الإدارة العامة لمنطقة الأحمدي التعليمية
ثـــانـــويـــة عبدالله بن عباس للـبـنـيـن
قسم الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

مـادة الرياضيـات

الاسـم :

الصف :

العام الدراسي : ٢٢ ٢-٢٣ ٢

هذه المذكرة معينه للطالب ولا تغني عن كتاب الطالب وكراسة التمارين

اعداد قسم الرياضيات في ثانوية عبدالله بن عباس _بنين

أ.محمد خير فلاح
قسم الرياضيات
يعتمد/

سجل متابعة الطالب

الأسبوع	الفترة الزمنية		تقييم دفتر الطالب				أيام الغياب					المجموع
	من	إلى	ممتاز	جيد جدا	جيد	ضعيف	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس	
الأول												
الثاني												
الثالث												
الرابع												
الخامس												
السادس												
السابع												
الثامن												
التاسع												
العاشر												
الحادي عشر												

معلم الصف

رئيس القسم

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

بند 1-1   **النهايات**

الجوار و الجوار الناقص

عمل تعاوني : أولا : أكمل الجدول التالي كما في (1) :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الاعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3 \text{ ، } 5)$	4	3 4 5	$(4-1 \text{ ، } 4+1)$	1
2	$(\frac{1}{2} \text{ ، } 1\frac{1}{2})$				
3	$(1\frac{3}{4} \text{ ، } 2\frac{1}{4})$				
4	$(0 \text{ ، } 1)$				
5	$(2.9 \text{ ، } 3.1)$				
6	$(6.8 \text{ ، } 7.2)$				

الفترة المفتوحة $(c-a \text{،} c+a)$ تسمى جوارا للعدد c وفقا للمعيار a حيث $a > 0$

ملاحظات :
- ★ يمكن كتابة الجوار على صورة الفترة المفتوحة $(a \text{ ، } b)$ و يسمى a ، b بطرفي الجوار
- ★ الجوار دائما فترة مفتوحة
- ★ العدد في منتصف الجوار $c = \frac{a+b}{2}$
- ★ بعد العدد (في منتصف الجوار) عن طرفي الجوار $\frac{b-a}{2}$
- ★ إذا كان لدينا دالة معرفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية و تحوي العدد c فإننا نقول أن هذه الدالة معرفة في جوار للعدد c (I تحوي جوارا للعدد c)
- ★ إما إذا كانت الدالة معرفة عند جميع عناصر I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه فإن الدالة تكون معرفة في جوار ناقص للعدد c

تعريف (1) : لتكن x كمية متغيرة ، c عدد حقيقيا .

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب .

$$|x-c| < a$$

$$-a < x-c < a$$

$$c-a < x < c+a$$

$$(c-a \text{ ، } c+a)$$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

أي العبارات التالية صحيح و أيها خطأ ؟

1) إذا كانت x قريبة من العدد 3 وفقا للمعيار 2 فإن $|x-3| < 2$

2) $(-3,5)$ جوارا للعدد 1 وفقا للمعيار 4

3) العدد 4 قريب من العدد 1 وفقا للمعيار 3

4) $(-1,5)$ جوارا للعدد 4

5) $(-1,7)$ تحوي جوارا للعدد 4

6) $[1,4)$ جوار أيسر للعدد 4

7) $(1,4]$ جوار أيمن للعدد 1

8) (-3،5) جواراً للعدد 1 وفقا للمعيار 4

9) إذا كانت x قريبة من العدد 3 وفقا للمعيار 2 فإن $| x-3 | < 2$

10) لتكن x كمية متغيرة ، c عدد اً حقيقياً ، نقول أن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $| x - c |$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

نهاية دالة عند نقطة

نشاط

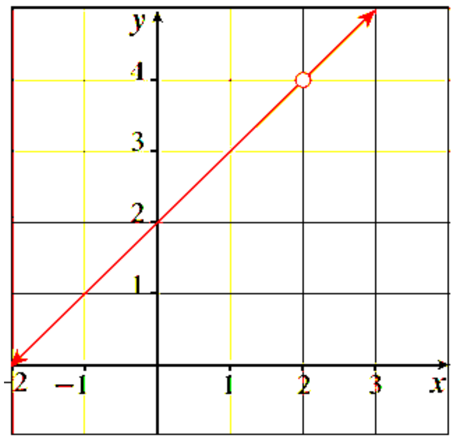
أولًا: لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

a أوجد مجال الدالة f.

b هل يمكن إيجاد $f(2)$؟

c أكمل الجدول التالي:

x	…	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\xrightarrow{}$…	2	…$\xleftarrow{}$	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						



d ماذا تلاحظ على قيم x؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

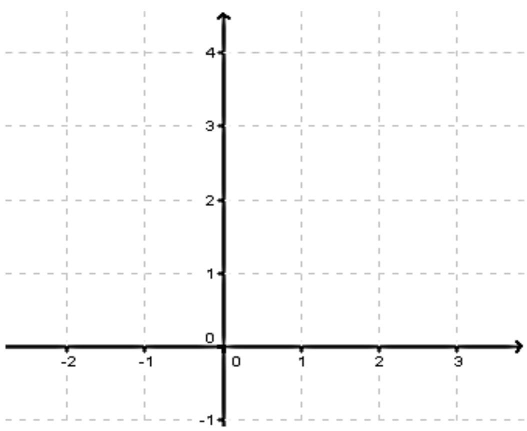
الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x)=x+2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين f , g.



تعريف(2)

ليكن c، L عددين حقيقيين ، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

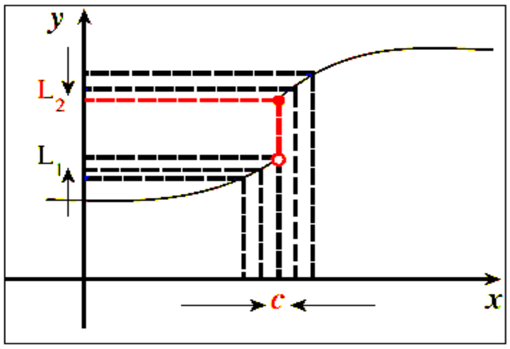
نكتب : $$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

و تعني أنه عندما تقترب x من c باطراد ، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطرراد من L

حقيقة هامة :

