ثانوية سلمان الفارسي

قسم الرياضيات

الصف الثانى عشر علمى

الفصل الدراسى الثانى

الوحدة الخامسة

نسخة غير محلولة

M.ATA

2023

مخطط ذهني للتكامل

انواع التكامل

- تكامل مباشر
- تكامل بالتبسيط
  - مربع حدانية
  - فك اقواس
  - ضرب
  - قسمة
  - تحليل ثم اختصار
  - توزيع
- تكامل بالتعويض
- تكامل بالتجزيء
- تكامل بالكسور الجزئية

الاقـواس

اقواس يمكن فكها

التبسيط

1) فك الاقواس

- $\int (2x-3)(x+4)\,dx$
- $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

2) توزيع بسط على مقام

- $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3)فك ثم توزيع البسط على المقام

- $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

اقواس لا يمكن فكها

التعويض

- $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$
- $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$
- $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\,(2x-5)\,dx$

تعويضتين

u =...........

du =...........

- $\int x(2x-1)^3\,dx$
- $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$

ثلاث تعويضات

u =...........

du =...........

x =...........

M.ATA

الدوال المثلثية

مباشرة

$\int \sin x \, dx$

$\int \cos x \, dx$

$\int (\sec x \tan x + \sin x) dx$

$\int (\csc x \cot x + \sec^2 x) dx$

ملحوظة: كلا من

$\int \tan x \, dx$, $\int \cot x \, dx$

تحل بطريقة البسط مشتقة المقام

M.ATA

التعويض

$\int x^2 \sin(x^3+1) dx$

$\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$

$\int \sin^4 x \cos x \, dx$

$\int \sec^3 x \tan x \, dx$

$\int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3) dx$

$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

تعويضتين

u =...........

du =...........

التجزئ

$\int x \sin x \, dx$ — مرة واحدة

$\int x \cos(3x) dx$ — مرة واحدة

$\int x^2 \cos x \, dx$ — مرتين

$\int e^x \sin x \, dx$ — دوري

تجزئ

u =... dv =...

du =... v = ...

$$\int f(x)\, e^{g(x)}\, dx$$

عائلة (e)

مباشرة

$\int e^{ax+b}dx = \dfrac{e^{ax+b}}{a} + c$

$\int e^{3x+7}dx$

$\int 5e^{-2x+1}dx$

التعويض

$\int x\, e^{x^2}\, dx$

$\int (2x+1)e^{x^2+x+4}dx$

$\int \dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx$

تعويضتين

u =............

du =............

التجزئ

مرة واحدة: $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$

مرة واحدة: $\int (x-3)e^{x-3}\, dx$

مرة واحدة: $\int 4x\, e^{-5x}\, dx$

مرتين: $\int x^2\, e^{x+2}\, dx$

دوري: $\int e^{x}\sin x\, dx$

u =... dv =...

du =... v = ...

M.ATA

$$\int f(x) \ln g(x) \, dx$$

عائلة (ln)

معظم المسائل تحل بالتجزئ

- $\int x \ln x \, dx$
- $\int \ln(x+1) \, dx$
- $\int (2x+1) \ln(x+1) \, dx$
- $\int x^2 \ln x^2 \, dx$
- $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

$u = \ln \ldots \quad dv = \cdots$

$du = \ldots \quad v = \cdots$

حالات خاصة تحل بالتعويض

- $\int \frac{\ln^6 x}{x} \, dx$
- $\int \frac{dx}{x \ln x}$

$u = \cdots \quad du = \cdots$

اذا وجد في التمرين $\frac{1}{x}$ و $\ln(x)$

نستخدم التكامل بالتعويض

M.ATA

مخطط ذهني لتكامل بعض الحدوديات النسبية

حدودية نسبية (كسر كل من البسط والمقام علي صورة حدودية)

