رياضيات الصف الحادي عشر العلمي

الوحدة السابعة : الأعداد المركبة

الإجابات : هالة لبيب
2022 - 2023

بند 1 − 7

الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (1 −) ويرمز إليه بالرمز i

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-2}$ b $-\sqrt{-12}$ c $\sqrt{-36}$

الحل :

a $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\, i$

b $-\sqrt{-12} = -\sqrt{12}\, i = -2\sqrt{3}\, i$

c $\sqrt{-36} = 6i$

****

تطبيق (1): بسط كل عدد مستخدماً الوحدة التخيلية i :

❶ $\sqrt{-16} = 4i$

❷ $3\sqrt{-9} = 3\sqrt{9}\, i = 3 \times 3 i = 9i$

❸ $-\frac{1}{2}\sqrt{-36} = -\frac{1}{2}\sqrt{36}\, i = -\frac{1}{2} \times 6 i = -3i$

تعريف العدد المركب :

العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z=a+bi$

الصورة $a+bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى a **الجزء الحقيقي** **Real Part**

ويسمى b **الجزء التخيلي** **Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي ← a ، الجزء التخيلي ← b

حاول أن تحل

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-18}+7$ $= 3\sqrt{2}i + 7$
$= 7 + 3\sqrt{2}i$

H.L.

b $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$ $= \dfrac{10-10i}{5}$
$= \dfrac{10}{5} - \dfrac{10i}{5} = 2 - 2i$

c $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$ $= \dfrac{3i+5}{7} = \dfrac{3i}{7} + \dfrac{5}{7} = \dfrac{5}{7} + \dfrac{3}{7}i$

****

تطبيق : اكتب كل عدد في الصورة الجبرية :

❶ $2+\sqrt{-3} =$ $2 + \sqrt{3}i$

❷ $\dfrac{\sqrt{-8}+8}{2} =$ $\dfrac{2\sqrt{2}i+8}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}i}{2} + \dfrac{8}{2} = \sqrt{2}i + 4$
$= 4 + \sqrt{2}i$

تساوي عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

H.L.

a $x + 5i = 7 - 3yi$

$x = 7$

$5 = -3y$

$\frac{5}{-3} = \frac{-3y}{-3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$

b $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

$x + 3 + y^2 i = 5 - yi$

$x + y^2 i = 5 - 3 - yi$

$x + y^2 i \quad 2 - yi$

$x = 2$

$y^2 = -y$

$y^2 + y = 0$

$y(y+1) = 0$

$y = 0$ أو $y + 1 = 0$

$y = -1$

تطبيق : أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يأتي:

❶ $2x + 3yi = -14 + 9i$

$2x = -14$

$\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$

$x = -7$

$3y = 9$

$\frac{3y}{3} = \frac{9}{3}$

$y = 3$

❷ $14i^2 - 3i = 2x + (y+5)i$

التمثيل البياني لعدد مركب

حاول أن تحل

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4 - i$ b $z_2 = -3i$ c $z_3 = -4 - 3i$ d $z_4 = 2$

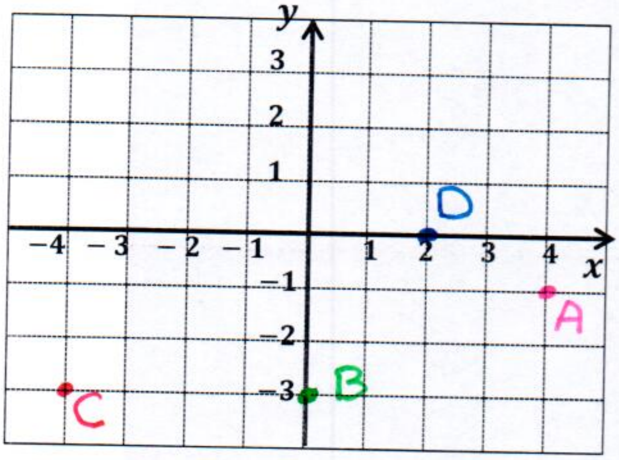
الحل:

a $z_1 = 4 - i$ تمثله النقطة $A(4,-1)$

b $z_2 = -3i$ تمثله النقطة $B(0,-3)$

c $z_3 = -4 - 3i$ تمثله النقطة $C(-4,-3)$

d $z_4 = 2$ تمثله النقطة $D(2,0)$



****

تطبيق : مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب :

(a) $z_1 = -2 + 3i$ (b) $z_2 = -4$ (c) $z_3 = -i$ (d) $z_4 = 2(2 + i)$

a) تمثله النقطة $A(-2,3)$

b) تمثله النقطة $B(-4,0)$

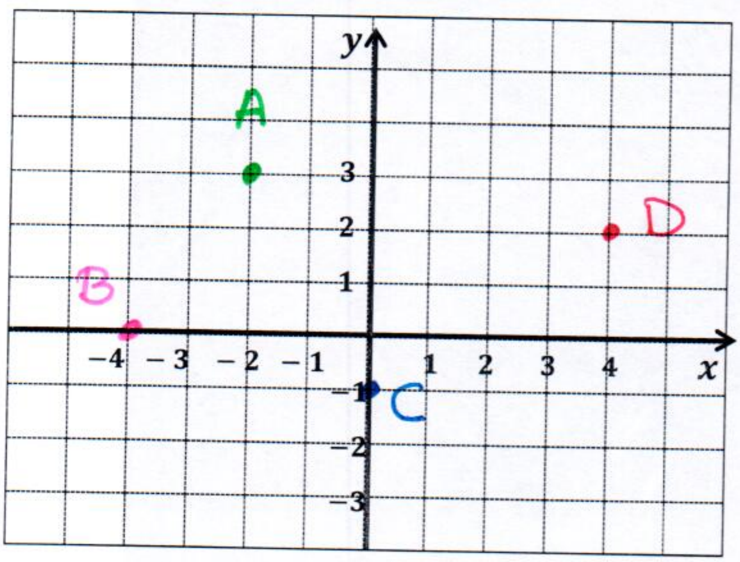
c) تمثله النقطة $C(0,-1)$

d) $Z_4 = 2(2+i)$

$Z_4 = 4 + 2i$

تمثله النقطة

$D(4,2)$



حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4\,,\,1)$ ، $H(1\,,-2)$ ، $K(7\,,0)$.

الحل :

النقطة $K(7,0)$ **تمثل العدد المركب** $z_1 = 7 + 0i = 7$

النقطة $H(1,-2)$ **تمثل العدد المركب** $z_2 = 1 - 2i$

النقطة $N(-4,1)$ **تمثل العدد المركب** $z_3 = -4 + i$

****

العمليات على الأعداد المركبة

أولاً : جمع و طرح الأعداد المركبة

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i\ ,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

H.L.

تطبيق : بسط كل تعبير مما يلي :

❶ $(2+4i)+(4-i) = (2+4)+(4-1)i$
$= 6+3i$

❷ $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16}) = (8-(-3))+(-\sqrt{-1}-\sqrt{-16})$
$= (8+3)+(-i-4i)$
$= 11+(-5i)$
$= 11-5i$

ثانياً :ضرب الأعداد المركبة

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

a $(6-5i)(4-3i) = 24-18i-20i+15i^2$
$= 24-38i-15$
$= 9-38i$

c $(12i)(7i)(i+1) = 84i^2(i+1)$
$= -84(i+1)$
$= -84i-84$
$= -84-84i$

تطبيق : أوجد الناتج :

❷ $(-6-5i)(1+3i) = -6-18i-5i-15i^2$
$= -6-23i+15$
$= 9-23i$

❸ $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25}) = (-2+3i)(6+5i)$
$= -12-10i+18i+15i^2$
$= -12+8i-15$
$= -27+8i$

❹ $(-2+3i)^2 = (-2+3i)(-2+3i)$
$= 4-6i-6i+9i^2$
$= 4-12i-9$
$= -5-12i$

حاول أن تحل

8 إذا كان $z_1 = 2 - 3i \;,\; z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2} z_1 = \frac{1}{2}(2 - 3i)$

$= \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{2}(3)i$

$= 1 - \frac{3}{2}i$

b $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i)$

$= 2 + 8i - 3i - 12i^2$

$= 2 + 5i - 12(-1)$

$= 2 + 5i + 12$

$= -14 + 5i$

****

قوى العدد المركب :

إذا كان p عدد كلي فإن:

$$i^{4p} = 1 \;,\; i^{4p+1} = i \;,\; i^{4p+2} = -1 \;,\; i^{4p+3} = -i$$

مثال (9)

إذا كان $z_1 = i \;,\; z_2 = -2i \;,\; z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

فأوجد:

a $z_1^{21} = i^{21} = i^{4\times5+1} = i$

c z_3^2 الحل في الصفحة التالية

b $z_2^6 = (-2i)^6 = (-2)^6 \times i^6$

$= 46 \times i^{4+2}$

$= 46(-1)$

$= -46$

معلومة X **d** $\cancel{z_3^3}$

H.L.

c)

$$Z_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cancel{2}^{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{3}{4}(-1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \;,\; z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$
- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$

H.L.

مثال (10)

إذا كان $z_1 = 3 + 4i \;,\; z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

a) $z_1 + \overline{z_1}$ b) $z_1 - \overline{z_1}$ c) $\overline{(\overline{z_1})}$

d) $\overline{z_1 + z_2}$ e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ f) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

a) $z_1 + \overline{z_1} = 3 + \cancel{4i} + 3 - \cancel{4i}$
$= 6$

b) $z_1 - \overline{z_1} = 3 + 4i - (3 - 4i)$
$= \cancel{3} + 4i - \cancel{3} + 4i$
$= 8i$

c) $\overline{(\overline{z_1})} = \overline{(\overline{3+4i})} = \overline{3-4i}$
$= 3 + 4i$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3+4i) + (5-2i)}$
$= \overline{3 + 4i + 5 - 2i}$
$= \overline{8 + 2i}$
$= 8 - 2i$

e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(3+4i)}\,\overline{(5-2i)}$
$= (3 - 4i)(5 + 2i)$
$= 15 + 6i - 20i - 8i^2$
$= 15 - 14i - 8(-1)$
$= 15 - 14i + 8$
$= 23 - 14i$

f) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(3+4i)(5-2i)}$
$= \overline{15 - 6i + 20i - 8(-1)}$
$= \overline{15 + 14i + 8}$
$= \overline{23 + 14i}$
$= 23 - 14i$

المعكوس الضربي للعدد المركب

المعكوس الضربي عدد مركب غير صفري $z = a + bi$ هو z^{-1}:

أي أن: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$$

M.L.