وجود نهاية عند نقطة لا تعتمد على كون الدالة معرفة أو غير معرفة عند هذه النقطة

النهاية من جهة واحدة أو جهتين



$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$$

$$L_1 \neq L_2$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$$

$\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة

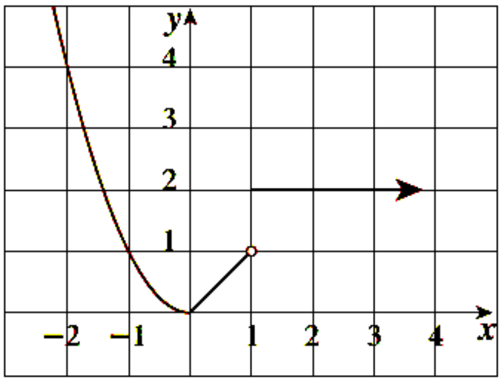
نظرية (1) :

بفرض أن L،c عددين حقيقين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا و فقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة من اليسار و يعبر عن ذلك :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

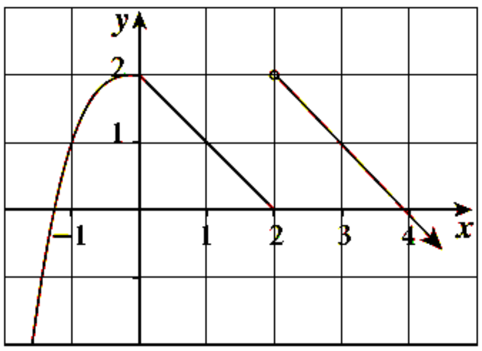
مثال (1) صـ 15 : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f



أوجد إن أمكن :

1. $\lim_{x\to 0} f(x)$
2. $\lim_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim_{x\to -2} f(x)$

حاول أن تحل (1) صـ 16 : يمثل الشكل المقابل بيان دالة f

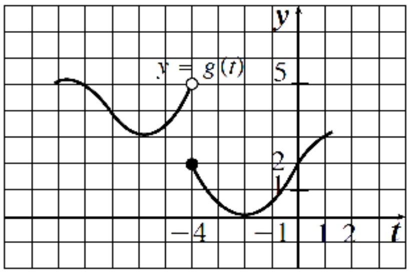


أوجد إن أمكن :

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$
b. $\lim_{x\to 0} f(x)$
c. $\lim_{x\to 2} f(x)$
d. $\lim_{x\to 3} f(x)$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

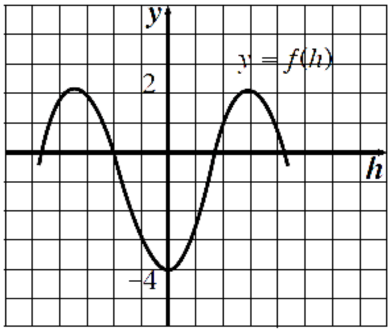
(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن:



(a) $\lim_{t \to -4^-} g(t)$　　(b) $\lim_{t \to -4^+} g(t)$

(c) $\lim_{t \to -4} g(t)$　　(d) $g(-4)$

(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



(a) $\lim_{h \to 0^-} f(h)$　　(b) $\lim_{h \to 0^+} f(h)$

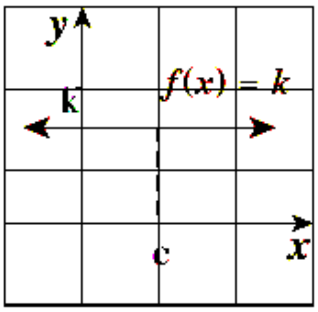
(c) $\lim_{h \to 0} f(h)$　　(d) $f(0)$

حساب النهايات

نظرية (2)

إذا كانت f دالة : $f(x) = k$ و كانا k، c عددان حقيقيان فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$



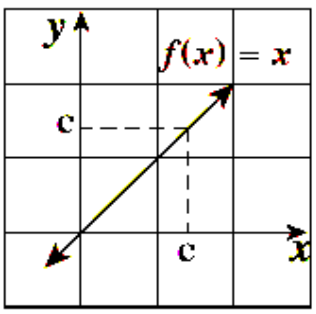
أمثلة :

(1) $\lim_{x \to 4} 3$

نظرية (3)

إذا كانت f دالة : $f(x) = x$ و كانا c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$



أمثلة :

(1) $\lim_{x \to -2} x$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

نظرية (4)

إذا كان k،c،M،L أعدادا حقيقية ، $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، $\lim_{x \to c} f(x) = L$

a) قاعدة الجمع : $\lim_{x\to c}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

b) قاعدة الفرق : $\lim_{x\to c}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

c) قاعدة الضرب : $\lim_{x\to c}\left(f(x) \,.\, g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) \,.\, \lim_{x\to c} g(x) = L \,.\, M$

d) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x\to c}\left(k \,.\, f(x)\right) = k \,.\, \lim_{x\to c} f(x) = k \,.\, L$

e) قاعدة ناتج القسمة : $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M} \quad , M \neq 0$

مثال (2) صـ 17 :

بفرض أن : $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$

أوجد :

(c) $\lim_{x \to 1} \frac{g(x) + 4}{f(x).g(x)}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

(a) $\lim_{x\to 1} \left(f(x) - g(x)\right)$

حاول أن تحل (2) صـ 17 : بفرض أن $\lim_{x \to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

(c) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{8f(x).g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

(b) $\lim_{x \to 2} \left(f(x).g(x)\right)$

(a) $\lim_{x \to 2} \left(f(x) + g(x)\right)$

نظرية (5)

دوال كثيرات الحدود و دوال الحدوديات النسبية

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود ، c عددا حقيقيا ، فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

(b) إذا كانت $f(x)$، $g(x)$ كثيرتي حدود ، c عددا حقيقيا ، فإن

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}, \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3) صـ 18

أوجد : $(c)\ \lim_{x \to 3} (x^2(2-x))$ | $(b)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$ | $(a)\ \lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

حاول أن تحل (3) صـ 18

(a) هل يمكن حل c في المثال (3) بطريقة أخرى ؟

(b) أوجد $(b)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$ | $(1)\ \lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 17)$

مثال (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ \frac{5}{x} & x > 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 1} f(x)$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

حاول أن تحل (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : \quad x < 2 \\ x - 1 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 2} f(x)$

مثال (5) صـ 19 : إذا كانت الدالة g :

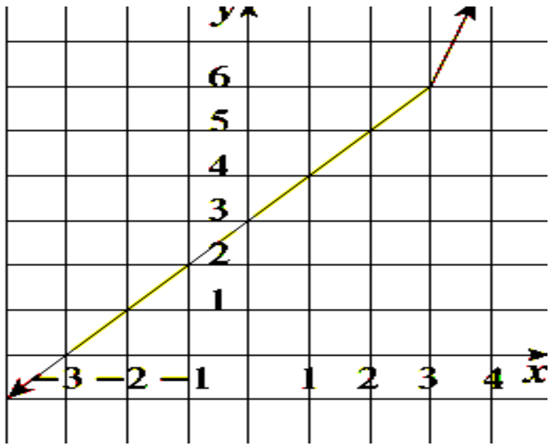
$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : \quad x \le 0 \\ 1 - 2x & : \quad x > 0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 0} g(x)$