توزيع البسط علي المقام

$$\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$$

$$\int \frac{x^3+4}{x}dx$$

المقام حد واحد

تحليل و اختصار

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$$

$$\int \frac{x^4-27}{x^3-3x}dx$$

درجة البسط اكبر من درجة المقام

البسط مشتقة المقام

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$$

$$\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$$

درجة البسط اصغر من درجة المقام بواحد

كسور جزئية

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3+3x^2-2x}dx$$

$$\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$$

1) درجة البسط اصغر من درجة المقام
2) المقام يقبل التحليل

دالة نسبية (بسط ومقام)

توزيع البسط على المقام

* $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$
* $\int \frac{x^3+4}{x}dx$
* $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}dx$
* $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

البسط مشتقة المقام

* $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$
* $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$
* $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$
* $\int \tan x\, dx$
* $\int \cot x\, dx$

تحليل + اختصار

* $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$
* $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}dx$
* $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

كسور جزئية (المقام يقبل التحليل الي عوامل خطية)

* $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$
* $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$
* $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

M.ATA

تكاملات بمجرد النظر

القاعدة (1)

$$\int k\, e^{ax+b}\, dx = \frac{k}{a}.e^{ax+b} + c$$

امثلة :

$$\int e^{2x-3}\, dx = \frac{1}{2}.e^{2x-3} + c$$

$$\int 2e^{3x}\, dx = \frac{2}{3}.e^{3x} + c$$

القاعدة (2)

$$\int \frac{k}{ax+b}\, dx = \frac{k}{a}.\ln|ax+b| + c$$

امثلة :

$$\int \frac{3}{2x+5}\, dx = \frac{3}{2}.\ln|2x+5| + c$$

$$\int \frac{-5}{3x-2}\, dx = \frac{-5}{3}.\ln|3x-2| + c$$

القاعدة (3)

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}.\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + c \quad : n \in Q - \{-1\}$$

امثلة :

$$\int (1+x)^3\, dx = \frac{1}{4}(1+x)^4 + c$$

$$\int (1+\frac{9}{4}x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}} + c$$

التكامل المحدد

أوجد

- $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$
- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\, sec^2 x\, dx$
- $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\, dx$
- $\int_{4}^{7} \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\, dx$

المطلق

- $\int_{0}^{5} |x-3|\, dx$
- $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\, dx$
- $\int_{-3}^{4} |2x-4|dx$

نصف الدائرة

- $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$
- $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$
- $\int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\, dx$
- $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx$

دون حساب قيمة التكامل اثبت ان :

- $\int_{3}^{5} (x^2+x)\, dx \geq 0$
- $\int_{1}^{3} (2x-3)\, dx \leq \int_{1}^{3} (x^2+2)\, dx$
- $\int_{0}^{1} (x^2-3x+7)\, dx \geq \int_{0}^{1} (4x-5)\, dx$

التمارين الموجودة علي سبيل التوضيح وليست علي سبيل الحصر

بالتوفيق ان شاء الله

M.ATA

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

(1 – 5) التكامل غير المحدد

دعنا نفكر ونتناقش

أكمل الجداول التالية:

a

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
	$x^2 - 1$
	$x^2 + 5$
	$x^3 + 4$
	$x^3 - 2$

b

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
$2x$	
$3x^2$	
5	
x^3	

c هل يمكن إيجاد $F(x)$ أخرى في الجزء **b** بحيث يكون لها المشتقة نفسها؟

تعريف: المشتقة العكسية **Antiderivative**

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

ملاحظة: سنتعامل في دراستنا مع دوال متصلة على فترات معينة.

نظرية (1)

إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية لـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

مثال (1)

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$

ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

مثال (2)

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

$$F(x) = \sqrt{1+x^4}$$
$$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

تعريف: التكامل غير المحدد **Indefinite Integral**

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

ملاحظة:

الدالة التي يجري تكاملها

$$\int f(x)\,dx$$

رمز التكامل — x متغيّر التكامل

الرمز $\int$ يعبّر عن **علامة التكامل**، الدالّة f هي **الدالّة المكاملة** في التكامل، x **متغيّر التكامل**.

