الوحدة الأولى (فقط)

دولة الكويت

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الفروانية

قسم الرياضيات

النهايات والاتصال

دفتر متابعة الطالب
للصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الأول

٢٠١٨-٢٠١٩

الإجابات:

أسم الطالب: Hala Labeeb

الصف:

H.L.

الجزء الأول

٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

وزارة التربية
منطقة الفروانية التعليمية

العام الدراسي: ..../..........
الفصل الدراسي: ....
المادة: ....

استمارة متابعة الطالب

أسم الطالب: ....
الصف: .... / ......

التاريخ	الدفتر	الواجب	المشاركة	الملاحظات	التوقيع

بند 1-1 **اللهايات**

H.L.

الجوار و الجوار الناقص

عمل تعاوني : أولا : أكمل الجدول التالي كما في (1) :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الاعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3 \cdot 5)$	4	3 4 5 ; 1 1	$(4-1 \cdot 4+1)$	1
2	$(\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2})$	1	$\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$
3	$(1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{4})$	2	$1\frac{3}{4}$ 2 $2\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$
4	$(0 \cdot 1)$	$\frac{1}{2}$	0 $\frac{1}{2}$ 1 ; $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$

الفترة المفتوحة $(c-a \text{،} c+a)$ تسمى جوارا للعدد c وفقا للمعيار a حيث $a > 0$

ملاحظات :

★ يمكن كتابة الجوار على صورة الفترة المفتوحة $(a \text{،} b)$ و يسمى a ، b بطرفي الجوار

★ الجوار دائما فترة مفتوحة

★ العدد في منتصف الجوار $c = \frac{a+b}{2}$

★ بعد العدد (في منتصف الجوار) عن طرفي الجوار $\frac{b-a}{2}$

★ إذا كان لدينا دالة معرفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية و تحوي العدد c

فإننا نقول أن هذه الدالة معرفة في جوار للعدد c (I تحوي جوارا للعدد c)

★ إما إذا كانت الدالة معرفة عند جميع عناصر I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه

فإن الدالة تكون معرفة في جوار ناقص للعدد c

تعريف (1) : لتكن x كمية متغيرة ، c عدد حقيقيا .

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب .

$$|x-c| < a$$

$$-a < x-c < a$$

$$c-a < x < c+a$$

$$(c-a \text{،} c+a)$$

التاريخ: / /٢٠١٨

H.L.

نهاية دالة عند نقطة

نشاط

أولًا: لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

a أوجد مجال الدالة f.

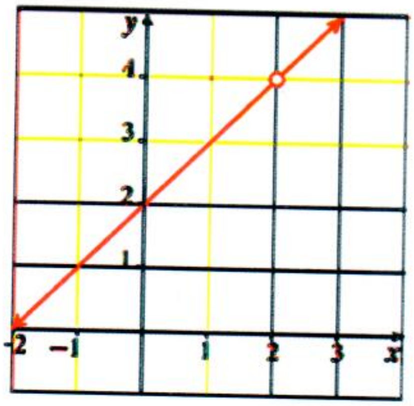
$R/\{2\}$

b هل يمكن إيجاد $f(2)$ ؟

لا يمكن ← (غير معرفة)

c أكمل الجدول التالي:

x	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	... →	2	← ...	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$		3.9	3.99	3.999	3.9999		غير معرّف		4.0001	4.001	4.01	4.1	



d ماذا تلاحظ على قيم x؟ (هل تقترب من عدد محدد؟)

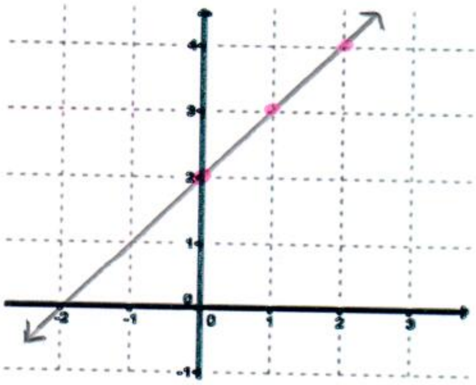
تقترب من العدد ٢

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$؟ (هل تقترب من عدد محدد؟)

تقترب من العدد ٤

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:



a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f ؟ كيف؟

ممكن :

$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

$f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$

$f(x)=x+2$

$g(x)=x+2$

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x)=x+2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين g ، f.

النقطة $(0,2)$ تمر بالدالة $g(x)$ ولا تمر بالدالة $f(x)$

تعريف(2)

ليكن c ، L عددين حقيقين ، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

نكتب : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

و تعني أنه عندما تقترب x من c باطراد ، $x\neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطرراد من L

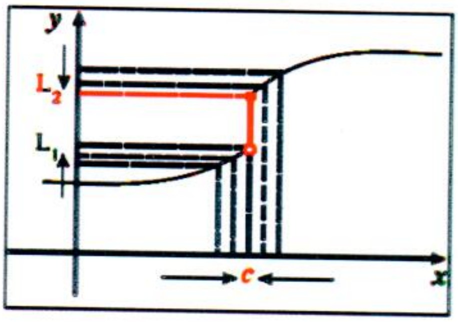
حقيقة هامة :

وجود نهاية عند نقطة لا تعتمد على كون الدالة معرفة أو غير معرفة عند هذه النقطة

التاريخ: /   /٢٠١٨

H.L.

النهاية من جهة واحدة أو جهتين



$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1$ $\qquad$ $\lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$

$L_1 \neq L_2$

$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

$\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة

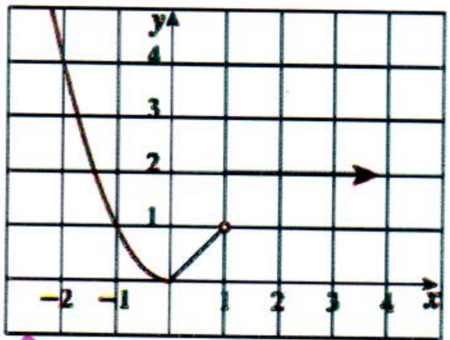
نظرية (1) :

بفرض أن L، c عددين حقيقين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا و فقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة من اليسار و يعبر عن ذلك :

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

مثال (1) صـ 15 : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f



أوجد إن أمكن :

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2) $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

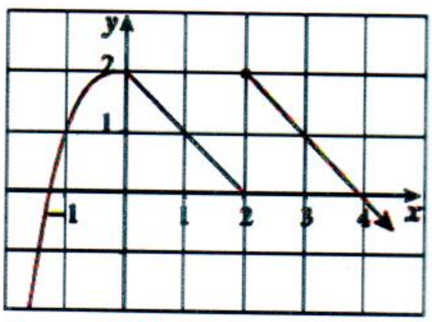
3) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

4) $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

حاول أن تحل (1) صـ 16 : يمثل الشكل المقابل بيان دالة f



أوجد إن أمكن :

a) $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

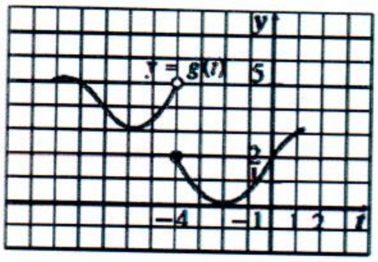
c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow \because \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

التاريخ: /   /٢٠١٨

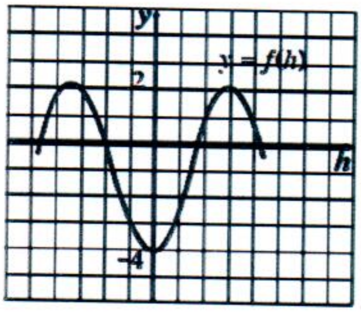
H.L.



