 رقم 3 :

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$



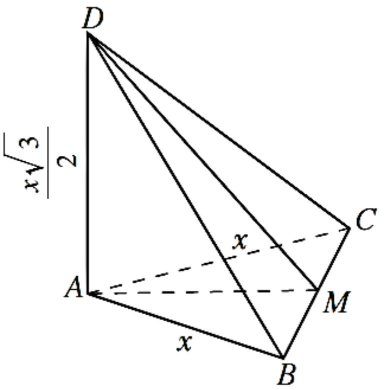


كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 143 رقم 3 :

في المثال (3)، إذا كان $AB = 6\,k$

فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD\,,\,NBC$

كراسة التمارين صـ 57 رقم 1 :



ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

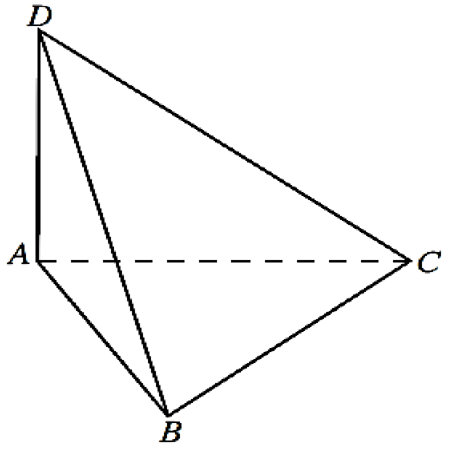
$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$



كراسة التمارين صـ 57 رقم 2 :

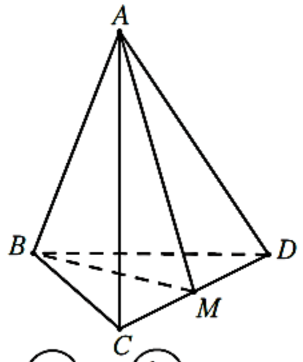
ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل.

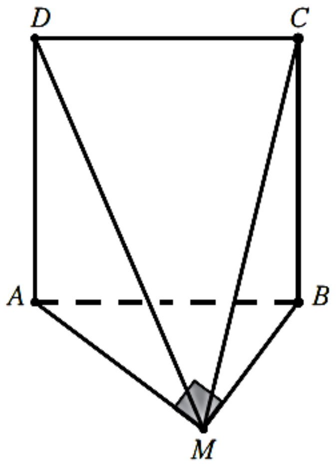
إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a) (b)

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ (a) (b)

أسئلة التمرينين (3–4)، على الشكل المقابل.



المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

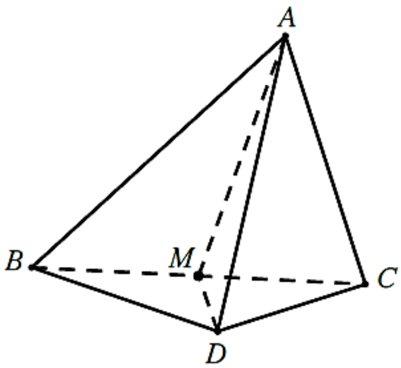
إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:

(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (a) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



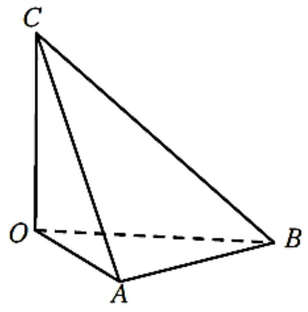
أسئلة التمارين (5–7)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

أسئلة التمرينين (8–9) على الشكل المقابل.



إذا كان OAB مثلث فيه:

$m(A\hat{O}B) = 60^\circ$ ، $OB = 2x$ ، $OA = x$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

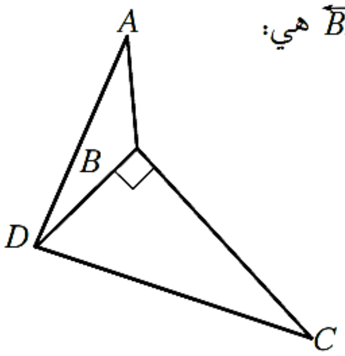
(a) x (b) $x\sqrt{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



(a) $D\hat{B}C$ (b) $A\hat{B}C$

(c) $A\hat{B}D$ (d) $A\hat{D}C$

كراسة التمارين صـ ٥٨ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

مبدأ العد

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

كتاب الطالب حاول أن تحل 1 صـ 153 : من مثال(1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:
- a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.
- b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.
- c عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 154 : من المثال (2)

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد:

(a) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

قانون التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+\ ,\ n \geq r$

كتاب الطالب حاول أن تحل 4 صـ 156 :

اشتركت 7 يخوت في سباق.
بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

كتاب الطالب مثال 5 صـ 156 : حل المعادلات التالية:

a $\ {}_nP_5 = 6 \times {}_nP_4\ ,\ n \geqslant 5$

b $\ {}_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$

تابع كتاب الطالب مثال 5 صـ 156 : حل المعادلات التالية:

ⓒ $\dfrac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

كتاب الطالب حاول أن تحل 5 صـ 157 : حل المعادلات التالية:

ⓐ $_{n}P_{7} = 12 \times {}_{n}P_{5}$

ⓑ $_{8}P_{r} = 4 \times {}_{8}P_{r-1}$

قانون التوافيق

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+ \ ,\ n \geq r$

كتاب الطالب حاول أن تحل 6 صـ 158 :

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

في المثال (6): a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟

b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟

c ماذا تلاحظ؟

كتاب الطالب حاول أن تحل 7 صـ 159 :

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.
يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