حاول أن تحل (5) صـ 19 : إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \quad x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : \quad x \le 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 1} g(x)$



مثال(6) صـ 20 : لتكن : $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل

(a) أكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

(b) أوجد : $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

حاول أن تحل (6) صـ 20 :

لتكن : $f(x) = x^2 - |x+2|$

(a) أكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

(b) أوجد : $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

التاريخ الهجري :

التاريخ الميلادي :

قاعدة القوة

نظرية (6) : بفرض أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة و كانت n عددا صحيحيا موجبا فإن :

$(a) \lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to c} f(x))^n$

$(b) \lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ في حالة n عددا زوجيا يشترط أن يكون $c > 0$

$(c) \lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ في حالة n عددا زوجيا يشترط أن يكون $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$

نكتفي بدراسة حالات الجذور التربيعية و التكعيبية للدوال فقط

مثال (7) صـ 21 : أوجد

$(a) \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

$(b) \lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 3}$

$(c) \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

حاول أن تحل (7) صـ 22 : أوجد

$(a) \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

$(b) \lim\limits_{x \to 4} \left(x + \sqrt{x}\right)^4$

$(c) \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

إلغاء العامل الصفري

ملاحظات :

1) عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط و المقام و حصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة

2) يمكن إستخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة

3) إذا كان a صفر من أصفار الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$

4) مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددا نسبيا

مثال (8) صـ 22 : أوجد إن أمكن :

$(b)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

$(a)\ \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

كراسة التمارين صـ 10 رقم 14

$(14)\ \lim\limits_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x^2 + 3x + 2}$

$(c)\ \lim\limits_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

كراسة التمارين صـ 10 رقم 15

$$(15)\ \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

$$(c)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$$

مثال (9) صـ 24 : أوجد إن أمكن :

$$(a)\ \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

$$(b)\ \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

التاريخ الهجري :

التاريخ الميلادي :

حاول أن تحل (9) صـ 25 : أوجد إن أمكن

$$(a)\ \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

$$(b)\ \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$(c)\ \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

مثال (10) صـ 25 :　　أوجد :

$$(b)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

$$(a)\ \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

حاول أن تحل (10) صـ 26 :　أوجد إن أمكن :

$$(b)\ \lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

$$(a)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

بند 2-1

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

أولا : نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

إذا كانت x تأخذ قيما كبيرة جدا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرا جهة اليمين على خط الأعداد)

فإننا نقول $x \to \infty$

وإذا كانت x تأخذ قيما صغيرة جدا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرا جهة اليسار على خط الاعداد)

فإننا نقول $x \to -\infty$

تعريف (3) :

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(a،\infty)$ فإن : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

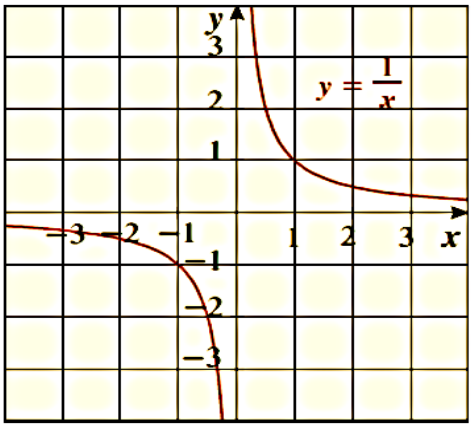
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞

تعريف (4) :

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty،a)$ فإن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$

نظرية (7) :



لتكن f : $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ، \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8) :

لتكن f : $k \in R$ ، $n \in z^+$ ، $f(x) = \frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ، \quad \lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

مثال (1) صـ : 29

أوجد النهايات التالية إن أمكن :

$$(a) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+4}$$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

$(c)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^3}{5 - 7x^3}$

$(b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 5}{x^2 + 4}$

حاول أن تحل (1) صـ 30 أوجد النهايات التالية إن أمكن

$(c)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5}$

$(b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 9}$

$(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x - 2}$

بند 1-3

صيغ غير معينة

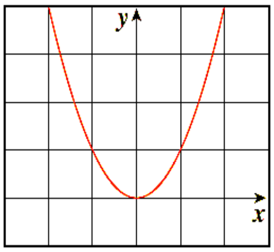
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث: $f(x) = ax^n \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه:

أكمل ما يلي:

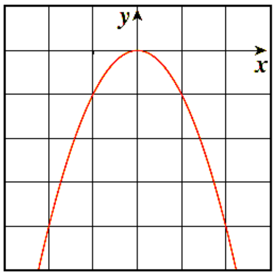
1 n عددًا زوجيًّا , $a > 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

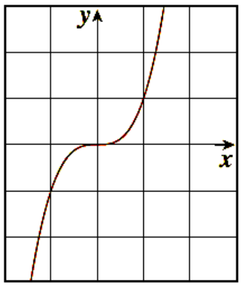
2 n عددًا زوجيًّا , $a < 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

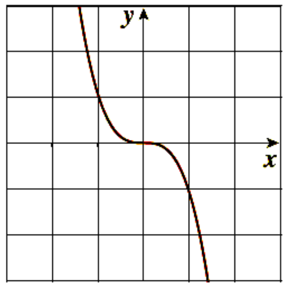
3 n عددًا فرديًّا , $a > 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

4 n عددًا فرديًّا , $a < 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

مما سبق نجد :

لتكن : $a \in R^+$ ، $n \in z^+$ ، $f(x) = ax^n$:

1) إذا كان n عدد زوجي فإن :

$$\lim_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ، a > 0 \\ -\infty & ، a < 0 \end{cases}$$

2) إذا كان n عدد فردي فإن :

$$\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ، a > 0 \\ -\infty & ، a < 0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & ، a > 0 \\ \infty & ، a < 0 \end{cases}$$

فمثلا :

$$\lim_{x \to \infty} 5x^6 = \infty \ ، \ \lim_{x \to \infty} -4x^4 = -\infty \ ، \ \lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty \ ، \ \lim_{x \to -\infty} 5x^7 = -\infty$$

ملاحظة : إذا كانت $a_n \in R^*$ ، $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

فإن : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

لحساب نهاية دالة على الصوراة : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ حيث : $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية : $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ أو $\dfrac{\infty}{-\infty}$ أو $\dfrac{-\infty}{\infty}$ أو $\dfrac{\infty}{\infty}$ و تسمى صيغ غير معينة

كذلك إذا حسبنا $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ و حصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$ تسمى أيضا صيغة غير معينة

و لحساب النهاية نلجأ لبعض الأساليب الجبرية :

مثال (1) صـ 37 :

أوجد : $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1)$

سؤال إضافي : $\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^2 + 7x - 2)$

حاول أن تحل (1) صـ 37

$\lim\limits_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 - 5x - 1)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من f ، g دالة حدودية حيث :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

فإن : $n = m$: $(a)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

$n < m$: $(b)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

النظرية صحيحية عندما $x \to -\infty$

مثال (2) صـ 39 : إستخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

$(c)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}$

$(b)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x}$

$(a)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$

حاول أن تحل (2) صـ 39 إستخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

$(b)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$

$(a)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$

مثال (3) صـ 39 : إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a،b

حاول أن تحل (3) صـ 40 : أوجد قيمة كل من الثابتين a،b إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} = -1$

التاريخ الهجري :

التاريخ الميلادي :

مثال (4) صـ 40 : أوجد :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

حاول أن تحل (4) صـ 41 :

أوجد :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

كراسة التمارين : صـ 15

$$(10)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$$

$$(9)\ \lim_{x \to \infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$$

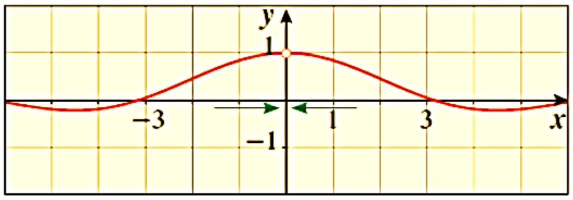
نهايات بعض الدوال المثلثية

بند 4-1

نظرية (12) :

حيث x بالرراديان

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$y = \frac{\sin x}{x}$

نتيجة (1) :

إذا كان a،b عددين حقيقين ، $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

فمثلا :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$$

و من تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

مثال (1) صـ 43 :   أوجد :

$(a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$

$(b)\ \lim_{x \to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

$(c)\ \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

حاول أن تحل (1) صـ 43 :

(a) هل يمكن حل (c) في المثال (|1) بطريقة أخرى ؟

(b) أوجد النهاية :

$(3)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin x}{\cos x - 1}$

$(2)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x \cos x}$

$(1)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

مثال (2) صـ 44 : أوجد (يفضل إعطائه بعد نتيجة 2 ، 3)

$(b)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

$(a)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3) :　إذا كان $a, b \in R^{+}$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (3) صـ 44 :

أوجد :

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

حاول أن تحل (3) صـ 45 :　أوجد :

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

التاريخ الهجري :

كراسة التمارين : صـ17

$$(8)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$(12)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$$

التاريخ الميلادي :

إضافي

$$(0)\ \lim_{x \to 0} \frac{5x^2 - x\sin 3x}{x^2}$$

$$(10)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

بند 5-1

الاتصال عند نقطة

تعريف (8) : الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف نجد أن شروط إتصال الدالة عند $x = c$

1) الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة

2) $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$

مثال (1) صـ 49 :

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : \quad x \geq 1 \\ 5x - 1 & : \quad x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

حاول أن تحل (1) صـ 50 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : \quad x > 0 \end{cases}$$
ابحث اتصال f عند $x = 0$

مثال (2) صـ 50 :

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & : \quad x>3\\ 7 & : \quad x\le 3\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

حاول أن تحل (2) صـ 50 :

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث
$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & : \quad x<2\\ 1 & : \quad x=2\\ x^2+1 & : \quad x>2\end{cases}$$

حاول أن تحل (3) صـ 51 :

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث
$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : \quad x\ne -1\\ 2 & : \quad x=-1\end{cases}$$

كراسة التمارين صـ 19 ابحث إتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$

8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : \quad x \neq 0 \\ -3 & : \quad x = 0 \end{cases} \quad , \ x = 0$

6) $f(x) = \begin{cases} x+5 & : \quad x \geq 5 \\ 5-x & : \quad x < 5 \end{cases} \quad , \ x = 0$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$

10) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : \quad x < 3 \\ 2ax & : \quad x \geq 3 \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x = 1 \end{cases} \quad , \; x = 1$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

نظريات الاتصال

بند 1-6

نظرية (14) : خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f،g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

الطرح $(2)\ f - g$ الجمع $(1)\ f + g$

الضرب $(4)\ f.g$ الضرب في ثابت $(3)\ k.f$ ، $k \in R$

القسمة $(5)\ \dfrac{f}{g}$ ، $g(c) \neq 0$

دوال متصلة :

(1) الدالة $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in R$

(2) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in R$

(3) الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

(4) الدالة : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in R$

(5) الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

مثال (1) صـ 55 :

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

$(b)\ f(x) = \sin x - \cos x$ ، $c = \dfrac{\pi}{2}$

$(a)\ f(x) = x^2 + |x|$ ، $c = -1$

حاول أن تحل (1) صـ 55

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

$(b)\ f(x) = \dfrac{\tan x}{x+1}$ ، $c = \dfrac{\pi}{4}$

$(a)\ f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$ ، $c = 3$

.

مثال (2) صـ 55 :

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

حاول أن تحل صـ 55 رقم 2

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة :

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c : c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x=c : c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$
فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

$g(x)=\sqrt{f(x)}$

f دالة متصلة عند $x=c$ ، $f(c)>0$

$g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

مثال (3) صـ 56

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

b $f(x)=\sqrt{x+3} \quad , \quad x=-1$

a $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \quad x=1$

حاول أن تحل رقم (3) صـ 56

b $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

a $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

الدالة المركبة :

إذا كانت كل من f , g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب.

مثال (4) صـ 58

الدالتان f , g معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ **b** $(g \circ f)(2)$ **c** $(f \circ g)(x)$ **d** $(f \circ g)(2)$

حاول أن تحل (4) صـ 58

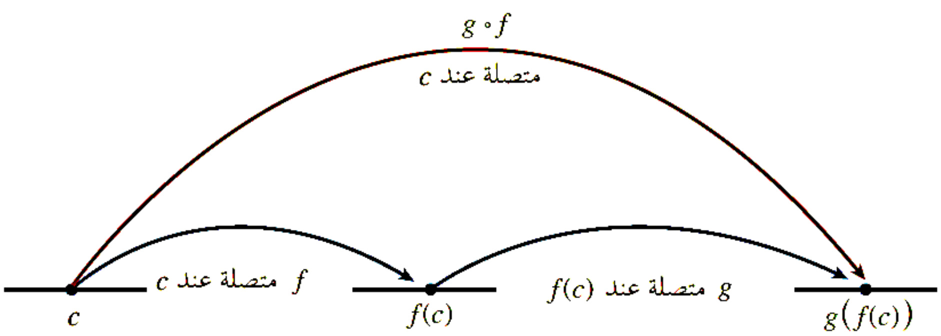
إذا كانت f , g معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ **b** $(g \circ f)(-1)$ **c** $(f \circ g)(x)$ **d** $(f \circ g)(-1)$

اتصال الدوال المركبة عند نقطة :

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.