حاول أن تحل

11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a) $z_1 = -3i - 7$

b) $z_2 = 5 + 11i$

c) $z_3 = 6i$

الحل :

a) $z_1 = -3i - 7$
$= -7 - 3i$

$z_1^{-1} = \frac{1}{-7-3i} \times \frac{-7+3i}{-7+3i}$

$= \frac{-7+3i}{49+9}$

$= \frac{-7+3i}{58}$

$= -\frac{7}{58} + \frac{3}{58} i$

b)

$Z_2 = 5 + 11i$

$Z_2^{-1} = \frac{1}{5+11i} \times \frac{5-11i}{5-11i}$

$= \frac{5-11i}{25+121}$

$= \frac{5-11i}{146}$

$= \frac{5}{146} - \frac{11}{146} i$

c)

$Z_3 = 6i$

$Z_3^{-1} = \frac{1}{6i} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{i}{6(-1)}$

$= \frac{i}{-6}$

$= \frac{-1}{6} i$

H.L.

تطبيق :

أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي :

❶ $-3-2i$

$1)\ Z_1 = -3-2i$

$Z_1^{-1} = \frac{1}{-3-2i} \times \frac{-3+2i}{-3+2i}$

$= \frac{-3+2i}{9+4}$

$= \frac{-3+2i}{13}$

$= -\frac{3}{13} + \frac{2}{13} i$

❷ $5i$

الحل :

$2)\ Z_2 = 5i$

$Z_2^{-1} = \frac{1}{5i} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{i}{-5}$

$= -\frac{1}{5} i$

❸ $3i-4$

$3)\ Z_3 = 3i-4$

$= -4+3i$

$Z_3^{-1} = \frac{1}{-4+3i} \times \frac{-4-3i}{-4-3i}$

$= \frac{-4-3i}{16+9}$

$= \frac{-4-3i}{25}$

$= -\frac{4}{25} - \frac{3}{25} i$

****

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $2i - 3$ على $1 + 2i$

الحل :

$\frac{2i-3}{1+2i} = \frac{-3+2i}{1+2i}$

$= \frac{-3+2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$

$= \frac{-3+6i+2i-4i^2}{(1)^2+(2)^2}$

$= \frac{-3+8i+4}{5}$

$= \frac{1+8i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5} i$

H.L.

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$

b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

الحل :

a) $\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$

$= \frac{6+2i}{3^2+1^2}$

$= \frac{6+2i}{10}$

$= \frac{6}{10} + \frac{2}{10}i$

$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

b) $\frac{5+i}{2-3i} = \frac{5+i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$

$= \frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$

$= \frac{10+17i-3}{13}$

$= \frac{7+17i}{13}$

$= \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$

$\therefore \overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

****

$= \overline{\left(\frac{7}{13}+\frac{17}{13}i\right)} = \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$

حاول أن تحل

13 اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

b $\frac{2-i}{2+i} = \frac{2-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$

$= \frac{4-2i-2i+i^2}{2^2+1^2}$

$= \frac{4-4i-1}{5} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

c $\frac{\overline{5+i}}{\overline{2-3i}} = \frac{5-i}{2+3i}$

$= \frac{5-i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$

$= \frac{10-15i-2i+3i^2}{2^2+3^2}$

$= \frac{10-17i-3}{13}$

$= \frac{7-17i}{13}$

$= \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$

H.L.

الأعداد المركبة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a)   (b)

$= 2i+3$
$= 3+2i$

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\bar{z}=-3-4i$ (a)   (b)

$\bar{z}=3-4i$

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ (a)   (b)

$-z=-3+2i$

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a)   (b)

باستخدام الآلة الحاسبة

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي: باستخدام الآلة الحاسبة

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(6) $-10-6i=2x+3yi$
$2x+3yi=-10-6i$
$2x=-10$
$\frac{2x}{2}=\frac{-10}{2}$
$x=-5$
$3y=-6$
$\frac{3y}{3}=\frac{-6}{3}$
$y=-2$

(7) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+5i}{-3-i}=-\frac{11}{10}-\frac{13}{10}i$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{-11}{10}+\frac{13}{10}i$

(8) $xi^2+3yi=5+3i^5$
$xi^2+3yi=5+3i^{4+1}$
$xi^2+3yi=5+3i$
$xi^2=5$
$-x=5 \rightarrow x=-5$
$3y=3$
$\frac{3y}{3}=\frac{3}{3}$
$y=1$

$\therefore (x,y)=(-5,1)$

H.L.

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

(a) $18+17i$
(b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$
(c) $6+17i$
(d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

(a) $z=-3+4i$
(b) $z=5+4i$
(c) $z=-3$
(d) $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

(a) $z=14+13i$
(b) $z=14-13i$
(c) $z=2-11i$
(d) $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$
(b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
(c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$
(d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

$i^{250} = i^{4(62)+2} = -1$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$
(b) i
(c) 1
(d) -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$
(b) $\{0,2,4,6,...\}$
(c) $\{1,3,5,...\}$
(d) $\{2,4,6,...\}$

H.L.

بند 2 – 7 الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب :

إذا كان $z = a + bi$ فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

حاول أن تحل

1 أوجد: a $|6 - 4i|$ b $|-2 + 5i|$

الحل :

a $|6 - 4i| = \sqrt{6^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{36 + 16}$
$= \sqrt{52}$
$= 2\sqrt{13}$

b $|-2 + 5i| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{4 + 25}$
$= \sqrt{29}$

****

تطبيق: أوجد :

❶ $|5 + 12i| = \sqrt{5^2 + (12)^2}$
$= \sqrt{25 + 144}$
$= \sqrt{169} = 13$

❷ $|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{4 + 4}$
$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

❸ $|2i| =$
$= \sqrt{0 + 2^2}$
$= \sqrt{4}$
$= 2$

الإحداثيات القطبية

يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية باستخدام:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

H.L.

حاول أن تحل

2 أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(\overset{r}{5}, \overset{\theta}{300^o})$

b $B\left(\overset{r}{2}, \overset{\theta}{\frac{2\pi}{3}}\right)$

الحل :

$x = r\cos\theta$
$x = 5\cos 300^\circ$
$x = \frac{5}{2}$

$y = r\sin\theta$
$y = 5\sin 300^\circ$
$y = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$

∴ الإحداثيات الديكارتية هي :

$A\left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$

$x = r\cos\theta$
$x = 2\cos\frac{2\pi}{3}$
$x = -1$

$y = r\sin\theta$
$y = 2\sin\frac{2\pi}{3}$
$y = \sqrt{3}$

∴ الإحداثيات الديكارتية هي :

$B(-1, \sqrt{3})$

تطبيق : **حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية :**

❶ $(2,\frac{\pi}{3})$

$r \quad \theta$

$x = r\cos\theta$

$x = 2\cos\frac{\pi}{3}$

$x = 1$

$y = r\sin\theta$

$y = 2\sin\frac{\pi}{3}$

$y = \sqrt{3}$

∴ الإحداثيات الديكارتية هي:

$(1, \sqrt{3})$

❷ $(2, 270^\circ)$

$r \quad \theta$

الحل:

$x = r\cos\theta$

$x = 2\cos 270^\circ$

$x = 0$

$y = r\sin\theta$

$y = 2\sin 270$

$y = -2$

∴ الإحداثيات الديكارتية هي:

$(0, -2)$

❸ $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6})$

$r \quad \theta$

$x = r\cos\theta$

$x = \sqrt{2}\cos\frac{-\pi}{6}$

$x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$y = r\sin\theta$

$y = \sqrt{2}\sin -\frac{\pi}{6}$

$y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

∴ الإحداثيات الديكارتية هي:

$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha = \left|\dfrac{y}{x}\right|$
بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

تذكر:
إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0 , y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0 , y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0 , y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

حاول أن تحل

3 أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3}, 3)$　　x　y

$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$= \sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2} = 6$
نفرض أن زاوية الإسناد α :
$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$
$= \left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{6}$
باقي الحل

b $C(4, -2\sqrt{5})$　　x　y

الحل :
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$= \sqrt{4^2+(-2\sqrt{5})^2}$
$= 6$
نفرض أن α هي زاوية الإسناد
$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$
$= \left|\frac{-2\sqrt{5}}{4}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

H.L.

تابع (b)

$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\alpha = 0.84$

$\because x > 0, \; y < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الرابع

$\theta = 2\pi - \alpha$

$= 2\pi - 0.84$

$= 5.44$

$\therefore$ الإحداثيات القطبية هي:

$C\,(6, 5.44)$

تابع (a)

$\because x > 0 \;,\; y > 0 \;\therefore$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول

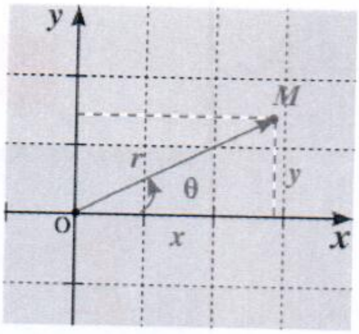
$\theta = \alpha$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ الإحداثيات القطبية هي:

$D\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$

الصورة المثلثية



النقطة $M(x, y)$ تمثل العدد المركب $z = x + yi$

المسافة بين نقطة الأصل O والنقطة M هي $OM = r \ , \ r > 0$

θ هي قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

H.L.