أي أنّ،

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

وتقرأ،

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو $F(x)+C$.

حيث $F(x)+C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياريّ**، وعندما نحصل على $F(x)+C$ نقول إنّنا **كاملنا** f أو **أوجدنا تكامل** f.

قواعد التكامل غير المحدد **Rules of Indefinite Integral**

1. $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$ قاعدة القوى

خواص التكامل غير المحدد **Properties of Indefinite Integral**

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad , \quad k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت
2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ خاصية الجمع والطرح

ملاحظات:

a. $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

b. $\int (f(x)+k)\,dx = \int f(x)\,dx + \int k\,dx$

امثلة تمهيدية

$\int x^2 \ dx =$ ....

$\int x^3 \ dx =$ ....

$\int x^4 \ dx =$ ....

$\int 5 \ dx =$ ....

$\int -2 \ dx =$ ....

$\int 2x^3 \ dx =$

....

$\int 4x \ dx =$

....

$\int x^{-2} \ dx =$ ....

$\int x^{-3} \ dx =$ ....

$\int \frac{1}{x^5} \ dx =$ ....

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \text{..........}$$

$$\int x^{\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$\int x^{\frac{1}{4}}\,dx =$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \text{..........}$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \text{..........}$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \text{..........}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \text{..........}$$

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \text{..........}$$

امثلة وحاول ان تحل:

أوجد: $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

أوجد: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

أوجد: $\int (x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3})\,dx$

أوجد: $\int x^2 (2x-1)\,dx$

أوجد: $\int (2x-3)(x+4)dx$

أوجد: $\int (2x-1)^2\,dx$

أوجد: $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

أوجد: $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

أوجد: $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2 dx$

أوجد: $\int \left(\frac{x^2 - 2}{x^2}\right)^2 dx$

هل اديت فروضك ؟؟

أوجد: $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

أوجد: $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$

أوجد: $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}dx$

أوجد: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

أوجد: $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

مثال (7)

إن كان: $F(x) = \int (2x - 3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

حاول أن تحل

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x + 5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

لايوجد مستحيل

(2 – 5) التكامل بالتعويض

Rule of Integration by Substitution **قاعدة التكامل بالتعويض**

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)\,dx$ فإن:

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x)\,dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\} \quad , \quad C \text{ ثابت}$$

مثال (1)

أوجد: $\int (x^2 + 2x + 5)^3 (2x + 2)\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

أوجد: $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

أوجد: $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}\quad (2x - 5)\, dx$

مثال (2)

أوجد: $\int \sqrt{4x - 5}\, dx$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

حاول أن تحل

أوجد: $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$

مثال (1)

أوجد:

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$$

مثال (2)

أوجد:

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^3}\,dx$$

حاول أن تحل

2 أوجد:

$$\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال (3)

أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

حاول أن تحل

أوجد: $\int x(2x-1)^3\,dx$

أوجد:

$$\int x(3x+2)^6 dx$$

كن طموح وحقق اهدافك

أوجد:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

أوجد:

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 2}\, dx$$

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

أوجد: $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري

انهض وواصل الطريق

حاول أن تحل

أوجد: $\int x^5 \sqrt{3+x^2}\, dx$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

مثال (4)

أوجد: $\int x^5 \sqrt{4-x^2}\, dx$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

(3 – 5) تكامل الدوال المثلثية

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

تذكر:

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$$

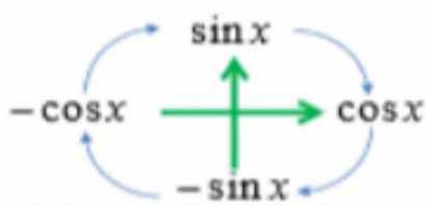
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

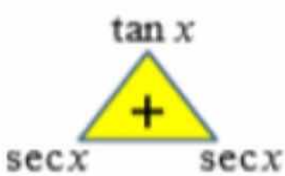
$$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$$