مثال (6) صـ 59

لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

حاول أن تحل (6) صـ 59

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

مثال (7) صـ 60

لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

حاول أن تحل (7) صـ 60

لتكن: $f(x)=|x^2-3x+2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

بند 1-7

الاتصال على فترة

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b)

إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

2 الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

3 الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a , b)$.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $(a , b]$.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a , c] , [c , b]$ فإن الدالة متصلة على $[a , b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a , \infty) , (-\infty , b]$.

مثال (1) صـ 62

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

b $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $[0 , 5]$

a $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $[-1 , 5]$

حاول أن تحل (1) صـ 62

ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

b $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $[0 , 2]$

a $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$, $[0 , 3]$

مثال (2) صـ 63

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : \; x=1\\ x^2-3 & : \; 1<x<3\\ 6 & : \; x=3\end{cases}$$

حاول أن تحل (2) صـ 63

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \; x=1\\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \; 1<x<5\\ \dfrac{26}{5} & : \; x=5\end{cases}$$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

مثال (3) صـ 63

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

مثال (4) صـ 63

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

حاول أن تحل (4) صـ 65

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5) صـ 65

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$.

حاول أن تحل (5) صـ 66

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

مثال (6) صـ 66

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

حاول أن تحل (6) صـ 66

لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7) صـ 67

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل (7) صـ 67

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

* **السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية** :

لو فرضنا أن نقطة معينة تتحرك في خط مستقيم حيث يحدد موقعها في أي لحظة t بالدالة $d = f(t)$

فإنه عندما $t = t_1$ تكون النقطة عند الموقع $f(t_1)$ وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $f(t_1 + h)$

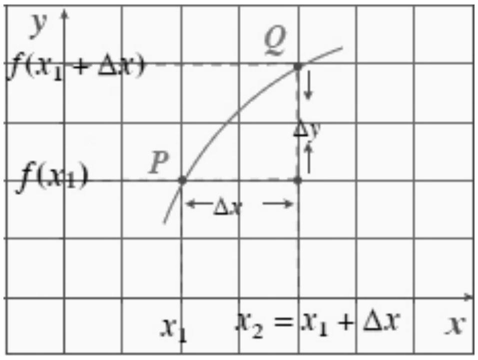
وعليه فإن السرعة المتوسطة للنقطة خلال تلك الفترة يكون : $\overline{v} = \frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$

ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي : $v = \lim\limits_{h \to 0} \overline{v} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t_1+h) - f(t_1)}{h}$

(بشرط أن تكون النهاية موجودة) .

* **متوسط معدل التغير وميل المماس** :

متوسط معدل التغير للدالة y: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$



تمرين : أوجد متوسّط معدّل التغيّر للدالّة f : $f(x) = x^2$ إذا تغيرت x من $x_1 = 1$ إلى $x_2 = 4$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

تعلمت أن ميل $y = f(x)$ عند نقطة إحداثيها السيني $x = a$ هو $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

في حالة وجود هذه النهاية فإنها تسمى **مشتقة الدالة** f **عند** a

----

حاول أن تحل رقم (1) ص 78

أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1 . 3)$.

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

تعريف المشتقّة عند نقطة

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (شرط وجود النهاية)

ويرمز للمشتقة بالرمز: $\frac{dx}{dy}|_{x=a}$ أو $f'(a)$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

حاول أن تحل رقم 1 صـ 80

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$.

التاريخ الهجري :　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

التعريف البديل للمشتقة : صورة أخرى لتعريف المشتقة

مشتقة دالة f عند $x = a$ هي : $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ شرط وجود النهاية .

مثال (2) باستخدام التعريف أوجد المشتقة للدال f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

حاول أن تحل رقم (2) ص 81 :

أوجد المشتقة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$ ، $x = b$

*** المشتقة من جهة واحدة :**

مشتقة دالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_{+}(a)$ وهي : $f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (إن وجدت)

ومشتقة دالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_{-}(a)$ وهي : $f'_{-}(a) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (إن وجدت)

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار **موجودتين ومتساويتين** عند تلك النقطة

حاول أن تحل (3) ص 82

لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

ملاحظات:

* إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (a ، b)$ ، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(a،b)$

* إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (-\infty ، \infty)$ ، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على R

* إذا وضعنا x بدلا من a في تعريف المشتقة نحصل على $f'(a)$ حيث $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية : y' ، $f'(a)$ ، $\frac{d}{dx}(f(x))$ ، $\frac{dy}{dx}$

* لأي دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكون من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي (مجال $f' \subseteq$ مجال f)

أي أن f' دالة مستخلصة من الدالة f .

حاول أن تحل (5) ص 84: لتكن $f(x) = x^2 + 2$ أوجد f' باستخدام تعريف المشتقة .

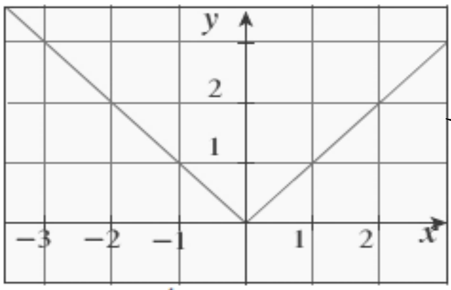
التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

الاشتقاق والاتصال :

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة :

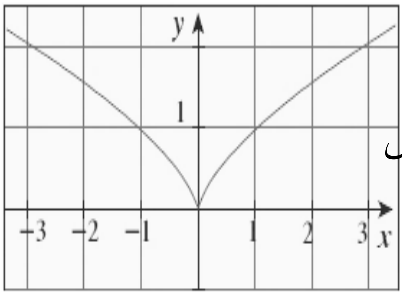
a ركنًا (Corner): حيث المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين **مثال :** $f(x) = |x|$

حيث يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ **غير موجودة .**



يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

b نابًا (Cusp): حيث ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من ∞- في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها . **مثال :** $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

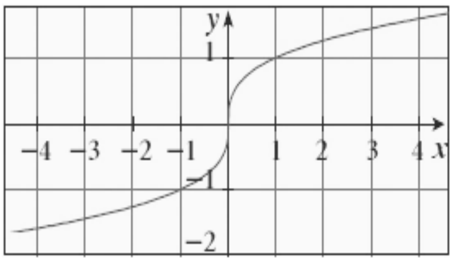


يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

c مماسًا رأسيًا:

يكون المماس للمنحني عند نقطة محددة رأسيا .