حاول أن تحل

4 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

$x_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y_1 = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

$r_1 = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$r_1 = 5$

نفرض أن زاوية الإسناد هي α_1 :

$\tan\alpha_1 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right|$

$= \left|\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{-5}{\sqrt{2}}}\right| = 1$

$\therefore \alpha_1 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\because x_1 > 0 , y_1 < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الرابع من المستوى الإحداثي المركب.

$\therefore \theta_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{7}{4}\pi$

الصورة المثلثية هي :

$z_1 = 5\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

b $z_2 = -1 - i$

$x_2 = -1$, $y_2 = -1$

$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$r_2 = \sqrt{2}$

نفرض أن زاوية الإسناد α_2 :

$\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right|$

$= \left|\frac{-1}{-1}\right| = 1$

$\therefore \alpha_2 = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

$\because x_2 < 0 , y_2 < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث من المستوى الإحداثي المركب

$\therefore \theta_2 = \pi + \alpha_2$

$= \pi + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{5}{4}\pi$

الصورة المثلثية هي :

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

$x_3 = -2$, $y_3 = 2\sqrt{3}$

$r_3 = |z_3| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2}$

$r_3 = 4$

نفرض أن زاوية الإسناد α_3

$\tan\alpha_3 = \left|\frac{y_3}{x_3}\right|$

$= \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \sqrt{3}$

$\therefore \alpha_3 = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\because x_3 < 0 , y_3 > 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني في المستوى الإحداثي المركب

$\therefore \theta_3 = \pi - \alpha_3$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

الصورة المثلثية هي :

$z_3 = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

تطبيق : ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية :

❶ $2+2i$ ❷ $-2+2\sqrt{3}i$

الحل:

$Z = 2+2i$

$x = 2 \ , \ y = 2$

$r = |Z| = \sqrt{2^2+2^2}$

$= 2\sqrt{2}$

نفرض α هي زاوية الإسناد:

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

$= \left|\frac{2}{2}\right| = 1$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\because x > 0 \ , \ y > 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي المركب

$\therefore \theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي:

$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

تم الحل في الصفحة السابقة

حاول أن تحل

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$Z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$Z_2 = \frac{1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

تطبيق : ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

❶ $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

❷ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

❸ $\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

1 $Z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$Z_1 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i\right)$

$Z_1 = -\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$

3 $Z_3 = \sqrt{3}\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right)$

$Z_3 = \sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right)$

$Z_3 = \frac{-\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

2 $Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$Z_2 = 1 - i$

الصورة المثلثية في حالات خاصة

سعة (بالراديان) (rad)	المقياس	العدد
0	a	a
π	$\lvert -a \rvert = a$	$-a$
$\frac{\pi}{2}$	b	bi
$\frac{3\pi}{2}$	$\lvert -b \rvert = b$	$-bi$

حاول أن تحل

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$ b $z_2 = 5$ c $z_3 = \frac{-3}{4}$ d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

الحل :

a) $Z_1 = 2i$

$r_1 = |Z_1| = |2i| = 2$

$\frac{\pi}{2}$ = السعة الأساسية

$Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

b) $Z_2 = 5$

$r_2 = |Z_2| = |5| = 5$

0 = السعة الأساسية

$Z_2 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

c) $r_3 = |Z_3| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

π = السعة الأساسية

$Z_3 = \frac{3}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$

d) $r_4 = |Z_4| = \left|-\frac{5}{2}i\right| = \frac{5}{2}$

$\frac{3\pi}{2}$ = السعة الأساسية

$Z_4 = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

تطبيق : ضع في الصورة المثلثية كلاً من الأعداد التالية :

❶ $z_1 = 3i$

$r_1 = |Z_1| = |3i| = 3$

$\frac{\pi}{2}$ = السعة الأساسية

$Z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

❷ $z_2 = -2i$

$r_2 = |Z_2| = |-2i| = 2$

π = السعة الأساسية

$Z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

❸ $z_3 = 8$

$r_3 = |Z_3| = |8| = 8$

0 = السعة الأساسية

$Z_3 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$

H.L

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — ⓐ ⓑ

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$ — ⓐ ⓑ

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — ⓐ ⓑ

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — ⓐ ⓑ

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ — ⓐ ⓑ

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30^\circ+i\cos 240^\circ$ هي $\boxed{330^\circ}$ — ⓐ ⓑ

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

ⓐ $A(2,2\sqrt{3})$ ⓑ $A(-2,2\sqrt{3})$ ⓒ $A(-2,-2\sqrt{3})$ ⓓ $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

ⓐ $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ ⓑ $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ ⓒ $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

الإجابات بالتفصيل
في
الصفحات التالية

H.L.

1) $A(4, \frac{7\pi}{6})$

$r = 4 , \theta = \frac{7\pi}{6}$

$x = r\cos\theta$
$= 4\cos\frac{7\pi}{6}$
$= 4 \times \frac{-\sqrt{3}}{2}$
$= -2\sqrt{3}$

$y = r\sin\theta$
$= 4\sin\frac{7\pi}{6}$
$= 4 \times -\frac{1}{2}$
$= -2$

الإحداثيات الديكارتية : $\boxed{A(-2\sqrt{3}, -2)}$

2) $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$

$r = \sqrt{2} , \theta = 135^\circ$

$x = r\cos\theta$
$= \sqrt{2}\cos 135^\circ$
$= \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2}$
$= -1$

$y = r\sin\theta$
$= \sqrt{2}\sin 135^\circ$
$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= 1$

الإحداثيات الديكارتية : $\boxed{B(-1, 1)}$

3) $M(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$

$r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

$= \left|\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\right| = 1$

$\alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$x<0 , y<0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

الإحداثيات القطبية :

$\boxed{M(1, \frac{5}{4}\pi)}$

H.L.

4) $Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$Z = \boxed{\sqrt{3} + i}$

5) $Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$Z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$

$Z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$Z = \boxed{1 - i}$

6) $Z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$

$Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^\circ$

$x > 0, \quad y < 0$

$\theta = 360^\circ - 30^\circ$

$= \boxed{330^\circ}$

H.L.

7 $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$

$r = 4 \quad , \theta = \frac{5\pi}{3}$

$x = r\cos\theta$

$= 4\cos\frac{5\pi}{3}$

$= 4 \times \frac{1}{2}$

$= 2$

$y = r\sin\theta$

$= 4\sin\frac{5\pi}{3}$

$= 4 \times -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -2\sqrt{3}$

$$\boxed{A\left(2, -2\sqrt{3}\right)}$$

8 $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

$= \left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| = 1$

$\alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$x < 0 , y > 0$

∴ θ تقع في الربع الثاني

$\theta = \pi - \alpha$

$= \pi - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{3}{4}\pi$

$$\boxed{B\left(1, \frac{3}{4}\pi\right)}$$

بند 3 – 7 : حل المعادلات

H.L.

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل:

$$2z + i = 3 + 2i$$
$$2z = 3 + 2i - i$$
$$2z = 3 + i$$
$$\frac{2z}{2} = \frac{3+i}{2}$$
$$z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

****

تطبيق : أوجد مجموعة حل المعادلة : $3z - 1 + i = 5 - 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة .

الحل :

$$3z - 1 + i = 5 - 2i$$
$$3z = 5 - 2i + 1 - i$$
$$3z = 6 - 3i$$
$$\frac{3z}{3} = \frac{6-3i}{3}$$
$$z = \frac{6}{3} - \frac{3}{3}i$$
$$z = 2 - i$$

مجموعة الحل $= \{2 - i\}$

H.L.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$.

الحل :

$$z + i = 2\bar{z} + 1$$

$$z - 2\bar{z} = 1 - i$$

$$(x + yi) - 2\overline{(x + yi)} = 1 - i$$

$$(x + yi) - 2(x - yi) = 1 - i$$

$$x + yi - 2x + 2yi = 1 - i$$

$$-x + 3yi = 1 - i$$

$$-x = 1$$

$$\therefore \quad x = -1$$

$$3y = -1$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

∴ مجموعة الحل = $\left\{ \boxed{-1 - \frac{1}{3} i} \right\}$

تطبيق : أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + 2\bar{z} = 4 + i$ في مجموعة الأعداد المركبة .

الحل :

$z + 2\bar{z} = 4 + i$

$(x+yi) + 2\overline{(x+yi)} = 4 + i$

$(x+yi) + 2(x-yi) = 4 + i$

$x + yi + 2x - 2yi = 4 + i$

$3x - yi = 4 + i$

$3x = 4$

$\frac{3x}{3} = \frac{4}{3}$

$x = \frac{4}{3}$

$-y = 1$

$y = -1$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{4}{3} - i \right\}$

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

حاول أن تحل

3 أوجد حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$

$3x^2 = -48$

$\frac{3x^2}{3} = \frac{-48}{3}$

$x^2 = -16$

$x = \sqrt{-16}$

$x = \pm 4i$

مجموعة الحل $= \{4i, -4i\}$

b $-5x^2 - 150 = 0$

الحل :

$-5x^2 = 150$

$\frac{-5x^2}{-5} = \frac{150}{-5}$

$x^2 = -30$

$x = \sqrt{-30}$

$x = \pm\sqrt{30}\,i$

مجموعة الحل =

$\{\sqrt{30}\,i, -\sqrt{30}\,i\}$

c $8x^2 + 2 = 0$

$8x^2 = -2$

$\frac{8x^2}{8} = \frac{-2}{8}$

$x^2 = -\frac{1}{4}$

$x = \sqrt{-\frac{1}{4}}$

$x = \pm\frac{1}{2}i$

مجموعة الحل =

$\{\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i\}$

H.L.

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

الحل :

$Z^2 - 2X + 2 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ C = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-2)^2 - 4(1)(2)$
$= -4$
$= (-1)(4)$
$= 2^2 \times i^2$

$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$Z_1 = \frac{-(-2) - 2i}{2 \times 1}$

$Z_1 = 1 - i$

$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$Z_2 = \frac{-(-2) + 2i}{2 \times 1}$

$Z_2 = 1 + i$

مجموعة الحل = $\{1 - i \ , \ 1 + i\}$

$Z_1 \quad Z_2$

****

تطبيق : أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 + 2z + 5 = 0$.