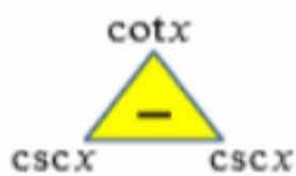
$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$$

	التكامل غير المحدد
1	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$







تبسيط الدوال المثلثية

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x \qquad \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$$\frac{1}{\csc x} = \sin x \qquad \frac{1}{\sec x} = \cos x \qquad \frac{1}{\cot x} = \tan x$$

مثال (1) أوجد: $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

حاول أن تحل أوجد: $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$

مثال (1) أوجد: $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

حاول أن تحل أوجد: $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$

مثال (1) أوجد: $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

حاول أن تحل أوجد: $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

مثال (2) أوجد: $\int \cos 4x\, dx$

حاول أن تحل أوجد: $\int \sin 5x\, dx$

مثال (2) أوجد: $\int (2x - \sin 3x)dx$

حاول أن تحل أوجد: $\int (x^2 + \cos 2x)dx$

مثال (4)

أوجد: $\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$

حاول أن تحل

أوجد: $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x \, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{1+\sin x}\, \cos x \, dx$

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$$

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

مثال (3)

أوجد: $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

حاول أن تحل

أوجد: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

اشكر ثلاث اشخاص غدا

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \cos^5 x \sin x \, dx$

مثال (3)

أوجد: $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

حاول أن تحل

أوجد: $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

مثال (5)

أوجد:

$$\int \sec^4 x \tan x \, dx$$

حاول أن تحل

أوجد:

$$\int \csc^5 x \cot x \, dx$$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{\tan x}\, \sec^2 x\, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{\cot x}\, \csc^2 x\, dx$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

مثال (4)

أوجد: $\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

حاول أن تحل

أوجد: $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)\,dx$

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

مثال (2)

أوجد: $\int x\csc^2(x^2-1)dx$

حاول أن تحل

أوجد: $\int x\sec^2(x^2+2)dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int x^2\sin(x^3+1)dx$

نتعلم من الفشل اكتر من النجاح

(4 – 5) الدوال الأسية

Derivative of Exponential Functions اشتقاق الدوال الأسية

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

مثال (1)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = 3^x$

....

....

b) $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

....

....

c) $f(x) = 10^{\sin x}$

....

....

حاول أن تحل

1) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = 10^x$

....

....

b) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

....

....

c) $f(x) = 5^{\cos x}$

....

....

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^{u}) = e^{u}\frac{du}{dx}$$

مثال (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

b) $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

c) $h(x) = e^{\sec x}$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b) $g(x) = e^{x^2-4}$

c) $h(x) = e^{\tan x}$

تكامل بعض الدوال الأسية

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$
$\int u' e^u\,dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$

مثال (4)

أوجد: $\int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (2x-1) e^{x^2-x+3}\,dx$

ساصير يوما ما ما اريد

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

حالة خاصة

$$\int \ell^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \ell^{ax+b}+c$$

أوجد: $\int \ell^{2x-3}\,dx =$

أوجد: $\int 2e^{x}\,dx$

أوجد: $\int e^{3x}\,dx$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

(4 – 5) الدوال اللوغاريتمية

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

قاعدة (3)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال (3)

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

$$f(x) = \ln(2x + x^3)$$

$$h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$$

$$k(x) = \ln(\cos x)$$

$$h(x) = \ln(\sin x)$$

تستطيع ان تفعلها

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

$f(x) = \ln x^2$

$h(x) = \ln \sqrt{x}$

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$g(x) = \ln \frac{1}{2x+1}$

كراسة التمارين

$y = \ln(\ln x)$

كراسة التمارين

$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

تكامل بعض الدوال اللوغاريتمية

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\|+C$	$\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\|u\|+C$	$\frac{d}{dx}\ln\|u\| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)|+C$

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

ابتسم للحياة

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2} dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x} dx$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \frac{x^3 + 4}{x} dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$

رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

مثال (6)

أوجد: $\int \tan x \, dx$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \cot x \, dx$