(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{t \to -4^-} g(t) = 5$ (b) $\lim_{t \to -4^+} g(t) = 2$

(c) $\lim_{t \to -4} g(t)$ غير موجودة (d) $g(-4) = 2$

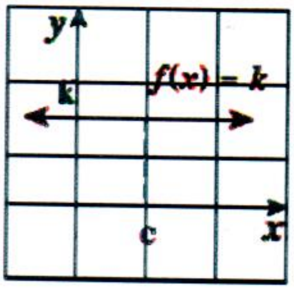


(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{h \to 0^-} f(h) = -4$ (b) $\lim_{h \to 0^+} f(h) = -4$

(c) $\lim_{h \to 0} f(h) = -4$ (d) $f(0) = -4$

حساب النهايات



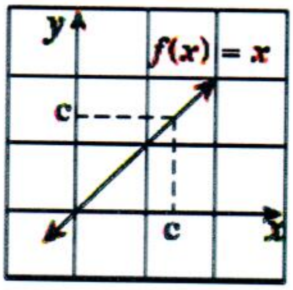
نظرية (2)

إذا كانت f دالة : $f(x) = k$ و كانا k ، c عددان حقيقيان فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

أمثلة :

(1) $\lim_{x \to 4} 3 = 3$



نظرية (3)

إذا كانت f دالة : $f(x) = x$ و كانا c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

أمثلة :

(1) $\lim_{x \to -2} x = -2$

التاريخ: / /٢٠١٨

نظرية (4)

إذا كان k, c, M, L أعدادا حقيقية ، $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، $\lim_{x \to c} g(x) = M$

a) قاعدة الجمع : $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

b) قاعدة الفرق : $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

c) قاعدة الضرب : $\lim_{x\to c} (f(x) . g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

d) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x\to c} (k . f(x)) = k . \lim_{x\to c} f(x) = k . L$

e) قاعدة ناتج القسمة : $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M} \quad , M \neq 0$

H.L.

حاول أن تحل (2) صـ 17 : بفرض أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ ، $\lim_{x \to 2} g(x) = -3$

(a) $\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$

$= 7 + (-3)$

$= 4$

(b) $\lim_{x \to 2} (f(x).g(x))$

$= \lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$

$= 7 \cdot (-3)$

$= -21$

(c) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{8f(x).g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

$= \frac{\lim_{x\to 2} 8f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)}$

$= \frac{8 \lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)}$

$= \frac{8(7)(-3)}{7+(-3)} = \frac{8(-21)}{4} = -42$

نظرية (5)

دوال كثيرات الحدود و دوال الحدوديات النسبية

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود ، c عددا حقيقيا ، فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

(b) إذا كانت $g(x)$ ، $f(x)$ كثيرتي حدود ، c عددا حقيقيا ، فإن

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}, \; g(c) \neq 0$$

حاول أن تحل (3) صـ 18

أوجد

(1) $\lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 17)$

$= 1^3 + 3(1)^2 - 17$

$= 1 + 3 - 17 = -13$

⇐ السؤال في الكتاب :

$\lim_{x\to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

$= 1^3 + 3(1)^2 - 2(1) - 17$

$= 1 + 3 - 2 - 17 = -15$

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

بفرض أن :

نهاية المقام $\neq 0$

$g(x) = x + 2$

$g(2) = 2 + 2$

$= 4 \; , \; 4 \neq 0$

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

$= \frac{2^2 + 5(2) + 6}{2 + 2} = \frac{4 + 10 + 6}{4}$

$= 5$

H.L.

مثال (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ \frac{5}{x} & x>1 \end{cases}$$

يسار

يمين

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x+2)$$
$$= 3(1)+2 = \boxed{5}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{5}{x}\right)$$
$$= \frac{5}{1} = \boxed{5}$$

$$\because \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

حاول أن تحل (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$

يسار

يمين

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2-3)$$
$$= 2^2-3 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-1)$$
$$= 2-1 = \boxed{1}$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

H.L.

حاول أن تحل (5) صـ 19 : إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

يمين
يسار

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 1} g(x)$

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$\lim_{x \to 1^-} (x^2+1) = 1^2+1 = 2$, $2 \neq 0$

نهاية المقام $\neq 0$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3+x)$

$= 1^3 + 1 = 2$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim_{x \to 1^+} g(x)$

$\therefore \lim_{x \to 1} g(x)$ غير موجودة

حاول أن تحل (6) صـ 20 :

لتكن : $f(x) = x^2 - |x+2|$

(a) أكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

(b) أوجد : $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (x+2) & : x > -2 \\ 4 & : x = -2 \\ x^2 + (x+2) & : x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & : x > -2 \\ 4 & : x = -2 \\ x^2 + x + 2 & : x < -2 \end{cases}$$

c)

نعم توجد نهاية عندما $x \to -2$ تساوي 4

b) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2+x+2)$

$= (-2)^2 + (-2) + 2 = 4$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2-x-2)$

$= (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$

قاعدة القوة

نظرية (6) : بفرض أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة و كانت n عددا صحيحيا موجبا فإن :

$(a) \lim_{x \to c}(f(x))^n = (\lim_{x \to c} f(x))^n$

$(b) \lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ في حالة n عددا زوجيا يشترط أن يكون $c > 0$

$= \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}(c) \quad \lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$ في حالة n عددا زوجيا يشترط أن يكون $\lim_{x \to c} f(x) > 0$

مثال (7) صـ 21 : و حاول أن تحل (7) صـ 22

أوجد

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

$= \left(\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)\right)^5$

$= \left((-1)^2 - 3(-1) - 1\right)^5$

$= (1 + 3 - 1)^5$

$= 3^5$

$= 243$

2) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 3}$

$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 2} (x - 3)}$

$= \sqrt[3]{2 - 3}$

$= \sqrt[3]{-1}$

$= -1$

3) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

$\lim_{x \to 5} x^2 - 5 = 5^2 - 5$
$= 20 \ , \ 20 > 0$

$\therefore \lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

$= \sqrt{\lim_{x \to 5} (x^2 - 5)}$

$= \sqrt{5^2 - 5}$

$= \sqrt{25 - 5}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

4) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

$\lim_{x \to -1} x - 2 = -1 - 2$
$= -3 \ , \ -3 \neq 0$
نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