مثال : $f(x) = \sqrt[3]{x}$

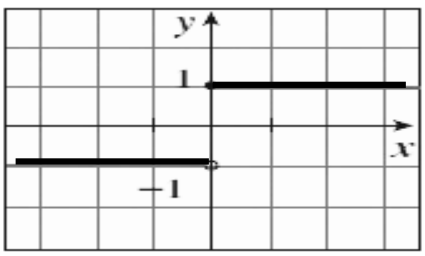


يوجد مماس رأسي عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

d عدم اتصال: وتكون فيها المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة

مثال :دالّة الخطوة (الدرجة) الواحدة
$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \geq 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$

لاحظ هنا أن : المشتقة من جهة اليسار غير موجودة.



يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

حاول أن تحل رقم (6) ص 86

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : x \leq 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$ ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$

التاريخ الهجري : التاريخ الميلادي :

التطبيق :

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \leq 3 \\ x^2-1 & : x > 3 \end{cases}$ **أوجد إن أمكن** $f'(3)$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

حاول أن تحل رقم (9) ص 89

لتكن الدالة f :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$$
أوجد إن أمكن $f'(-1)$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

*** قواعد الاشتقاق** :

قاعدة (1) : مشتقة دالة ثابتة :

إذا كان $f(x)=k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x)=0$ لجميع قيم x الحقيقية .

أي أن : مشتقة أي دالة ثابتة تساوي صفر .

البرهان: إذا كانت $f(x)=c$ حيث c ثابت؛ فإنّ: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

$\therefore\ f'(x)=0$

تدريب : أوجد مشتقة $f(x)$ في الحالات التالية :

$(a)\quad f(x)=5$　　　$(b)\quad f(x)=e^2$　　　$(c)\quad f(x)=\pi^{15}$

قاعدة (2) : مشتقة الدالة $f(x)=x$:

إذا كان $f(x)=x$ فإن $f'(x)=1$ لجميع قيم x الحقيقية .

البرهان :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1 \qquad \therefore\ f'(x)=1$$

تدريب: أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$(a)\quad f(x)=x^4$　　　$(b)\quad g(x)=x^{10}$　　　$(c)\quad h(x)=x^{12}$

قاعدة (3) : قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإنّ: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

أي أن : $f'(x) = nx^{n-1}$

تدريب : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$h(x) = x^{12}$	$g(x) = x^{10}$	$f(x) = x^4$

قاعدة (4) : قاعدة الضرب بعدد ثابت

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

أي أنّ: $(kf(x))' = kf'(x)$

قاعدة (5) : قاعدة الجمع والطر ح

إذا كانت f , g دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من f , g قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أنّ: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

حاول أن تحل رقم (1) ص 92

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

التاريخ الهجري : التاريخ الميلادي :

* قاعدة (6) اشتقاق ضرب دالتين

ضرب دالّتين f , g في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلًا للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))=f(x)\cdot\frac{d}{dx}(g(x))+g(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن :

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

يمكننا القول أن : مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.

حاول أن تحل رقم (2) ص 93

أوجد $\boldsymbol{f'(x)}$ إذا كان

1) $f(x)=(2x+1)(3x-2)$

2) $f(x)=4x^2\,(x+6)$

3) $f(x)=(x^3-4)^2$

التاريخ الهجري : التاريخ الميلادي :

* قاعدة (7) : قاعدة القسمة

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

يمكننا القول إن :

$$\text{مشتقة قسمة دالتين} = \frac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$$

حاول أن تحل رقم (3) ص 95

أوجد مشتقة : $f(x)=\dfrac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

حاول أن تحل رقم (4) ص 96

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ عند النقطة (0 , 1)

* **نتيجة :**

إذا كانت **g** دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن :

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot (g'(x))}{(g(x))^2}$$

حاول أن تحل رقم (5) ص 96

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

قاعدة (8) :قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغيّر x

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، $x \neq 0$ فإنّ: $\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}$ أي أن $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

حاول أن تحل رقم 6 ص 98

لتكن : $y = \frac{3x^2 + 7}{8\,x^2}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

قاعدة:(9)

إذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث n ، m عددان صحيحان مختلفان ، $n \neq 0$ فإنّ: $\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

حاول أن تحل رقم 7 ص 98

أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

التاريخ الهجري : **التاريخ الميلادي :**

حاول أن تحل رقم (8) ص 99

أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

* مشتقات الدوال المثلثية :

أولًا :مشتقات الدوال الجيبية

١- مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام . $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos$

٢- مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب . $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$

مثال : أوجد المشتقات للدوال التالية :

$a) \quad y = x^2 \sin x$

$b) \quad u = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$c) \quad f(x) = \sin^2 x$

حاول أن تحل رقم (1) ص 101

أوجد المشتقات للدوال التالية :

$h(x) = \cos^2 x$

$g(x) = \frac{x}{\cos x}$

$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

ثانيًا : مشتقات الدوال المثلثيّة الأخرى

تذكر أن :

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

مثال : أوجد مشتقات الدوال التالية :

a) $f(x) = tanx + cotx$

b) $f(x) = sec\ x\ .(1 + sinx\ )$

c) $f(x) = cscx + sinx\ .tanx$

حاول أن تحل رقم (2) ص 102

أوجد مشتقات الدوال التالية :

a) $f(x) = \frac{1+tanx}{tanx}$

b) $f(x) = sec\ x + \ cscx$

c) $f(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

التاريخ الهجري : التاريخ الميلادي :

تمرين (1): أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة $f(x) = tan\ x$ عند النقطة $\boldsymbol{p}(\frac{\pi}{4}$ ، $\mathbf{1})$.

تمرين (2): أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة $f(x) = sec\ x$ عند النقطة $\mathbf{F}(\frac{\pi}{3}$ ، $\mathbf{2})$.

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

* قاعدة التسلسل (السلسلة)

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبة $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

حاول أن تحل رقم (1) ص 104

لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$ ، $(g\circ f)'(0)$

تمرين :

لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذاكانت $u = g$ ، $(x)y = f(u)$ فإن : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

حاول أن تحل رقم (3) ص 105

لتكن: $u = 2x^3 + x$, $y = u^2 + 4u - 3$ أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

مثال : يتحرك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أي لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالة :

$S = cos(t^2 + 1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t .

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

ملاحظة : يمكن إيجاد المشتقة في هذا المثال بتطبيق القاعدة :

$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$ ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

حاول أن تحل رقم (4) ص 106

أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x.