نحن من نصنع مصائرنا

كراسة التمارين

أوجد: $\int (\cot x + x^2)\,dx$

حالة خاصة

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \ln|ax+b| + c$$

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{3}{2x+5}\,dx$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{2}{3x+1}\,dx$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

(5 – 5) التكامل بالتجزئ

Integration by Parts Formula **قاعدة التكامل بالتجزيء**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال (1)

أوجد: $\int x \sin x\,dx$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int x \cos x\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int x\cos(3x)\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int x\sin(5x)\,dx$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

مثال (5)

أوجد: $\int x^2 \cos x \, dx$

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int x^2 \sin x \, dx$

بالسؤال يتعلم الانسان

أوجد: $\int (x^2 + 3x)\sin x \, dx$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

مثال (2)

أوجد:

a $\int x\, e^{x}\, dx$

مثال (2)

أوجد:

b $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

حاول أن تحل

2 أوجد:

b $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

تستيطيع ان تفعلها مهما كانت

مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int x^2 e^{x+2}\, dx$

تعلم ان تكون حليما صبورا

مثال (7)

أوجد: $\int e^{x} \sin x \, dx$

معلق

وفقك الله دائما

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int e^x \cos x \, dx$

معلق

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \ln x \, dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x \ln x \, dx$

لايوجد مستحيل

مثال (3)

أوجد: $\int \ln(x+1)dx$

معلق

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

معلق

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

أوجد:

$$\int \ln(2x-1)\,dx$$

معلق

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

أوجد: $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

أوجد: $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

انت قادر ان تفعلها

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الفرق بين الاغبياء والاذكياء،الاغبياء يملكون حلما ، الاذكياء يملكون هدفا

أوجد:

$$\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx$$

وفقك الله دائما

أوجد:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

أوجد:

$$\int (\ln(x))^2 \, dx$$

معلق

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

أوجد: $\int \sin(\ln x)dx$

معلق

حاول ثم حاول لكي تحقق هدفك

حالة خاصة

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{dx}{x\ln x}$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{\ln^6 x}{x}dx$

حقق حلمك وحلم من احبوك

(6 – 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

مثال (1)

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

لا احد يبدا من القمة ،عليك ان تشق طريقك اليها

مثال (2)

أوجد:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$$

احسن استغلال وقتك

حاول أن تحل

2 أوجد:

$$\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\, dx$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة هي الانتصار

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

حاول أن تحل

3 أوجد:

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$$

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

مثال (4)

أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

لن تسقط السماء ذهبا فلا تنتظر

حاول أن تحل

4 أوجد:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x)=q(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$

الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها

حاول أن تحل

أوجد:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2}\, dx$$

قد تكون افضل الطرق اصعبها لكن عليك دائما اتباعها ا

مثال (6)

أوجد: $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8}\, dx$

معلق

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

حاول أن تحل

6 أوجد:

$$\int \frac{x^3 - 7x + 9}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

معلق

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل
ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

(7 – 5) التكامل المحدد

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي: $F(b) - F(a)$

حيث:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b \\ &= \left[F(x)\right]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

مثال (1)

أوجد التكامل المحدد للدالة: $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

Properties of the Definite Integral

خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I , $k \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

مثال (2)

أوجد:

a) $\int_{-8}^{-4} dx$

....

....

أوجد:

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

....

....

أوجد:

c) $\int_{2}^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

....

....

....

....