$= \frac{\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{\lim_{x \to -1} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt[3]{\lim_{x \to -1} (x^3 - 4x + 5)}}{\lim_{x \to -1} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt[3]{(-1)^3 - 4(-1) + 5}}{-3}$

$= \frac{\sqrt[3]{8}}{-3} = \frac{-2}{3}$

5) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

$\lim_{x \to 3} (3x^2 - 2)$
$= 3(3)^2 - 2$
$= 25 \ , \ 25 > 0$

$\lim_{x \to 3} (x - 2)$
$= 3 - 2$
$= 1 \ , \ 1 \neq 0$
نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

$= \frac{\lim_{x \to 3} \sqrt{3x^2 - 2}}{\lim_{x \to 3} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to 3} (3x^2 - 2)}}{\lim_{x \to 3} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt{25}}{1} = \frac{5}{1}$
$= 5$

التاريخ: / /٢٠١٨

إلغاء العامل الصفري

ملاحظات :

1) عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط و المقام و حصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة

2) يمكن إستخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة

3) إذا كان a صفر من أصفار الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$

4) مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددا نسبيا

إلغاء العامل الصفري

- التحليل
- الضرب في المرافق
- تعريف المطلق
- القسمة التركيبية
- توحيد المقام

مثال (8) صـ 22 : أوجد إن أمكن :

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة : $\frac{0}{0}$

تحليل حدودية ثلاثية

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

عامل مشترك

$$= \frac{x+2}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x}$$

$\lim_{x \to 1} x = 1$, $1 \neq 0$ نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

تحليل فرق بين مكعبين

$$\frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+(2+x)(2)+2^2\right)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}}$$

$$= x^2+6x+12 \quad , \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim_{x \to 0} (x^2+6x+12)$$

$$= (0)^2+6(0)+12$$

$$= 12$$

حاول أن تحل (9) صـ 25 : أوجد إن أمكن

$$4) \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ -1 في كل من البسط والمقام، نحصل على صيغة غير معينة

ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

تحليل مجموع مكعبين تحت الجذر التكعيبي

$$= \frac{\sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+1)}\ \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\cancel{(x+1)^3}}\ \sqrt[3]{x^2-x+1}}{\sqrt[3]{\cancel{(x+1)^3}}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to -1} (x^2-x+1)}$$

$$= \sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1}$$

$$= \sqrt[3]{3}$$

حاول أن تحل (8) صـ 23 أوجد إن أمكن

$$3) \lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ -7 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

تحليل فرق بين مربعين

$$\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \frac{(x+4-3)(x+4+3)}{x(x+7)}$$

عامل مشترك

$$= \frac{(x+1)\cancel{(x+7)}}{x\cancel{(x+7)}}$$

$$= \frac{x+1}{x}$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \lim_{x \to -7} \frac{x+1}{x}$$

$$\lim_{x \to -7} x = -7 \quad , \quad -7 \neq 0$$

نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x \to -7} \frac{x+1}{x} = \frac{-7+1}{-7}$$

$$= \frac{6}{7}$$

التاريخ: / / ٢٠١٨

H.L.

أوجد

كراسة التمارين صـ 10 رقم 15

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 3 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3} = \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3} \cdot \frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$= \frac{x^2+7-16}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$= \frac{x^2-9}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$= \frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(\cancel{x-3})(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$= \frac{x-3}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+7} = \sqrt{3^2+7}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4 \ , \ 4>0$$

باقي الحل

حاول أن تحل (9) صـ 25 : أوجد إن أمكن

1) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 9 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

مرافق المقام

$$\frac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x + x\sqrt{x} - 27 - 9\sqrt{x}}{3^2 - (\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{3x + x\sqrt{x} - 9\sqrt{x} - 27}{9-x}$$

$$= \frac{x(3+\sqrt{x}) - 9(\sqrt{x}+3)}{9-x}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{x})(\cancel{x-9})}{-(\cancel{x-9})}$$

$$= -(3+\sqrt{x})$$

$$\therefore \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 9} -(3+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3 \ , \ 3>0$$

$$\therefore \lim_{x\to 9} -(3+\sqrt{x}) = -(3+3) = -6$$

H.L.

تابع

2

$$\lim_{x \to 3} (x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)$$

$$= (3-1)(\sqrt{3^2+7}+4)$$

$$= 2(\sqrt{16}+4)$$

$$= 2(4+4)$$

$$= 16 \quad , 16 \neq 0$$

نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$= \frac{3+3}{16}$$

$$= \frac{6}{16}$$

$$= \frac{3}{8}$$

H.L.

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن X بـ 1 في كل من البسط والمقام ، نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

بالتحليل : فرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \quad , x \neq 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$$

$$= \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= 1^2 + 1 + 1$$

$$= 3$$

4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

بالتعويض المباشر عن X بـ 2- في كل من البسط والمقام ، نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$= \frac{(x^2-4)(\sqrt[3]{(x+2)^2})}{x+2}$$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{x+2}}$$

$$= (x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2})$$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to -2} (x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2})$$

$$= \lim_{x \to -2} (x-2) \cdot \lim_{x \to -2} (\sqrt[3]{(x+2)^2})$$

$$= \lim_{x \to -2} (x-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to -2} (x+2)^2}$$

$$= (-2-2)\sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$= (-4)(0)$$

$$= 0$$

CH.L.

كراسة التمارين صـ 10 رقم 14

2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام، نحصل على صيغة غير معيّنة $\frac{0}{0}$

$$\frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x+1)} & : x > -2 \\ \dfrac{-(\cancel{x+2})}{(\cancel{x+2})(x+1)} & : x < -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & : x > -2 \\ \dfrac{-1}{x+1} & : x < -2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -2} (x+1) = -2+1 = -1 \ , \ -1 \neq 0$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to -2^-} -1}{\lim\limits_{x \to -2^-} (x+1)}$$

$$= \frac{-1}{-2+1} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to -2^+} 1}{\lim\limits_{x \to -2^+} (x+1)}$$

$$= \frac{1}{-2+1} = \boxed{-1}$$

$$\therefore \lim_{x \to -2^-} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} \neq \lim_{x \to -2^+} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

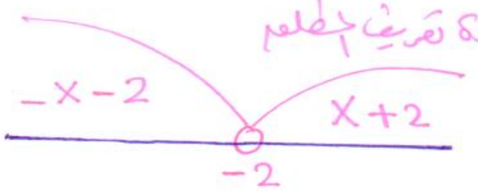
$\therefore \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$ غير موجودة

حاول أن تحل 8 صـ 23 أوجد إن أمكن

1) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x+2|-7}{x^2-25}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 5 في كل من البسط والمقام، نحصل على صيغة غير معيّنة $\frac{0}{0}$

إعادة تعريف القيم



عندما $x \to 5$

$|x+2| = x+2$

$$\frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \frac{x+2-7}{x^2-25}$$

$$= \frac{\cancel{x-5}}{(\cancel{x-5})(x+5)}$$

$$= \frac{1}{x+5}$$

$$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{x+5}$$

$\lim\limits_{x \to 5} x+5 = 5+5$

$= 10 \ , \ 10 \neq 0$

نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} 1}{\lim\limits_{x \to 5} x+5}$$

$$= \frac{1}{15}$$

CH.L.