في المثال (7)، بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل؟

تابع التوافيق

كتاب الطالب مثال 10 صـ 161 :

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a $_{n}C_{3} = {}_{n}C_{4}$

b $\dfrac{_{n}C_{7}}{_{(n-1)}C_{6}} = \dfrac{8}{7}$

كتاب الطالب حاول أن تحل 10 صـ 160 :

a $_{n}C_{2} = 105$

b $_{n}C_{4} = {}_{n}C_{5}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار $10!$ هي 3 628 800 — (a) (b)

(2) قيمة المقدار $4! \times 5!$ هي 360 — (a) (b)

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$ — (a) (b)

(4) قيمة المقدار $3 \times {}_5C_4$ هي 15 — (a) (b)

(5) $(n-r)! = n! - r!$ — (a) (b)

في التمارين (6–15)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

(a) $\frac{10}{21}$ (b) $\frac{1}{120}$ (c) 120 (d) 1

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

(a) 75 600 (b) 7 560 (c) 2.5 (d) 210

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

(a) 18 (b) 5.184 (c) 10 (d) 735

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

(a) 95 040 (b) 475 200 (c) 392 (d) 11 404 800

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

(a) 210 (b) 35 (c) 840 (d) 24

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

(a) 1 (b) 19 (c) 9 (d) 6

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاور محمد وأحمد؟

(a) $5!$ (b) $4!$ (c) $2! \times 4!$ (d) $2! \times 5!$

(14) إذا كان: $_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 2

(15) مجموعة حلّ المعادلة: $_6C_r = 15$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{4\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\{3\}$

كراسة التمارين صـ ٦٨ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

مثلث باسكال

$(x+y)^0$	row 1					1						
$(x+y)^1$	row 2				1		1					
$(x+y)^2$	row 3			1		2		1				
$(x+y)^3$	row 4		1		3		3		1			
$(x+y)^4$	row 5	1		4		6		4		1		
$(x+y)^5$	row 6	1	5		10		10		5		1	

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots.. + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين — Properties of the Binomial Theorem

١ مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$

٢ الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.

٣ يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.

٤ مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس n.

٥ معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...

٦ الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

كتاب الطالب حاول أن تحل 1 صـ 165 :

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

ⓐ $(x+y)^5$

ⓑ $(a-b)^4$

ⓒ $(2x-y^2)^5$

كتاب الطالب مثال 2 صـ 164 :

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 165 :

في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

كتاب الطالب حاول أن تحل 3 صـ 166 :

أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$ (a) (b)

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5   (a) (b)

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7   (a) (b)

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$ (a) (b)

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.   (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(b) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(c) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$

(d) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$

(b) $-7a^6b$

(c) $7a^6b$

(d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني
(b) الحد الثالث
(c) الحد الرابع
(d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170
(b) 3 312
(c) 4 320
(d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة
(b) الخامسة
(c) السادسة
(d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3
(b) T_6
(c) T_5
(d) T_8

كراسة التمارين صـ 71 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة و لكن لا يمكن التأكد مسبقا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة

أنواع الأحداث

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S)، فإذا كان D حدثًا مستحيلاً فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S)، فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

كتاب الطالب مثال 1 صـ 169 : في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1 اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:

a A: ظهور عدد أكبر من 5

b B: ظهور عدد فردي

c C: ظهور عدد زوجي

d D: ظهور عدد أصغر من 7

2 a أثبت أن B, C حدثان متتامان.

b بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

كتاب الطالب حاول أن تحل 1 صـ 170 : في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

a اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

(1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.

(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.

(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

b (1) بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

(2) أعط مثالًا عن حدثين متنافيين.

الاحتمال Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

ⓐ $0 \le P(E) \le 1$

ⓑ إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

ⓒ إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

ⓓ مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة = 1

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 171 :

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

في المثال (2)

ⓐ ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

ⓑ ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

كتاب الطالب مثال 3 صـ 171 :

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.

ما احتمال اختيار «محمد»؟

كتاب الطالب حاول أن تحل 3 صـ 172 :

في المثال (3)، اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S:

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

كتاب الطالب حاول أن تحل 5 صـ 173 :

حوالى 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.

اختير طالب عشوائيًّا من هذه الجامعة. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) عمر الطالب بين 25 عامًا و34 عامًا.

(b) عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

كتاب الطالب حاول أن تحل 6 صـ 174 :

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

إحتمال ذات الحدين

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E، H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة **تكرار** حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث **ناتجان فقط:**

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

كتاب الطالب حاول أن تحل 7 صـ 175 :

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي:

عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز

ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات

ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

تابع الاحتمال

كتاب الطالب حاول أن تحل 8 صـ 175 :

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%
ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

تمارين كراسة التمارين صـ ٧٢ ، ٧٣

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًّا، اختيار الدواليب عشوائيًّا هما حدثان مستقلان.

(a) (b)

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$, $P(n)=\frac{3}{8}$ إذًا $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$

(a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$

(a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$

(a) (b)

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{1}{3}$، $P(n)=\frac{9}{10}$ إذًا $P(m\cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{3}{5}$، $P(r)=\frac{1}{3}$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

ⓐ 28% ⓑ 42%

ⓒ $\frac{16}{35}$ ⓓ $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

ⓐ $\frac{2}{3}$ ⓑ $\frac{5}{6}$

ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

ⓐ $\frac{1}{14}$ ⓑ $\frac{28}{15}$

ⓒ $\frac{2}{7}$ ⓓ $\frac{15}{28}$

كراسة التمارين صـ ٧٤ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

تمنياتنا لكم

بدوام النجاح و التفوق

لا تنسونا من صالح الدعاء