أوجد:

d) $\int_{1}^{2} \left(3e^x + \frac{e}{x}\right) dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$

أوجد:

b $\int_{2}^{-3} 5\,dx$

أوجد:

c $\int_{3}^{3} (-2x^3 + x^2)dx$

أوجد:

d $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1}$

العلم هو الخير والجهل هو الشر

مثال (9)

أوجد:

a $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)\,dx$

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

مثال (9)

أوجد:

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

حاول أن تحل

9 أوجد:

b $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$$

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

مثال (8)

أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$

حاول أن تحل

8 b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

مثال (10)

أوجد:

$$\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^{x}}\,dx$$

حاول أن تحل

10 أوجد:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^{2}x\,dx$$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

مثال (11)

أوجد:

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$$

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

حاول أن تحل

11 أوجد:

$$\int_4^7 \frac{3x^2 - 17}{x^2 - x - 6}\, dx$$

نتعلم من الفشل اكتر من النجاح

أوجد:

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2 - 4}\, dx$$

ثق بنفسك ، فانت تعرف اكثر مما تعتقد

القيمة المطلقة

مثال (3)

أوجد:

a $\int_{-2}^{3} |x| dx$

أوجد:

b $\int_{0}^{5} |x-3| dx$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int_{-3}^{4} |2x-4| dx$

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

b $\int_1^3 |x+2|dx$

أوجد:

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

معادلة نصف دائرة

مثال (7)

أوجد:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

أوجد:

b $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

أوجد:

b $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

دون حساب قيمة التكامل

لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

مثال (4)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

تستطيع ان تفعلها

حاول أن تحل

4 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,dx \leqslant 0$

كراسة التمارين

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-4}^{2} (x^2 + 2x - 8)\,dx \leq 0$

هل اديت فروضك ؟؟

8 لتكن الدالتين g , f متصلتين على $[a , b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

مثال (5)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2x-3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2+2)dx$

معلق

ثق في نفسك

حاول أن تحل

5 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$

معلق

احسن استغلال وقتك

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geq \int_0^1 (4x - 5)dx$

معلق

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

(1 – 5) التكامل غير المحدد

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة العكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ — 🙂 (b)

(2) $\int (-x^{-3} + x - 1)dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{2} - x + C$ — 🙂 (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$ — (a) 🙂

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x \ , \ f(2) = 1$ ، فإن $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ — (a) 🙂

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$ ، $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15)dx$ ، فإن $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ — (a) 🙂

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ 🙂 $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

(7) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

🙂 $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1 \ , \ y = -5 \ , \ \frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$ (b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

🙂 $3x^{\frac{1}{3}} - 2$ (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$ (b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

🙂 $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

(10) $\int \sqrt{x}(2 + x^2)dx =$

🙂 $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$ (b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$ 🙂 $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$ (d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2\right)^2 dx =$

(a) $x^2 + C$ (b) $2x + C$

(c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$ 🙂 $\frac{1}{3}x^3 + C$

M.ATA

(2 – 5) التكامل بالتعويض

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}\,dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5\,dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (b)

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7\,dx =$

- $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$
- (b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$
- (c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$
- (d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

- (a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$
- $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$
- (c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$
- (d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

- (a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$
- (b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$
- (c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$
- $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}\,dx =$

- (a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13} + C$
- $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13} + C$
- (c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13} + C$
- (d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11} + C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}\,dx =$

- $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$
- (b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$
- (c) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$
- (d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3} + C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx =$

- (a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$
- (b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + C$
- $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$
- (d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

(12) إذا $F(x) = \int (x+1)(2x^2+4x-1)\,dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$ ، فإن: $F(x)$ تساوي:

- (a) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + \frac{5}{4}$
- $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + 1$
- (c) $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2 + 1$
- (d) $4(2x^2+4x-1)^2 - 1$

M.ATA

(3 – 5) تكامل الدوال المثلثية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ — (b)

(2) $\int \csc^2 x\, dx = \cot x + C$ — (a)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x \;,\; F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ — (a)

(4) $\left(F'(x) = \cos x + \sin x \;,\; F(\pi) = 1\right) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ — (b)

(5) $\left(F'(x) = \sec(x)\tan(x) \;,\; F(0) = 4\right) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ — (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$ — (b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

$F(x) = 8x - \csc x + C$ — (d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$ — (b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$ — $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\,dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$ — $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$ — (d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذاكانت $y(\theta = 0) = -3 \;,\; \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$ — (b) $2 - \cos\theta$

