



رياضيات

الثاني عشر
علمي

2

الفصل الدراسي

2021-2022

العام
الدراسي



إعداد

أ. محمد جبر الخوالده

5-1

النكامل غير المحدد

5-2

النكامل بالنعويض

5-3

نكامل الدوال المثلثية

5-4

الدوال الأسية و اللوغاريتمية

5-5

النكامل بالانجزية

5-6

النكامل باستخدام
الكسور الجزئية

5-7

النكامل المحدد

تعريف المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة) للدالة f المعرفة على مجالها I

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

إذا كان

نظرية 1 إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I ، G مشتقة عكسية أيضاً

للدالة f على الفترة I فإن: $G(x) = F(x) + C, \forall x \in I$ حيث C ثابت

نظرية 2 إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I ، فإن الصورة العامة

للمشتقة العكسية للدالة f على الفترة I هي: $F(x) + C$ حيث C ثابت اختياري.

حاول أن نحل (1) صفحـة 14

أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -x^2$

ثم أكتب مشتقة عكسية أخرى لها

تمرين (2) صفحـة 9

أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

حاول أن نحل (2) صفحـة 14

أثبت أن : $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

نمرين (1) صفحـة 9

أثبت أن : $F(x) = (3x + 2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x) = 15(3x + 2)^4$

نمرين (3) صفحـة 9

أثبت أن : $F(x) = \sqrt{1 + x^4}$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$

تعريف التكامل غير المحدد

التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقات العكسية F ويكتب على الصورة : $\int f(x)dx$

قواعد التكامل غير المحدد :

الرقم	التكامل	ملاحظات	أمثلة
1	$\int kdx = kx + C$	k عدد ثابت	$\int 5dx = 5x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ (قاعدة القوى)	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

خواص التكامل غير المحدد :

الرقم	الخاصية	ملاحظات
1	$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$	الضرب بعدد ثابت $k \neq 0$
2	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	الجمع والطرح

الرقم	ملاحظات
1	$\int -f(x)dx = - \int f(x)dx$
2	$\int [f(x) + k]dx = \int f(x)dx + \int kdx$

حاول أن نحل (3) صفحـ 15 ة

(a) $\int 15 dx$

أوجد : (b) $\int 5x^4 dx$

حاول أن نحل (4) صفحـ 16 ة

احسب : $\int (3x^2 - 4x - 1) dx$

تمرين (4) صفحـ 9 ة

احسب : $\int (x^5 - 6x + 3) dx$

أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int (2x - 3)(x + 4)dx$

b $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} dx$

c $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x} \right)^2 dx$

أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int x\sqrt{x}dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

c $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}} dx$

حاول أن نحل (7) صفحـ 18

إذا كان : $F(x) = \int (2x + 5)dx$, $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

تمرين (15) صفحـ 9

إذا كان : $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$, $F(2) = 3$ فأوجد $F(x)$

قاعدة التكامل بالتعويض: إذا كانت F هي المشتقة العكسية للدالة f فإن :

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كانت $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن : $\int f(u)du = F(u) + C$

تعميم قاعدة القوى :


$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C , n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

حاول أن نحل (1) صفحة 21


أوجد :

(a) $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)dx$ (b) $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2} (2x - 5)dx$

مثال (1) صفد 21

أوجد : $\int \frac{\left(\frac{1}{x} + 4\right)^5}{x^2} dx$ 

حاول أن نحل (2) صفد 22

أوجد : $\int \sqrt[5]{3x + 7} dx$ 

أوجد : $\int (4x - 5)^8 dx$

أوجد : $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)^3} dx$ b

تمرين (6) صفحـة 12

أوجد : $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}} dx$

حاول أن نحل (3) صفحـة 23

أوجد : $\int x(2x-1)^3 dx$

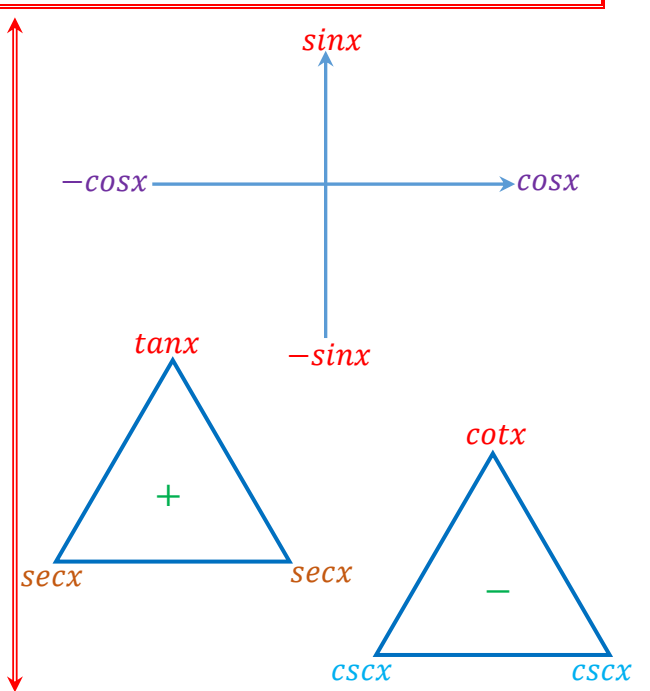
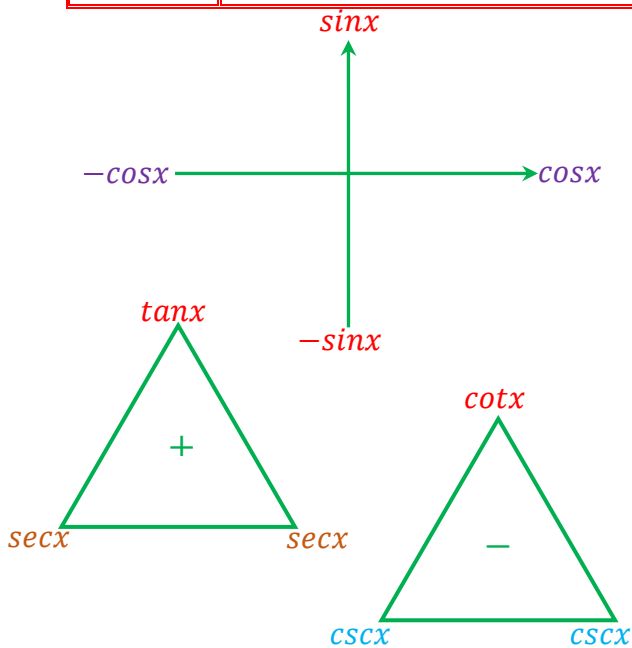
تمرين (8) صفحـ 12

أوجد : $\int x(3x + 2)^6 dx$

تمرين (9) صفحـ 12

أوجد : $\int \frac{x}{\sqrt{1 + 3x}} dx$

الرقم	قواعد الاشتقاق لبعض الدوال المثلثية	قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية
1	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
2	$\frac{d}{dx}(\sin kx) = k \cos kx$	$\int \sin kx \, dx = \frac{-\cos kx}{k} + C$
3	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
4	$\frac{d}{dx}(\cos kx) = -k \sin kx$	$\int \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
6	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
7	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
8	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$



حاول أن نحل (1) صفحة 25

أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

(a) $\int (\cos x + \csc^2 x) dx$

(b) $\int \sec x (\tan x + \sec x) dx$

(c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

تمرين (1) صفحة 14

أوجد قيمة التكامل : $\int (\sec x \tan x + \sin x) dx$

تمرين (2) صفحة 14

أوجد قيمة التكامل : $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x) dx$

أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

b $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

تمرين (7) صفحـة 14

أوجد قيمة التكامل : $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

تمرين (12) صفحـة 14

أوجد قيمة التكامل : $\int \sqrt{1 + \sin x} \cdot \cos x \, dx$

أوجد : $\int \csc^5 x \cdot \cot x \, dx$

أوجد قيمة التكامل : $\int \sec^3 x \cdot \tan x \, dx$

تمرين (10) صفحـ 14 ـة

أوجد قيمة التكامل : $\int \sqrt{\cot x} \cdot \csc^2 x \, dx$

تمرين (11) صفحـ 14 ـة

أوجد قيمة التكامل : $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$

تمرين (13) صفحـة 14

أوجد قيمة التكامل : $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1 + \cot x}}$