التاريخ: / / ٢٠١٨

حاول أن تحل (10) صـ 26 : أوجد إن أمكن :

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 3 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -2 & -4 & 3 \\ & & 3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

$= x^2 + x - 1$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

$= \lim_{x \to 3} (x^2 + x - 1)$

$= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 1$

$= 3^2 + 3 - 1$

$= 9 + 3 - 1$

$= 11$

2) $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 22 \\ & & -2 & -4 & -6 & -12 & -22 \\ \hline & -1 & -2 & -3 & -6 & -11 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} (-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11$

$= \lim_{x \to 2} -x^4 - \lim_{x \to 2} 2x^3 - \lim_{x \to 2} 3x^2 - \lim_{x \to 2} 6x - \lim_{x \to 2} 11$

$= -2^4 - 2(2)^3 - 3(2^2) - 6(2) - 11$

$= -16 - 16 - 12 - 12 - 11$

$= -67$

التاريخ: / / ٢٠١٨

H.L.

في التمارين (20–22)، أوجد كلاً مما يلي:

(20) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$
$$=\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$

$\lim_{x\to1}(x+1)=1+1=2,\ 2\neq0$ نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}(x+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

(21) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

$\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3,\ 3\neq0$ نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{\lim_{x\to1}(x+2)}{\lim_{x\to1}(x^2+x+1)}=\frac{1+2}{3}=1$$

بالتعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

(22) $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}\right)$

توحيد المقامات

$$\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}=\frac{x(x+2)-4x}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{x^2+2x-4x}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}$$

عامل مشترك

$$=\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$
$$=\frac{x}{x+2}$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x}{x+2}$$

$\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4,\ 4\neq0$ نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x}{x+2}=\frac{\lim_{x\to2}x}{\lim_{x\to2}(x+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

بند 2-1

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

أولا : نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

إذا كانت x تأخذ قيما كبيرة جدا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرا جهة اليمين على خط الأعداد)

فإننا نقول $x \to \infty$

وإذا كانت x تأخذ قيما صغيرة جدا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرا جهة اليسار على خط الاعداد)

فإننا نقول $x \to -\infty$

تعريف (3) :

لتكن f دالة معرفة في الفترة (a,∞) فإن : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

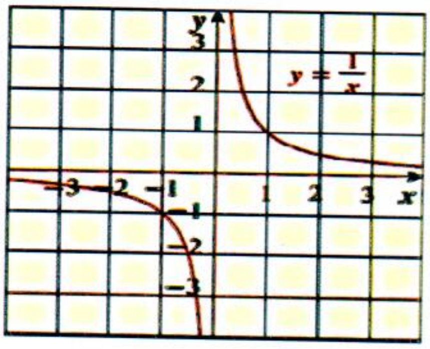
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞

تعريف (4) :

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty,a)$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$

نظرية (7) :



لتكن f : $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8) :

لتكن f : $k \in R$ ، $n \in z^+$ ، $f(x) = \frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

نظرية (9) :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \ ; \ \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \right)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \right)$$

نظرية (10) :

إذا كان n عدد زوجي موجب فإن : $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

إذا كان n عدد فردي موجب فإن :

1) $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$ 2) $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

H.L.

حاول أن تحل (1) صـ 30 أوجد النهايات التالية إن أمكن

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$$

$$\frac{x+2}{x^2+9} = \frac{\cancel{x}(1+\frac{2}{x})}{x^{\cancel{2}}(1+\frac{9}{x^2})}$$

$$= \frac{1+\frac{2}{x}}{x(1+\frac{9}{x^2})}$$

$$\therefore \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2+9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{x(1+\frac{9}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{(1+\frac{2}{x})}{(1+\frac{9}{x^2})}\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} 1+\frac{9}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{9}{x^2}$$

$$= 1+0$$

$$= 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x \to -\infty} 1+\frac{2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x}$$

$$= 1+0$$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{9}{x^2}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{2}{x})}{\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{9}{x^2})}$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$$

$$\frac{x^3-3x+1}{x^3+5} = \frac{\cancel{x^3}(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3}(1+\frac{5}{x^3})}$$

$$= \frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x^3}}$$

$$\therefore \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x^3}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 1+\frac{5}{3} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^3}$$

$$= 1+0$$

$$= 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

نهاية المقام $\neq 0$

H.L.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 - \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$$

$$= 1 - 0 - 0$$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{5}{x^3}} = \frac{\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

التاريخ: / / ٢٠١٨

صيغ غير معينة

بند 1-3

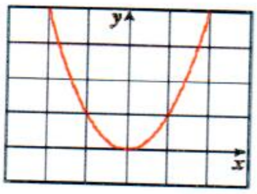
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث، $f(x) = ax^n \ , \ n \in Z^+ \ , \ a \neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه،

أكمل ما يلي،

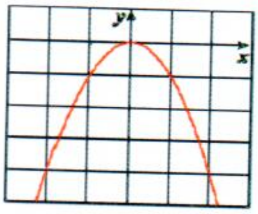
1) n عددًا زوجيًا , $a > 0$



$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

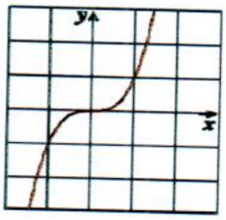
2) n عددًا زوجيًا , $a < 0$



$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

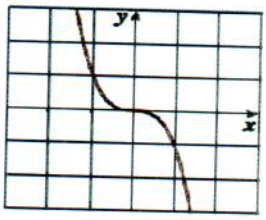
3) n عددًا فرديًا , $a > 0$



$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

4) n عددًا فرديًا , $a < 0$



$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

مما سبق نجد :

لتكن : $f(x) = ax^n \ ، n \in z^+ \ ، a \in R^+$:

1) إذا كان n عدد زوجي فإن : $\lim_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ، a > 0 \\ -\infty & ، a < 0 \end{cases}$

2) إذا كان n عدد فردي فإن :

$\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ، a > 0 \\ -\infty & ، a < 0 \end{cases}$ ، $\lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & ، a > 0 \\ \infty & ، a < 0 \end{cases}$

فمثلا : $\lim_{x \to -\infty} 5x^7 = -\infty$ ، $\lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty$ ، $\lim_{x \to \infty} -4x^4 = -\infty$ ، $\lim_{x \to \infty} 5x^6 = \infty$

ملاحظة : إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \ ، \ a_n \in R^*$

فإن : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

لحساب نهاية دالة على الصورة : $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث : $\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية : $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ و تسمى صيغ غير معينة

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ و حصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$ تسمى أيضا صيغة غير معينة

و لحساب النهاية نلجأ لبعض الأساليب الجبرية :

مثال (1) صـ 37 : لو حسبنا نهاية الدالة لحصلنا على صيغة غير معينة $(\infty - \infty)$

أوجد : $\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1)$

$= \lim_{x \to \infty} 2x^2 = \infty$

لو حسبنا نهاية الدالة لحصلنا على صيغة غير معينة $(\infty - \infty)$

سؤال إضافي : $\lim_{x \to -\infty} (-4x^2 + 7x - 2)$

$= \lim_{x \to -\infty} -4x^2 = -\infty$

حاول أن تحل (1) صـ 37

$\lim_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

لو حسبنا نهاية الدالة لحصلنا على صيغة غير معينة $(\infty - \infty)$

$= \lim_{x \to \infty} -3x^2 = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 - 5x - 1)$

$= \lim_{x \to -\infty} -2x^3 = \infty$

CH.L.

نظرية (11)

إذا كانت كل من f، g دالة حدودية حيث :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$$

فإن : $n = m$: $(a)\ \lim_{x \to} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

$n < m$: $(b)\ \lim_{x \to} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

النظرية صحيحية عندما $x \to -\infty$

حاول أن تحل (2) صـ 39 إستخدم النظرية السابقة في حساب كل من : درجة البسط = درجة المقام

$$(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

درجة البسط أصغر من درجة المقام

$$(b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$$

$$= 0$$

مثال (3) صـ 39 : إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a،b

$$\because \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \ , \ 3 \neq 0$$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

$$\therefore ax^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{bx+3}{2x+5}$$

$$\therefore \frac{b}{2} = 3$$

$$b = 2 \cdot 3$$
$$= 6$$

حاول أن تحل (3) صـ 40 : أوجد قيمة كل من الثابتين a،b إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

$$\because \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1 \ , \ -1 \neq 0$$

$\therefore$ درجة حدودية المقام = درجة حدودية البسط

$$\therefore ax^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{bx-3}$$

$$\therefore \frac{1}{b} = -1$$

$$\therefore b = -1$$

التاريخ: / / ٢٠١٨

CH.L.

حاول أن تحل (4) صـ 41 :

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

$$\frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2(2 - \frac{1}{x})}}{x(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{|x| \sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{x(1 + \frac{1}{x})} \rightarrow |x| = x \;:\; x > 0$$

$$= \frac{\cancel{x} \sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{\cancel{x}(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2 - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 2 - 0$$

$$= 2 \,,\; 2 > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1 \,,\; 1 \neq 0$$

نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x}}\right)}{\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to -\infty} (2 - \frac{1}{x})}}{\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

التاريخ: / /٢٠١٨

حاول أن تحل (4) صـ 41 :

السؤال في كتاب الطالب $x \to -\infty$ والحل على هذا الأساس

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

$$\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{x(3-\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{9}{x^2})}}$$

$$= \frac{x(3-\frac{5}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} \Rightarrow |x| = -x \; : x<0$$

$$= \frac{\cancel{x}(3-\frac{5}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$= \frac{3-\frac{5}{x}}{-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{x^2}$$

$$= 1-0$$
$$= 1 \;, \; 1>0$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$$
$$= -\sqrt{1}$$
$$= -1 \;, \; -1 \neq 0$$ نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(3-\frac{5}{x})}{-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(3-\frac{5}{x})}{\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$= \frac{3-0}{-1} = -3$$

H.L.

كراسة التمارين : صـ 15

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

$$\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}} = \frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$ $\rightarrow |x| = x \;:\; x>0$

$$= \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \frac{1+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}$$
$$= 1+0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}$$
$$= 1+0+0$$
$$= 1, \quad 1>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = \sqrt{1}$$
$$= 1, \quad 1 \neq 0$$ نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

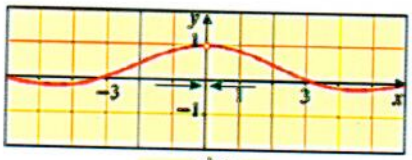
التاريخ: / /٢٠١٨

نهايات بعض الدوال المثلثية

بند 4-1

نظرية (12) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ حيث x بالراديان



$y = \frac{\sin x}{x}$

نتيجة (1) :

إذا كان a,b عددين حقيقين ، $a \neq 0 , b \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

و من تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3) : إذا كان $a, b \in R^+$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

H.L.

مثال (1) صـ 43 : أوجد :

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 , 1 \neq 0$

نهاية المقام $\neq 0$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x-3}{\cos x} = \frac{\lim_{x \to 0}(x-3)}{\lim_{x \to 0} \cos x}$

$= \frac{-3}{1}$

$= -3$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1}$

$= \frac{2}{3}$

H.L.

التاريخ: / /٢٠١٨

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x} =$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

$= 0 \cdot 1$

$= 0$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(2x-1)}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2x-1} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2x-1} \right)$

$= 1 \cdot \frac{1}{-1}$

$= -1$

طريقة أخرى

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(2x-1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} \right)}{(2x-1)}$

$= \frac{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{\lim_{x \to 0} (2x-1)}$

$= \frac{1}{-1}$

$= -1$

H.L.

5) $\lim_{x \to 0} \frac{x\sin x}{\cos x - 1}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x\sin x(\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x\sin x(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x\cancel{\sin x}(\cos x + 1)}{-\sin^{\cancel{2}} x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-x(\cos x + 1)}{\sin x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} (\cos x + 1)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{\sin x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \cos x + \lim_{x \to 0} 1\right)$

$= -1 \cdot (1 + 1)$

$= (-1)(2)$

$= -2$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x}$

$= \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} (1 + \cos x)}$

$= \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} \cos x}$

$= \frac{1}{1 + 1}$

$= \frac{1}{2}$

التاريخ: / / ٢٠١٨

H.L.

مثال (2) صـ 44 : أوجد

1) $\lim_{x \to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{5\tan x}{4x} - \frac{3\sin x}{4x} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{5\tan x}{4x} - \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{4x}$

$= \frac{5}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{3}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$= \frac{5}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 1$

$= \frac{5}{4} - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2}$

مثال (3) صـ 44 :

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x\cos x}{3x}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x \tan x}{3x} - \frac{2\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cos x \right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\cos x$

$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \cos x$

$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times 1$

$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

$= -\frac{1}{3}$

التاريخ: / / ٢٠١٨

حاول أن تحل (3) صـ 45 : أوجد :

3) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cancel{x} \sin x}{3x^{\cancel{2}}} - \frac{x^{\cancel{2}}}{3x^{\cancel{2}}} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{3x} - \frac{1}{3} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$

$= 0$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3\cancel{x} \cos 4x}{5\cancel{x}} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{5x} + \lim_{x\to 0} \frac{3}{5} \cos 4x$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times 1$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

$= 1$

الاتصال عند نقطة

بند 5-1

تعريف (8) : الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف نجد أن شروط إتصال الدالة عند $x = c$

1) الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة

2) $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط فنقول ان f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$

H.L.

حاول أن تحل (1) صـ 50 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \le 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$ ابحث اتصال f عند $\boxed{x = 0}$

$f(0) = 0^3 + 0$
$= 0$ — ①

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + x)$
$= 0^3 + 0$
$= 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{x+1}\right)$
$= \frac{0^2}{0+1}$
$= \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ — ②

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

من 1 و 2 :

$\therefore$ f متصلة عند $x=0$

H.L.

حاول أن تحل (2) صـ 50 :

ابحث اتصال الدالة f عند $\boxed{x=2}$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & : x<2\\ 1 & : x=2\\ x^2+1 & : x>2\end{cases}$$

$f(2)=1$ —— ①

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x+1)$$
$$=2(2)+1$$
$$=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+1)$$
$$=2^2+1$$
$$=5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$$ —— ②

من ١ و ٢ :

∴ الدالة f ليست متصلة عند $x=2$

مثال ٣ صـ٥١ـ

ابحث اتصال الدالة f عند $\boxed{x=2}$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{|x-2|} & : x\neq 2\\ 1 & : x=2\end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & : x>2\\ -(x-2) & : x<2\end{cases}$$

$$\frac{x-2}{|x-2|}=\begin{cases}\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}} & : x>2\\[2mm] \dfrac{\cancel{x-2}}{-(\cancel{x-2})} & : x<2\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1 & : x>2\\ -1 & : x<2\\ 1 & : x=2\end{cases}$$

$f(2)=1$ —— ①

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

$$\because \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة —— ②

من ١ و ٢ :

∴ الدالة f ليست متصلة عند $x=2$

التاريخ: / /٢٠١٨

H.L.

حاول أن تحل (3) صـ 51 :

ابحث اتصال الدالة f عند $\boxed{x=-1}$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : \ x\neq -1\\ 2 & : \ x=-1\end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases}x+1 & : x>-1\\ -(x+1) & : x<-1\end{cases}$$

$$\frac{|x+1|}{x+1}-2x=\begin{cases}\frac{x+1}{x+1}-2x & : x>-1\\ \frac{-(x+1)}{x+1}-2x & : x<-1\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1-2x & : x>-1\\ -1-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$f(-1)=2$ —— ①

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)$$
$$=-1-2(-1)=1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)$$
$$=1-2(-1)$$
$$=3$$

$$\because \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة —— ②

صـ 1 2 :

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=-1$

التاريخ: / /٢٠١٨

يمكن التخلص منه عن طريق
(إعادة تعريف الدالة عند هذه النقطة)

الإنفصال الناتج من أن
النهاية لا تساوي قيمة الدالة عند النقطة
الدالة لها نهاية عند هذه النقطة و غير معرفة عندها

الإنفصال الناتج من أن
النهاية من جهة اليمين لا تساوي النهاية من جهة اليسار (إنفصال نتيجة قفزة)
النهاية غير موجودة (إنفصال لا نهائي)

CH.L.

التخلص من الانفصال معلق بينما تعيين نقاط الانفصال مطلوب

كراسة التمارين صـ 19 ابحث إتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x = 1 \end{cases} \quad , x = 1$

8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : \quad x \neq 0 \\ -3 & : \quad x = 0 \end{cases} \quad , x = 0$

الإجابات في الصفحات التالية

أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$

10) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : \quad x < 3 \\ 2ax & : \quad x \geq 3 \end{cases}$

H.L.

8

$$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-3x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x^2-3x}{-x} & : x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}} & : x > 0 \\ \dfrac{\cancel{x}(x-3)}{-\cancel{x}} & : x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x-3 & : x > 0 \\ -3 & : x = 0 \\ -x+3 & : x < 0 \end{cases}$$

$f(0) = -3$ —— (1)

$$\lim_{x\to 0^-} (f x) = \lim_{x\to 0^-} (-x+3)$$
$$= -0+3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-3)$$
$$= 0-3$$
$$= -3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة —— (2)

من 1 و 2

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=0$

9) (H.L.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases}$$

$f(1) = \frac{1}{2}$ —— 1

$$\frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3} + 2}{\sqrt{x^2+3} + 2}$$

$$= \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\therefore \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\lim_{x\to1} x^2+3 = \lim_{x\to1} x^2 + \lim_{x\to1} 3$$

$$= 1^2+3 = 4 \ , \ 4 > 0$$

$$\lim_{x\to1} \sqrt{x^2+3} + 2 = \lim_{x\to1} \sqrt{x^2+3} + \lim_{x\to1} 2$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to1}(x^2+3)} + \lim_{x\to1} 2$$

$$= \sqrt{4} + 2$$

$$= 2 + 2 = 4 \ , \ 4 \neq 0$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$= \frac{\lim_{x\to1}(x+1)}{\lim_{x\to1}(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = f(1)$ —— 2

من 1 و 2 ينتج أن

الدالة f متصلة

عند $x = 1$

C H.L.

10

∵ الدالة f عند $X=3$

$$\therefore \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 3^-} (x^2-1) = \lim_{x \to 3^+} 2ax$$

$$3^2-1 = 2a(3)$$

$$9-1 = 6a$$

$$8 = 6a$$

$$\frac{\cancel{6}a}{\cancel{6}} = \frac{8}{6}$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}$$

التاريخ: / /٢٠١٨

نظريات الاتصال

بند 1-6

نظرية (14) : خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f، g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

الجمع $(1)\ f + g$

الطرح $(2)\ f - g$

الضرب في ثابت $(3)\ k.f$ ، $k \in R$

الضرب $(4)\ f.g$

القسمة $(5)\ \frac{f}{g}$ ، $g(c) \neq 0$

دوال متصلة :

(1) الدالة $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in R$

(2) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in R$

(3) الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

(4) الدالة : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in R$

(5) الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

H.L.

حاول أن تحل (1) صـ 55

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$ ، $c = 3$

لتكن الدالة h : $h(x) = x^2 - 4x + 3$

الدالة g : $g(x) = |x|$

الدالة h كثيرة الحدود متصلة عند $x = 3$

الدالة g دالة القيمة المطلقة x متصلة عند $x = 3$

دالة الجمع f حيث $f(x) = h(x) + g(x)$

هي دالة متصلة عند $x = 3$ (نظرية)

مثال (1) صـ 55 :

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

نفس الحل في الكراسة → $2x$

2) $f(x) = \sin x - \cos x$ ، $c = \frac{\pi}{2}$

لتكن الدالة g : $g(x) = \sin 2x$

الدالة h : $h(x) = \cos x$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة h دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ الدالة f حيث :

$f(x) = g(x) - h(x)$

دالة الطرح متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

(نظرية)

3) $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ ، $c = \frac{\pi}{4}$

لتكن الدالة g : $g(x) = \tan x$

الدالة h : $h(x) = x + 1$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

الدالة h كثيرة الحدود متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

دالة القسمة هي دالة متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

(نظرية)

حاول أن تحل صـ 55 رقم 2

4) ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x - 2}$ عند $x = 1$

لتكن الدالة g : $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

الدالة h : $h(x) = \frac{2x}{x - 2}$

الدالة g هي حدودية نسبية متصلة عند $x = 1$

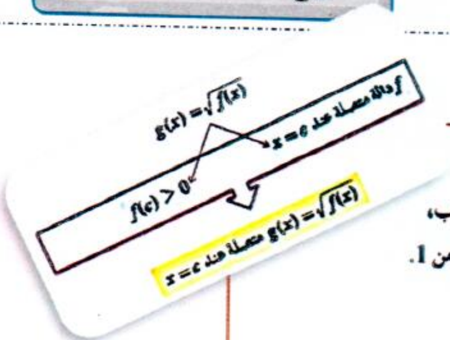
الدالة h هي حدودية نسبية متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ الدالة f حيث :

$f(x) = g(x) - h(x)$

متصلة عند $x = 1$

(نظرية)



اتصال الدوال الجذرية عند نقطة :

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c: c\in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x=c: c\in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$
فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

حاول أن تحل رقم (3) صـ 56

CH.L.

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

السؤال في الكتاب : $X=-2$

a $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ $: ~~x=2~~$ $x=-2$

لتكن الدالة g : $g(x)=\sqrt[3]{x}$

الدالة h : $h(x)=x^2+4$

g دالة جذرية حيث $n=3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x=-2$

(نظرية)

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

$h(-2)=(-2)^2+4$
$=4+4$
$=8 \,,\; 8\neq 0$

$\therefore$ الدالة f حيث:

$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

متصلة عند $x=-2$

(نظرية)

b $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ $: ~~x=2~~$ $x=-2$

لتكن الدالة g :

$g(x)=x^2-4x+3$

الدالة g دالة كثيرة الحدود متصلة عند $x=-2$

$f(-2)=\sqrt{(-2)^2-4(-2)+3}$
$=\sqrt{4+8+3}$
$=\sqrt{15} \,,\; \sqrt{15}>0$

$\therefore$ الدالة f حيث:

$f(x)=\sqrt{g(x)}$

دالة متصلة عند $x=-2$

(نظرية)

التاريخ: / /٢٠١٨

الدالة المركبة :

إذا كانت كل من g , f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

H.L.

حاول أن تحل (4) صـ 58

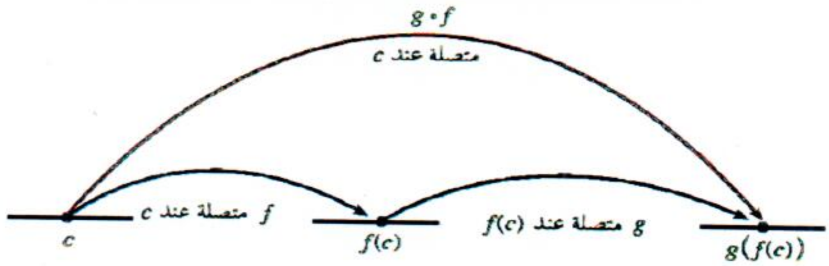
إذا كانت g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x+3$, $g(x) = x^2+3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ **b** $(g \circ f)(-1)$ **c** $(f \circ g)(x)$ **d** $(f \circ g)(-1)$

الإجابات في الصفحة التالية

اتصال الدوال المركبة عند نقطة :

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة
إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.



مثال (6) صـ 59

لتكن: $f(x) = x^2+5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

1 —— الدالة f حدودية متصلة عند $X = -2$

$$f(-2) = (-2)^2 + 5$$
$$= 4 + 5 = 9$$

g دالة متصلة عند كل $X \in R^+$ (الأعداد الموجبة)

∴ g دالة متصلة عند $X = 9$

2 —— g دالة متصلة عند $X = f(-2)$

من 1 ، 2 ينتج أن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند $X = -2$

CH.L.

حاول أن تحل رقم (4)

ص 58

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= (f(x))^2 + 3$

$= (2x+3)^2 + 3$

$= 4x^2 + 12x + 9 + 3$

$= 4x^2 + 12x + 12$

b) $(g \circ f)(-1) = 4(-1)^2 + 12(-1) + 12$

$= 4 - 12 + 12$

$= 4$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= 2(g(x)) + 3$

$= 2(x^2+3) + 3$

$= 2x^2 + 6 + 3$

$= 2x^2 + 9$

d) $(f \circ g)(-1) = 2(-1)^2 + 9$

$= 2 + 9$

$= 11$

التاريخ: / / ٢٠١٨

كراسة التمارين صـ٢٤ـ رقـ٩ـم

لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$.

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

① $x = -2$ الدالة f دالة متصلة عند

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3$
$= 2(4) - 3$
$= 8 - 3 = 5$

الدالة g دالة متصلة
عند كل $x \in [-4, \infty)$
g دالة متصلة عند $x = 5$
∴ g دالة متصلة عند
② $x = f(-2)$

من 1 و 2 ينتج أن:
الدالة المركبة $g \circ f$
متصلة عند $x = -2$

حاول أن تحل (6) صـ 59

لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$.

ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

① $x = 1$ الدالة g متصلة عند

$g(1) = 2(1) + 3$
$= 2 + 3 = 5$

ندرس اتصال الدالة
$f(x) = \frac{|x|}{x+2}$
عند $x = 5$

لتكن الدالة m:
$m(x) = |x|$
دالة متصلة عند $x = 5$

لتكن الدالة h:
$h(x) = x + 2$
دالة متصلة عند $x = 5$

$h(5) = 5 + 2$
$= 7, \quad 7 \neq 0$

∴ الدالة f:
$f(x) = \frac{m(x)}{h(x)}$
متصلة عند $x = 5$

∴ الدالة f متصلة عند:
② $x = g(1)$

من 1 و 2 ينتج أن الدالة المركبة $f \circ g$
متصلة عند $x = 1$

التاريخ: / /٢٠١٨

H.L.

مثال (7) صـ 60

لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

نفرض أن $h(x)=x^2-5x+6$

$g(x)=|x|$

$f(x)=(g\circ h)(x)$

$g(h(x))=|x^2-5x+6|$

1 — الدالة h دالة متصلة عند $x=2$

$$h(2)=2^2-5(2)+6$$
$$=4-10+6$$
$$=0$$

الدالة g متصلة عند $x=0$

2 — g دالة متصلة عند $x=h(2)$

من 1 ، 2 :

$g\circ h$ دالة متصلة عند $x=2$

أي أن الدالة $f(x)$ دالة متصلة عند $x=2$

H.L.

حاول أن تحل (7) صـ 60

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

نفرض أن $h(x) = x^2 - 3x + 2$

$g(x) = |x|$

$f(x) = (g \circ h)(x)$

$g(h(x)) = |x^2 - 3x + 2|$

h دالة متصلة عند $x = 0$ —— (1)

$h(0) = 0^2 - 3(0) + 2$

$= 2$

g دالة متصلة عند $x = 2$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(0)$ —— (2)

من 1 و 2 :

$g \circ h$ متصلة عند $x = 0$

أي أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$

التاريخ: / / ٢٠١٨

الاتصال على فترة

بند 1-7

تعريف (9) الاتصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\,,b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\,,b)$

إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\,,b)$

تعريف (10) الاتصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a\,,b)$.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $(a\,,b]$.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a\,,c]\,,[c\,,b]$ فإن الدالة متصلة على $[a\,,b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $(-\infty, b]\,,[a, \infty)$.

C.H.L.

حاول أن تحل (1) صـ 62

ادرس اتصال f على الفترة المعيّنة:

a $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}\ ,\ [0,3]$

∵ f دالة حدودية نسبية

$\forall x \in R\,,\ x^2+2 \neq 0$

∴ f دالة متصلة على R

∵ $[0,3] \subseteq R$

∴ الدالة f دالة متصلة على $[0,3]$

b $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\ ,\ [0,2]$

$x^2-1=0 \quad \forall x \in \{-1,1\}$

الدالة f دالة حدودية نسبية متصلة

$\forall x \in R - \{-1,1\}$

الدالة f ليست متصلة عند $(x=1)$

$1 \in [0,2]$

الدالة f متصلة $\forall x \in [0,2] - \{1\}$

أي أنها متصلة على كل من

$[0,1)\,,(1,2]$

التاريخ: / /٢٠١٨

CH.L.

مثال ٢ صـ٦٣ـ

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$

$f(x)=x^2-3 : x\in(1,3)$

$\forall x\in(1,3)$

$f(c)=c^2-3$

$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}(x^2-3)=c^2-3$

$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c) \quad \forall c\in(1,3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,3)$ —— ①

$f(1)=-2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)$

$=1^2-3=-2$

$\therefore f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين — ②

$f(3)=6$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)$

$=3^2-3$

$=9-3=6$

$\therefore f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار —— ③

من 1, 2, 3

الدالة f متصلة على $[1,3]$

حاول ان تحل ١ صـ٦٢ـ

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}2 & : x=1\\ \frac{x^2+1}{x} & : 1<x<5\\ \frac{26}{5} & : x=5\end{cases}$

$f(x)=\frac{x^2+1}{x} : x\in(1,5)$

$\forall x\in(1,5)$

$f(c)=\frac{c^2+1}{c}$

$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

$=\frac{c^2+1}{c}$

$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c) \quad \forall c\in(1,5)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,5)$ —— ①

$f(1)=2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

$=\frac{1^2+1}{1}=2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين —— ②

$f(5)=\frac{26}{5}$

$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}\left(\frac{x^2+1}{1}\right)$

$=\frac{5^2+1}{1}=\frac{26}{5}$

$\therefore f(5)=\lim_{x\to 5^-} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=5$ من جهة اليسار —— ③

من 1, 2, 3

الدالة f متصلة على $[1,5]$

التاريخ: / /٢٠١٨

CH.L.

مثال (3) صـ 63

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

مجال الدالة f : $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)$
$=R$

بفرض أن الدالة g : $g(x)=x+3$
دالة كثيرة الحدود متصلة على R
$\because f(x)=g(x) \quad \forall x\in(-\infty,-1]$
$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty,-1]$ ——— ①

بفرض أن الدالة h : $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$
الدالة h حدودية نسبية متصلة لكل $x\in R-\{-3\}$
صفر المقام

$\because f(x)=h(x) \quad \forall x\in(-1,\infty)$
$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-1,\infty)$ ——— ②

تم اثبات اتصال الدالة عند $x=-1$ من جهة اليسار في البند رقم ① على الفترة $(-\infty,-1]$

$f(-1)=2$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{4}{x+3}$$

$$=\frac{4}{-1+3}=2$$

$$\therefore f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-1$ من جهة اليمين ——— ③

من $1,2,3$
الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty,\infty)$
$\therefore$ الدالة f متصلة على R

مثال (4) صـ 63

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$
متصلة على مجالها R

أوجد قيمة الثابتين a , b

∵ الدالة f متصلة على مجالها R

∴ f متصلة عند $x=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$f(0)=2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-a)$
$= 0^2-a = -a$
$-a=2$
$\therefore a=-2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax+b)$
$=(-2)(0)+b$
$=b$
$\therefore b=2$

حاول أن تحل (4) صـ 65

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$$
متصلة على $[1,4]$. **أوجد قيم الثابتين a , b**

∵ الدالة f متصلة على الفترة $[1,4]$ ⟵

∴ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين

$f(1)=5$

$\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax+b)$
$= a(1)+b$
$= a+b$

$\therefore a+b=5$

الدالة f متصلة عند $x=4$ من جهة اليسار

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (ax+b)$
$=4a+b$

$4a+\cancel{b} = \cancel{b}+8$
$4a=8$
$\frac{4a}{4}=\frac{8}{4}$
$a=2$

$a+b=5$
$2+b=5$
$b=5-2$
$b=3$

التاريخ: / /٢٠١٨

H.L.

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

حاول أن تحل (6) صـ66

لتكن f : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

نفرض أن $g(x)=-x^2+4x-3$

$f(x)=\sqrt{g(x)}$

$-x^2+4x-3 \geq 0$

المعادلة المناظرة

$-x^2+4x-3=0$

$x=1 , x=3$

$-$ (1) $+$ (3) $-$

مجال الدالة f هو: $[1,3]$

① $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1,3]$

الدالة g هي دالة متصلة على الفترة

② $[1,3]$

من 1 , 2

نجد أن الدالة f متصلة على $[1,3]$

حاول أن تحل (5) صـ66

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

نفرض أن $g(x)=x^2-7x+10$

$f(x)=\sqrt{g(x)}$

$\therefore D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$\therefore x^2-7x+10 \geq 0$

المعادلة المناظرة:

$x^2-7x+10=0$

$x=2 , x=5$

$+$ (2) $-$ (5) $+$

$\therefore$ مجال الدالة f هو: $R-(2,5)$

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in R-(2,5)$

$[6,10] \subseteq R-(2,5)$

$\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [6,10]$ ①

② الدالة g حدودية متصلة على $[6,10]$

من 1 , 2 ينتج أن

f دالة متصلة على $[6,10]$

التاريخ: / /٢٠١٨

H.L.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على R هو دالة متصلة على R.

حاول أن تحل (7) صـ 67

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على R.

نفرض أن

$g(x) = -x^2+2x+5$

$h(x) = \sqrt[3]{g(x)}$

$f(x) = (h\circ g)(x)$

$f(x) = h(g(x))$

$= h(-x^2+2x+5)$

$= \sqrt[3]{-x^2+2x+5}$

∵ g دالة متصلة على R

∵ h دالة متصلة على R

∴ الدالة f متصلة على R

لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على R.