$-2 - \cos\theta$ — (d) $4 - \cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x \tan x\,dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$ — (b) $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

$\frac{1}{5}\sec^5 x + C$ — (d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2 + \cot x}}\,dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$ — $-\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $-2\sqrt{2 + \cot x} + C$ — (d) $\frac{4}{3}(2 + \cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}\,dx =$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$ — $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

(c) $-\cos^{-4}(4x) + C$ — (d) $\cos^{-4}(4x) + C$

M.ATA

(4 – 5) الدوال الأسية واللوغاريتمية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ — (a)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ — (a)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ — (a)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ — (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ — (a)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ — (a)

في التمارين (14—7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$

$-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

$e^x(x^2 + x - 1)$ (b) $e^x(x^2 - x)$

(c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ $\frac{2\ln x}{x}$

(c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$

(c) $\frac{1}{x}$ $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2+1}$ (b) $\frac{2}{x^2+1}$

$\frac{2x}{x^2+1}$ (d) $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$

(a) $2\ln(x^2+1) + C$ $\ln(x^2+1) + C$

(c) $\frac{x^2}{x^2+1} + C$ (d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1} + C$

(13) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx =$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

(c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$ (d) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x - 4}dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$ $\ln|e^x - 4| + C$

(c) $-\ln|e^x - 4| + C$ (d) $\frac{1}{2}\ln|e^x - 4| + C$

M.ATA

(5 – 5) التكامل بالتجزئ

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ — (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ — (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ — (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ — (a)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ — (b)

في التمارين (11—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

$-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2\ln(x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

$\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (9—8)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$

(b) $2x\ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$

$x(x+1)\ln x$

(9) $\int v\,du =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$

$\frac{1}{2}x^2 + x + C$

(c) $(2x+1)\ln x + C$

(d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (11—10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$

$\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

(c) $(3x-1)e^{x+2}$

(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v\,du =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(b) $-e^{3x+2} + C$

$\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(d) $e^{3x+2} + C$

M.ATA

(6 - 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) ☺

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) ☺

(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ (b) ☺

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (b) ☺

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9} dx =$

(a) $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$

(b) $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$

(c) $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$

(☺) $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10} dx =$

(a) $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$

(b) $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$

(☺) $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$

(d) $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

(☺) $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} dx =$

(a) $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(b) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(☺) $2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(d) $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4} dx =$

(a) $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(b) $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$

(☺) $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(d) $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x} dx =$

(a) $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

(b) $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

(c) $\frac{x^2}{2} - 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

(☺) $\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x| + C$

معلق

M.ATA

(7 – 5) التكامل المحدد

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$ (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5) dx = -2$ (a)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a)

(4) $\int_{0}^{1} 12(3x-2)^3 dx = -15$ (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, dx = 1$ (a)

(6) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx - \int_{5}^{2} f(x)\,dx = 0$ (a)

(7) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{2} g(x)\,dx = 0$ (a)

في التمارين (8—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_{3}^{-1} g(x)\,dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18   (b) -6 6   (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\, dx =$

(a) 2   (b) $2\sqrt{2}$ 4   (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)dx =$

1   (b) -1 (c) 0   (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(a) 4   2   (c) 0   (d) π

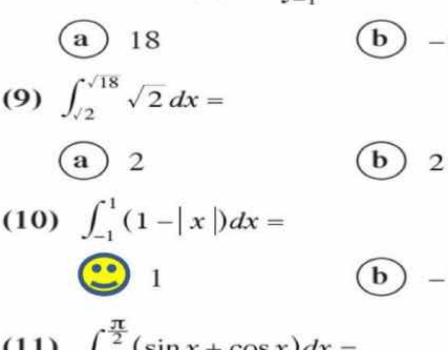
(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ $\mathbb{R}^+$

في التمارين (13—15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:

(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي:	(a) 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:	(b) 5
	(c) 0
(15) $\int_{-4}^{-1} \left(f(x) + \frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:	(d) 3



M.ATA

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل