نماذج أجابة أمتحان تقييمى ثانى

2022 / 2023 فصل أول

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\log(x) + \log(x-3) = \log 4 , \qquad x \in (3, \infty)$$

الحل :

$$\log x(x-3) = \log 4$$

$$x(x-3) = 4$$

$$x^2 - 3x = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x = -1 , x = 4$$

$$x = -1 \notin (3, \infty)$$

$$x = 4 \in (3, \infty)$$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{4\}$

(2)

أوجد مجموعة حل المعادلة

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$$

الحل:

عوامل الحد الثابت (-2) : $\pm 1 , \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) : ± 1

الأصفار النسبية الممكنة : $\pm 1, \pm 2$

لتكن : $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$$p(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار الحدودية ، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$$p(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$$

$\therefore$ -1 صفر من أصفار الحدودية ، $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم : $p(x)$ على $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

نستخدم القسمة المطولة :

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 3x + 2 \\ \hline x^2 - 1 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ & -x^4 \qquad \pm x^2 \\ \hline & -3x^3 + 2x^2 + 3x - 2 \\ & \pm 3x^3 \qquad \mp 3x \\ \hline & 2x^2 \qquad - 2 \\ & -2x^2 \qquad \pm 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة : $q(x) = x^2 - 3x + 2$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

مجموعة حل المعادلة $= \{ 1 , -1 , 2 \}$

(3)

الحل : عوامل الحد الثابت (-2) : $\pm 1 , \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) : ± 1

الاصفار النسبية الممكنة : $\pm 1 , \pm 2$

لتكن : $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$p(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 0$$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار الحدودية ، $(x-1)$ عامل من عوامل $p(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة : $q(x) = x^2 + 3x + 2$

نحل المعادلة : $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x_1 = -1$ ، $x_2 = -2$

$\therefore$ حلول للمعادلة $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ هي $x_3 = 1$ ، $x_2 = -2$ ، $x_1 = -1$

(4)

أوجد مجموعة حل المعادلة التالية : (9 درجات)

$$\log_2 (x-1) - \log_2 (x+3) = \log_2 \left(\frac{1}{x}\right) \ : \quad x \in (1, \infty)$$

الحل:

1 $\log_2 \left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)$

1 $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{x}$

1 $x(x-1) = x+3$

1 $x^2 - 2x - 3 = 0$

1 $(x-3)(x+1) = 0$

1 $x = 3 \quad , \quad x = -1$

1 $-1 \notin (1, \infty)$ مرفوضة

1 $3 \in (1, \infty)$

1 ∴ م . ح = $\{3\}$

(5)

أوجد حل المعادلتين التاليتين :

(1 $$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

الحل :

$$\left(x^3 + 3x^2\right) - (4x + 12) = 0$$

$$x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)\left(x^2 - 4\right) = 0$$

$$(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$(x + 3) = 0 \longrightarrow x = -3$$

$$(x - 2) = 0 \longrightarrow x = 2$$

$$(x + 2) = 0 \longrightarrow x = -2$$

(6)

باستخدام نظرية الباقي أثبت أن $(x+2)$ عامل من عوامل

x^3-3x^2-6x+8 ، ثم أوجد باقي العوامل (5 درجات)

الحل :

$f(x)=x^3-3x^2-6x+8$

$\frac{1}{2}$ $f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-6(-2)+8$

$=-8-12+12+8$

$\frac{1}{2}$ $=0$

$\frac{1}{2}$ $\therefore (x+2)$ عامل من عوامل f

لايجاد باقي العوامل نقسم $f(x)$ على $(x+2)$

-2	1	-3	-6	8
$1\frac{1}{2}$		-2	10	-8
1	1	-5	4	0

ناتج القسمة : x^2-5x+4 و الباقي صفر

$\frac{1}{2}$ $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ باقي العوامل $(x-1)$ ، $(x-4)$

(7)

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

الحل :

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

(½) الحد الثابت هو (3) عوامله هي : $\pm 1, \pm 3$

(½) المعامل الرئيس هو (1) عوامله هي : ± 1

(½) الأصفار النسبية الممكنة هي : $\pm 1, \pm 3$

لتكن $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3$

(½) $p(1) = 0$

(½) $\therefore (1)$ صفر من أصفار الحدودية

(½) $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم $P(x)$ على $(x-1)$

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 0(x) + 3$

1	1	−4	0	3	(½)
		1	−3	−3	(½)
	1	−3	−3	$\boxed{0}$	(½)

(½) ناتج القسمة $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة $x^2 - 3x - 3 = 0$ باستخدام القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

(½) + (½)

مجموعة الحل $= \left\{1, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

(8)

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة : (6 درجات)

$f(x) = x^3 + 15x - 9$ على $(x - 3)$

ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية

الحل :

$$f(x) = x^3 + 15x - 9$$

$$f(3) = (3)^3 + 15(3) - 9 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 27 + 45 - 9 = 63 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