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

* قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت f(x) قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددا نسبيا فإن :

$$\frac{d(f(x))^n}{dx} = n(f(x))^{n-1}.\ f'(x)$$

حاول أن تحل رقم (6) ص 107

لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال : أوجد ميل مماس المنحنى $y = sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

حاول أن تحل رقم (7) ص 107

بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

* أولا : المشتقات ذات الرتب العليا

تذكر:

$(a)\quad y = f(x)$

$(b)\quad \dfrac{dy}{dx} = y'$

ملاحظة:
أحيانًا نستخدم قاعدة السلسلة مرتين أو أكثر لإيجاد مشتقة.

ملاحظة:
لا يجب الخلط بين رتبة مشتقة الدالة $y^{(n)}$ و y^n من قوى y.

<u>حاول أن تحل رقم (1) ص 109</u>

إذا كانت : $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

مثال (2) : إذا كانت $y = \sin x$ بين أن $y^{(4)} = y$.

<u>حاول أن تحل رقم (2) ص 109</u>

لتكن الدالة : $y = Cos\, x$ بين أن $y^{(4)} + y'' = 0$

* ثانيا : الاشتقاق الضمني :

حاول أن تحل رقم (4) ص 112

لتكن : $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

حاول أن تحل رقم (5) ص 112

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$

مثال رقم (6) ص 113

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi} \ , \ 2\pi)$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

حاول أن تحل رقم (6) ص 113

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2 , 1)$

مثال رقم (7) ص 113

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3 , 1)$

حاول أن تحل رقم (7) ص 112

للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1 , 1)$

التاريخ الهجري : التاريخ الميلادي :

مثال (8) ص(114) :

إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy''+(y')^2=0$

حاول أن تحل رقم (8) ص 114

إذا كانت $y=x\sin x$ فأثبت أن $y'''+y'+2\sin x=0$

التطبيق :

لتكن $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ أثبت أن: $(1+x^2)f'''(x)+6x f''(x)+6f'(x)=0$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

* تطبيقات على الاشتقاق – النقطة الحرجة

تعريف :

النقطة الداخلية للدالة f $(c\,, f(c))$ تسمى **نقطة حرجة** عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة .

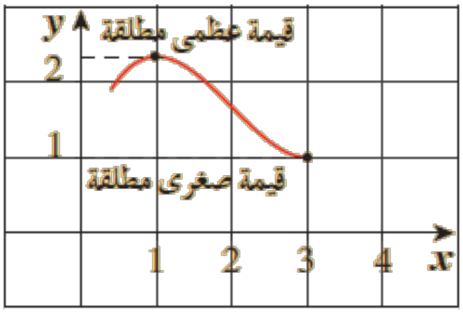
ملاحظة : يسمى العدد c العدد الحرج .

حاول أن تحل رقم (2) ص 127

أوجد النقاط الحرجة للدالة المتصلة : $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

* القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال



تعريف :(1) القيم القصوى المطلقة

راجع الكتاب ص ١٢٢

نظرية (1): إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a\,,b]$ فإن تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة .

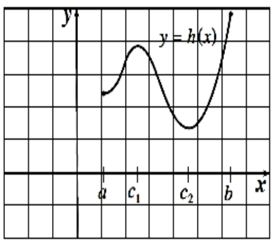
- **خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a\,,b]$**

إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b \quad , \quad x = a$

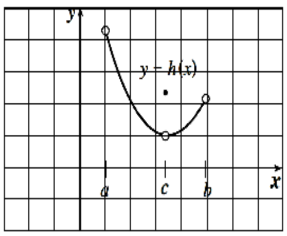
إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a\,,b)$ إن وجدت.

مثال: حدّد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها

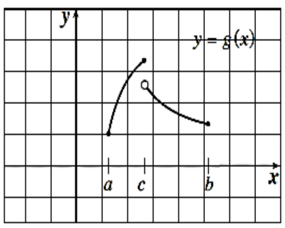
(3)



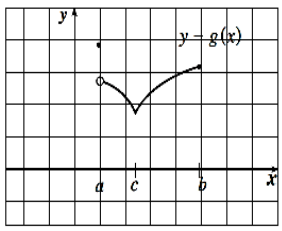
(4)



(5)



(6)



مثال (3) ص 128

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2\,,1]$.

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

حاول أن تحل رقم (3) ص 128

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

مثال (4) ص 129

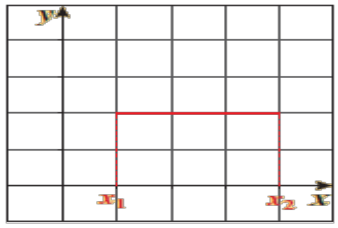
أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

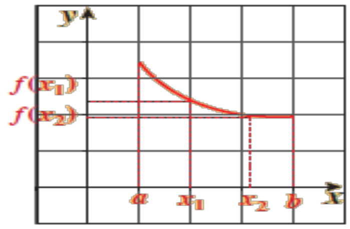
حاول أن تحل رقم (4) ص 129

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x)=\frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

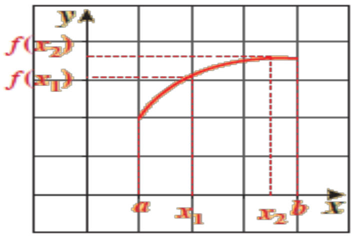
* تزايد وتناقص الدوال



شكل (9)
دالة ثابتة



شكل (8)
دالة متناقصة



شكل (7)
دالة متزايدة

تعريف :(4) تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إنّ:

1) f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2) f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1 , x_2 \in I , f(x_1) = f(x_2)$

الدالّة المطّردة :

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

نظرية :(4) الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة:-

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1) إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).

2) إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).

3) إذا كانت $f'(x) = 0$ x نقطة تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).

حاول أن تحل رقم (4) ص 136

إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

حاول أن تحل رقم 5 صـ ١٣٧

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

* اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليـة

نظريّة : (5) اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالة متصلة على مجالها وكانت $(c،f(c))$ نقطة حرجة .

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

- مناقشة الرسومات الموضحة بالكتاب ص ١٣٩

حاول أن تحل رقم (1) ص 140

لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

النقاط الحرجة للدالة.

الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

القيم القصوى المحلية.

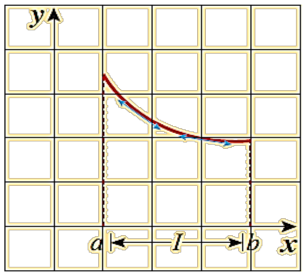
الحـــل :

* **التقعـر – نقطة الانعطاف**

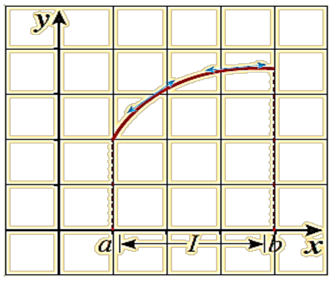
تعريف : (5) التقعّر :-

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأعلى على I.