الحل :

$a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ C = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 2^2 - 4(1)(5)$
$= -16$
$= 16 \times (-1)$
$= 4^2 \times i^2$

$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \frac{-2 - 4i}{2 \times 1} = -1 - 2i$

$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \frac{-2 + 4i}{2 \times 1} = -1 + 2i$

مجموعة الحل : $\{-1 - 2i \ , \ -1 + 2i\}$

H.L.

الجذر التربيعي لعدد مركب

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

الحل : ليكن $w = m + ni \Longleftarrow \therefore w^2 = z$

$w^2 = 3 + 4i$

$(m+ni)^2 = 3 + 4i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$

$m^2 - n^2 = 3$ —— (1)

$2mn = 4$ —— (2)

$|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{3^2+4^2}$

$m^2 + n^2 = 5$ —— (3)

بجمع المعادلتين (1) ، (3) :

$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$

$2m^2 = 8$

$\frac{2m^2}{2} = \frac{8}{2}$

$m^2 = 4$

$\therefore n^2 = 1$ بالتعويض عن m^2

$\therefore \begin{cases} m = 2 \; , \; m = -2 \\ n = 1 \; , \; n = -1 \end{cases}$

من المعادلة (2) : $2mn = 4$
$\therefore$ لهما نفس m, n الإشارة

$\therefore m = 2, n = 1$ أو $m = -2, n = -1$

$\therefore$ الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 + 4i$ هما :

$w_1 = 2 + i \; , \; w_2 = -2 - i$

الحل في الصفحة التالية

حاول أن تحل

7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -5 - 12i$

الحل :

$Z = 5 + 12i \Longrightarrow$ حاول أن تحل رقم (7) في كتاب الطالب

لتكن $w = m + ni$

$w^2 = Z$

$w^2 = 5 + 12i$

$(m + ni)^2 = 5 + 12i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12i$

$\begin{cases} m^2 - n^2 = 5 & \longrightarrow (1) \\ 2mn = 12 & \longrightarrow (2) \end{cases}$

$|w|^2 = |Z|$

$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{5^2 + (12)^2}$

$m^2 + n^2 = 13 \longrightarrow (3)$

بجمع المعادلتين (3) ، (1) :

$\begin{cases} m^2 + n^2 = 13 \\ m^2 - n^2 = 5 \end{cases}$

$2m^2 = 18$

$\frac{2m^2}{2} = \frac{18}{2}$

$m^2 = 9$

$n^2 = 4$

$\begin{cases} m = 3 , m = -3 \\ n = 2 , n = -2 \end{cases}$

من المعادلة رقم (2) :

$2mn = 12$

m ، n لهما نفس الإشارة

$\therefore m = 3 , n = 2$

أو

$m = -3 , n = -2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = 5 + 12i$ هما :

$w_1 = 3 + 2i \quad , w_2 = -3 - 2i$

$$Z = -5 - 12i$$

H.L.

لتكن $\omega = m + ni$

$\therefore \omega^2 = Z$

$\omega^2 = -5 - 12i$

$(m+ni)^2 = -5 - 12i$

$m^2 - n^2 + 2mni = -5 - 12i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -5 & \text{—— (1)} \\ 2mn = -12 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$|w|^2 = |Z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$

$m^2 + n^2 = 13$ —— (3)

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 13 \\ m^2 - n^2 = -5 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين (3)،(1):

$2m^2 = 8$

$\frac{2m^2}{2} = \frac{8}{2}$

$m^2 = 4$

$\therefore n^2 = 9$

$$\begin{cases} m = 2 , m = -2 \\ n = 3 , n = -3 \end{cases}$$

من المعادلة (2): $2mn = -12$

نستنتج أن n, m مختلفتان في الإشارة

$\therefore m = 2 , n = -3$

أو

$m = -2 , n = 3$

$\therefore$ الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = -5 - 12i$ هما:

$\omega_1 = 2 - 3i \quad , \omega_2 = -2 + 3i$

الحل في الصفحة التالية

حاول أن تحل

8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$

الحل :

$Z = 7 + 24i$ ← حاول ان تحل رقم 8 في كتاب الطالب

لتكن $w = m + ni$

$\therefore w^2 = Z$

$w^2 = 7 + 24i$

$(m + ni)^2 = 7 + 24i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 7 + 24i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & \text{—— (1)} \\ 2mn = 24 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$|w|^2 = |Z|$

$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{7^2 + (24)^2}$

$m^2 + n^2 = 25$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 25 \\ m^2 - n^2 = 7 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين :

$2m^2 = 32$

$\frac{2m^2}{2} = \frac{32}{2}$

$m^2 = 16$

$\therefore n^2 = 9$

$$\begin{cases} m = 4 \ , \ m = -4 \\ n = 3 \ , \ n = -3 \end{cases}$$

من المعادلة : $2mn = 24$

نستنتج أن n, m لهما نفس الإشارة .

$\therefore m = 4 \ , \ n = 3$

أو

$m = -4 \ , \ n = -3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = 7 + 24i$ هما :

$w_1 = 4 + 3i \ , \ w_2 = -4 - 3i$

$$Z = 7 - 24i$$

H.L.

لتكن $w = m + ni$

$\therefore \ w^2 = Z$

$w^2 = 7 - 24i$

$(m + ni)^2 = 7 - 24i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 7 - 24i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & \text{—— (1)} \\ 2mn = -24 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$|w|^2 = |Z|$

$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{7^2 + (24)^2}$

$m^2 + n^2 = 25$ —— (3)

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 25 \\ m^2 - n^2 = 7 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين:

$2m^2 = 32$

$\dfrac{2m^2}{2} = \dfrac{32}{2}$

$m^2 = 16$

$\therefore n^2 = 9$

$$\begin{cases} m = 4 \ , \ m = -4 \\ n = 3 \ , \ n = -3 \end{cases}$$

من المعادلة: $2mn = -24$

نستنتج أن m ، n لهما إشارتان مختلفتان

$\therefore m = 4 , \ n = -3$

أو

$m = -4 , \ n = 3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = 7 - 24i$

هما: $w_1 = 4 - 3i \ , \ w_2 = -4 + 3i$

تطبيق : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = -3 + 4i$

الحل :

لتكن $w = m + ni$

$w^2 = Z$

$w^2 = -3 + 4i$

$(m+ni)^2 = -3 + 4i$

$m^2 - n^2 + 2mni = -3 + 4i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & \text{—— (1)} \\ 2mn = 4 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)+4^2}$

$m^2 + n^2 = 5$ —— (3)

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = -3 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين :

$2m^2 = 2$

$\frac{2m^2}{2} = \frac{2}{2}$

$m^2 = 1$

$\therefore n^2 = 4$

$$\begin{cases} m = 1 , m = -1 \\ n = 2 , n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة : $2mn = 4$

نستنتج أن m و n لهما نفس الإشارة

$\therefore m = 1 , n = 2$

أو

$m = -1 , n = -2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = -3 + 4i$ هما :

$w_1 = 1 + 2i$ / $w_2 = -1 - 2i$

M.h.

حل معادلات

الإجابات في الصفحات التالية

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i, 2+i\}$ — (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ — (a) (b)

الجذران التربيعيان عددان تخيليان

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ — (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ — (a) (b)

(7) حل المعادلة: $2z-5+6i=-3\overline{z}$ هو:

(a) $z=1+6i$ (b) $z=-1+6i$ (c) $z=1-6i$ (d) $z=-1-6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+20=0$ هي:

باستخدام الآلة الحاسبة Mode 5 , 3

(a) $\{2-4i, -2-4i\}$ (b) $\{-2+4i, -2-4i\}$

(c) $\{2-4i, -2+4i\}$ (d) $\{2-4i, 2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=33-56i$ هما:

جذري العدد المركب متعاكسان
m , n مختلفتان في الإشارة

(a) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=7+4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1=7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1=7+4i \\ z_2=7-4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z=5-2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$

$$Z=\frac{5-2i}{3-4i}=\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$$

H.L.

① $\bar{Z} + 2 = 5 - i$

$\bar{Z} = 5 - i - 2$

$\bar{Z} = 3 - i$

$\therefore Z = \overline{3 - i}$

$= 3 + i$

② $2Z + \bar{Z} - 3 - 5i = 0$

$2Z + \bar{Z} = 3 + 5i$

$2(x+yi) + \overline{(x+yi)} = 3 + 5i$

$2x + 2yi + x - yi = 3 + 5i$

$3x + yi = 3 + 5i$

$3x = 3 \qquad y = 5$

$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$

$x = 1$

∴ مجموعة الحل = $\{1 + 5i\}$

③ $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$a = 1 ,\ b = -4 ,\ c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(1)(5)$

$= -4$

$= 4(-1)$

$= 2^2 \times i^2$

أو باستخدام الآلة الحاسبة

Mode 5, 3

$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-(-4) - 2i}{2 \times 1}$

$= 2 - i$

$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-(-4) + 2i}{2 \times 1}$

$= 2 + i$

مجموعة الحل = $\{2 - i , 2 + i\}$

باستعمال الآلة الحاسبة

H.L.

(5)

$$z_1^2 = (5+3i)^2$$
$$= 16 + 30i$$

$$z_2^2 = (-5-3i)^2$$
$$= 16 + 30i$$

العبارة صحيحة

(6)

الجذران التربيعيان للعدد المركب
أحدهما هو المعكوس الجمعي للآخر

$$\therefore z_1 + z_2 = 0$$

(7)

$$2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$$
$$2z + 3\bar{z} = 5 - 6i$$
$$2(x+yi) + 3\overline{(x+yi)} = 5 - 6i$$
$$2(x+yi) + 3(x-yi) = 5 - 6i$$
$$2x + 2yi + 3x - 3yi = 5 - 6i$$
$$5x - yi = 5 - 6i$$

$$5x = 5 \qquad -y = -6$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{5}{5} \qquad y = 6$$
$$x = 1$$

مجموعة الحل = $\{1 + 6i\}$