∴ باقي القسمة = 63 $\left(\tfrac{1}{2}\right)$

التحقق :

3	1	0	15	−9
		3	9	72
	1	3	24	$\boxed{63}$

$\left(\tfrac{1}{2}\right)$

$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)$

$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)$

الباقي = 63 $\left(\tfrac{1}{2}\right)$

(9)

عوامل الحد الثابت (-3) : ± 3 و ± 1

عوامل المعامل الرئيسي (1) : ± 1

$\therefore$ الأصفار النسبية الممكنة : ± 3 و ± 1

لتكن $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

$p(1) = 1 + 3 - 1 - 3$

$= 0$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار الحدودية

$(x-1)$ عامل من عوامل $p(x)$

نقسم : $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	3	-1	-3
		1	4	3
	1	4	3	0

ناتج القسمة : $q(x) = x^2 + 4x + 3$

لحل المعادلة : $x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x = -1$ أو $x = -3$

مجموعة الحل = $\{-3 , -1 , 1\}$

(10)

حل

$$x^{\frac{2}{3}} = 25 \ , \ \ x > 0$$

الحل:

$$x^{\frac{2}{3}} = 25$$

أخذ لوغاريتم الطرفين

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 25$$

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$$

خاصية القوى

$$\frac{2}{3}\log x = 2\log 5 \quad , \quad x > 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3}\log x = \left(\frac{3}{2}\right)2\log 5$$

$$\log x = 3\log 5$$

خاصية رفع القوى

$$\log x = \log 5^3$$

$$x = 5^3$$

$$x = 125 \in (0, \infty)$$

(11)

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حوّل $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

الحل:

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

استخدم قاعدة تغيير الأساس

$$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3}$$

استخدم الآلة الحاسبة

$$\approx 2.4650$$

للتحويل إلى لوغاريتم للأساس 2:

اكتب معادلة

$$\log_3 15 = \log_2 x$$

عوّض عن $\log_3 15$ بـ 2.4650

$$2.4650 \approx \log_2 x$$

استخدم قاعدة تغيير الأساس

$$2.4650 = \frac{\log x}{\log 2}$$

الضرب التقاطعي

$$2.4650(\log 2) = \log x$$

بسّط

$$0.7420 \approx \log x$$

اكتب في الصيغة الأسية

$$x = 10^{0.7420}$$

استخدم الآلة الحاسبة

$$x \approx 5.5208$$

$$\therefore \ \log_3 15 \approx \log_2 5.5208$$

---

(12)

حل المعادلة: $\log(3x+1)=5$

الحل:

نوجد المجال: $3x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$

$\therefore$ المجال $=\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\log(3x+1)=5$

اكتب في الصورة الأسية $3x+1=10^5$

$3x+1=100\,000$

$x=33\,333$

$\because 33\,333 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\therefore$ الحل مقبول.

(13)

$$\log_{x+1} 32 = 5\ ,\ \ x \in (0,\infty)$$

$$\frac{\log 32}{\log(x+1)} = 5$$ قاعدة تغيير الأساس

$$\log 32 = 5\log(x+1)$$ الضرب التقاطعي

$$\log 32 = \log(x+1)^5$$ خاصية رفع القوى

$$32 = (x+1)^5$$

$$2^5 = (x+1)^5$$

$$x+1 = 2$$

$$x = 1$$

$$1 \in (0,\infty)$$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة = $\{1\}$

---

(14)

$$25^{2x+1} = 144 \quad \rightarrow \log\left(25^{2x+1}\right) = \log 144$$

$$(2x+1)\log 25 = \log 144 \quad \rightarrow \quad 2x\log 25 + \log 25 = \log 144$$

$$2x = \frac{\log 144 - \log 25}{\log 25} \approx 0.543959 \quad \rightarrow \quad x \approx 0.271979$$

التحقيق :

$$25^{2x+1} = 144 \quad \rightarrow \quad 25^{2(0.271979)+1} \approx 143.999 \approx 144$$

الاجابة صحيحة

---

(15)

$$\log(2x)+\log(x-3)=\log 8$$

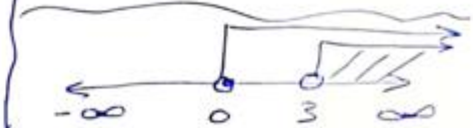
المجال :-

$2x>0$

$x>0$

$x-3>0$

$x>3$



المجال $(3,\infty)$

$\therefore \log(2x(x-3))=\log 8$

$\therefore 2x(x-3)=8$

$\therefore 2x^2-6x=8$

$\therefore 2x^2-6x-8=0$

$x^2-3x-4=0$

بالتحليل

$(x-4)(x+1)=0$

$x=4\in(3,\infty)$

$x=-1\notin(3,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{4\}$