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأسفل على I.



المنحنى مقعر لأعلى

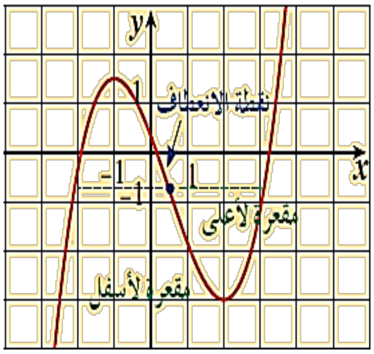


المنحنى مقعر لأسفل

اختبار التقعّر :

إذا كانت $\forall x \in I \quad , \quad f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأعلى على I

إذا كانت $\forall x \in I \quad , \quad f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأسفل على I.



نقطة الانعطاف : تعريف :(6) نقطة الانعطاف

تسمّى النقطة $(c\,, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متّصلة عند c،

ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

حاول أن تحل رقم (3) ص 144

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $\quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

* اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

نظرية :(6) اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

ملاحظة : الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت $f'' = 0$ أو لا يكون لها وجود.
عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقة الاولى للبحث عن القيم القصوى المحليّة

حاول أن تحل رقم (4) ص 146

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

كراسة التمارين : ص 56 :

رقم (15) استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة:

$f(x) = x^2 - 6x + 11$

$f(x) = x^4 - 18x^2$

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

* رسم بيان دوال كثيرات الحدود

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

1- عيّن مجال الدالة f .
2- أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f .
3- عيّن النقاط الحرجة للدالة f .
4- كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية
5- كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت
6 - أوجد نقاطًا إضافية.
7 - ارسم بيان الدالة f .

حاول أن تحل رقم (1) ص 149

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

التاريخ الهجري :　　　　　　التاريخ الميلادي :

صفحة بيانية

مثال

- ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

صفحة بيانية

مثال

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها .

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

صفحة بيانية

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

<u>كتاب الطالب رقم (2) ص 149</u>

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

صفحة بيانية

التاريخ الهجري : 					التاريخ الميلادي :

* تطبيقات على القيم القصوى

الاشتقاق يقدم لنا الطريقة الناجحة لإيجاد أكبر القيم وأصغرها للدوال ويمكن أن تساعدنا الخطوات التالية على ذلك:

1- افهم المسألة :اقرأ المسألة بعناية، حدّد المعلومات التي تحتاج إليها لحل المسألة
2- كوّن نموذجًا رياضيًّا للمسألة : ارسم أشكالًا وضع علامات على الأجزاء المهمّة في المسألة.
3- أوجد مجال الدالة .وحدّد قيم المتغيّر التي تكون معقولة في المسألة
4- حدّد النقاط الحرجة ويمكن إيجاد النقاط الطرفيّة أوجد أين تكون المشتقّة صفريّة أو أين لا يكون لها وجود.
5- حل النموذج الرياضي :إذا لم تكن واثقًا من النتيجة دعّم أو أكّد صحّة حلك بطريقة أخرى
6- فسّر الحل :ترجم نتيجتك الرياضية إلى الموقف في المسألة

حاول أن تحل رقم (3) ص 158

تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.
أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.
ما قيمة هذا الحجم؟

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

حاول أن تحل رقم (1) ص 156

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

تطبيق: كراسة التمارين رقم (3) ص 63

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ m$ ، واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا

التاريخ الهجري :   التاريخ الميلادي :

الوحدة الرابعة : الإحصاء

التقديـر - التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي .

أولا : إذا كان التباين σ^2 للمجتمع **معلـوم .**

حاول أن تحل رقم (1) ص 171

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97 % باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

حاول أن تحل رقم (2) ص 173

أجريت دراسة لعينة من الإناثحول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الاناث 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام مستوى ثقة % 95

1- **أوجد هامش الخطأ.**
2- **أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ**
3- **فسّر فترة الثقة.**

التاريخ الهجري :　　　　　　　　　　　　التاريخ الميلادي :

<u>ثانيـا : إذا كان التباين σ^2 للمجتمع **غير معلـوم وحجم العينة** $\boldsymbol{n > 30}$ **.**</u>

<u>حاول أن تحل رقم (3) ص 174</u>أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها n = 81 و متوسط حسابي x = 50 ، و الانحراف المعياري S = 9

باستخدام مستوى الثقة 95% .

- **أوجد هامش الخطأ.**
- **أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ**
- **فسّر فترة الثقة.**

ثالثا : إذا كان التباين σ^2 للمجتمع **غير معلوم وحجم العينة** $n \leq 30$

التقييم الجزئي: حاول أن تحل رقم (4) ص 176

أوجد فترة ثقة 95 % للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا n = 13 ، S = **0.3** ، $\bar{x}$ = 8.4

اختبارات الفروض الإحصائية

حاول أن تحل رقم (1) ص 179

بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ \mathrm{kg}$ **مع انحراف معياري** $\sigma = 150\ \mathrm{kg}$ **. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك،**

و تأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا. فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي kg 1840

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

الحـل :

حاول أن تحل رقم (2) ص 180

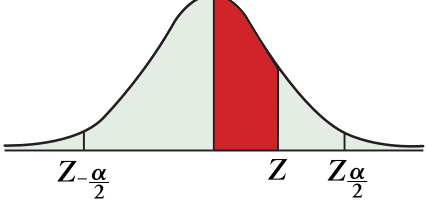
متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع 1570 = $\overline{x}$ بانحراف معياري 1570

$S = 120$ **. يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات** $\mu = 1600$ **للمصابيح المصنعة في المصنع.**

اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ **مقابل الفرض** $\mu \neq 1600$ **و باختبار مستوى المعنوية** $\alpha = 0.05$

حاول أن تحل (3) صفحة 181 : إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبين من خلالها أن $S = 5$ ، $\bar{x} = 296$.

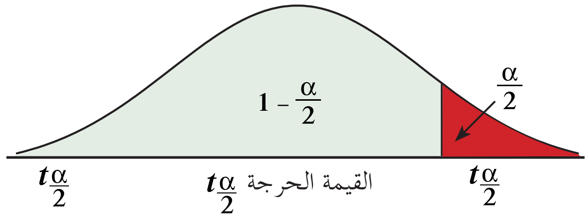
لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها . فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحاً أم لا ؟ . وضح اجابتك.



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09



جدول التوزيع t						
	$\frac{\alpha}{2}$					
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675