تمرين (14) صفحـة 14

أوجد قيمة التكامل : $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1 + \tan x}}$

قواعد اشتقاق الدالة الأسية

الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ u دالة في x قابلية للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
2	$f(x) = a^u$	$f'(x) = u' a^u \ln a$	
3	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
4	$f(x) = e^u$	$f'(x) = u' e^u$	

حاول أن نحل (1) صفحـ 30

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a) $f(x) = 10^x$

b) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = 5^{\cos x}$

نمارين (1-3) صفحـ 16

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

① $y = 7^x$

② $y = 5^{\sqrt{x+1}}$

③ $y = 8^{\tan x}$

حاول أن نحل (2) صفحة 31

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

(b) $g(x) = e^{x^2-4}$

(c) $h(x) = e^{\tan x}$

نمارين (7-9) صفحة 16

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(7) $y = e^{x^2-x+1}$

(8) $y = e^{2\sqrt{x}+3}$

(9) $y = e^{\csc x}$

قواعد اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي

الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
2	$f(x) = \ln x $	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$
3	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x) > 0$

حاول أن نحل (3) صفحـ 32

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية :

(a) $f(x) = \ln(2x + x^3)$

(b) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2x + 1}\right)$

(c) $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

(d) $k(x) = \ln(\sin x)$

قواعد تكامل بعض الدوال الأسية

الرقم	التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة	ملاحظات
1	$\int e^x dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	u دالة في x قابلة للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
2	$\int u' e^u dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = u' e^u$	
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	
4	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + C$	$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + C$

حاول أن نحل (4) صفحـ 33

أوجد:

a $\int e^{3x} dx$

b $\int (x^2 - 2) \cdot e^{x^3 - 6x} dx$

أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي :

16 $\int e^{0.1x} dx$

17 $\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

18 $\int (2x + 1)e^{x^2+x+4} dx$

19 $\int (x^2 - 2)e^{x^3-6x} dx$

أوجد:

a $\int \frac{-5}{3x-2} dx$

b $\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$

c $\int \frac{x^3 + 4}{x} dx$

أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي :

20 $\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x} \right) dx$

21 $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

22 $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$

5-5 التكامـل بالتجزـيء

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du : \text{قاعدة التكامـل بالتجزـيء}$$

مثال (1) صفـحـة 37 ة

أوجد التكامـل : $\int x \sin x \, dx$

حاول أن نحل (1) صفـحـة 37 ة

أوجد : $\int x \cos x \, dx$

أوجد :

a $\int (x - 3)e^{(x-3)} dx$

b $\int 4xe^{-5x} dx$

حاول أن نحل (3) صفحـ 38

أوجد : $\int \ln x \, dx$

مثال (4) صفحـ 38

أوجد : $\int x \ln x \, dx$

تمرين (5) صفحـ 18 ة

أوجد التكامل : $\int \ln \sqrt[4]{x} \, dx$

تمرين (8) صفحـ 18 ة

أوجد التكامل : $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

النكامل باستخدام الكسور الجزئية

الحالة الأولى : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة :

لتكن $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة :

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر .

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي :

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

حاول أن نحل (1) صفد — 43 —

لتكن الدالة $f : f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$ فأوجد :

$\int f(x)dx$ (a) الكسور الجزئية . (b)

أوجد الكسور الجزئية لكل دالة ممايلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

$$1 \quad f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}$

$$③ \quad f(x) = \frac{-x + 10}{x^2 + x - 12}$$

أوجد : $\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x} dx$

أوجد : $\int \frac{12}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

الحالة الثانية : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر :

لتكن $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر.

لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx + n)^k$

يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx + n} + \frac{A_2}{(mx + n)^2} + \dots + \frac{A_k}{(mx + n)^k}$$

حاول أن نحل (3) صفحـ 45

أوجد : $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

أوجد : $\int \frac{-6x + 25}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$

أوجد : $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} dx$

أوجد : $\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x^2} dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x) \right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حاول أن نحل (1) صفحة 51

أوجد : $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

خواص النكامل المحدد		
الرقم	الخاصية	ملاحظات
1	$\int_a^a f(x)dx = 0$	الدالة f متصلة على الفترة I $a, b, c \in I, k \in \mathbb{R}$
2	$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$	
3	$\int_a^b k dx = k(b - a)$	$k = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$
4	$\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$	
5	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	

أوجد :

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \csc^2 x \right) dx$

b $\int_2^{-3} 5 dx$

c $\int_3^3 (-2x^3 + x^2) dx$

d $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

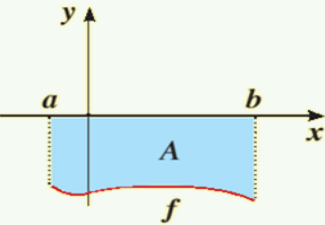
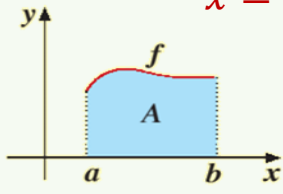
أوجد :

a $\int_{-3}^4 |2x - 4| dx$

b $\int_1^3 |x + 2| dx$

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ ، A تمثل مساحة المنطقة

المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$



1 إذا كانت : $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

فإن :

2 إذا كانت : $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

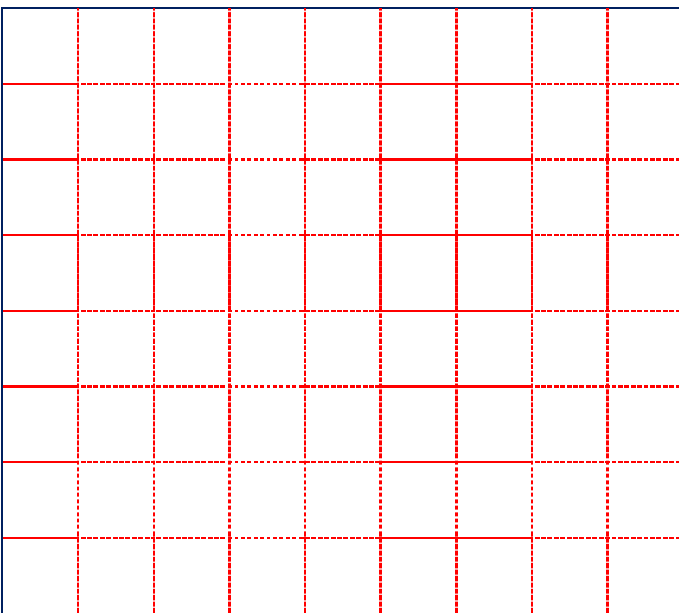
فإن :

مثال (6) صفحـة 54

a أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ ومحور السينات

والمستقيمين $x = -2$ ، $x = 4$

b تحقق بياناً .



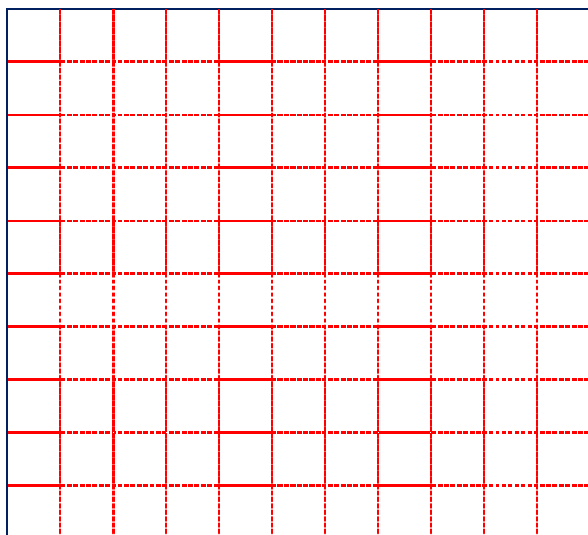
أوجد قيمة : $\int_1^5 (2 - 2x)dx$ بيانياً

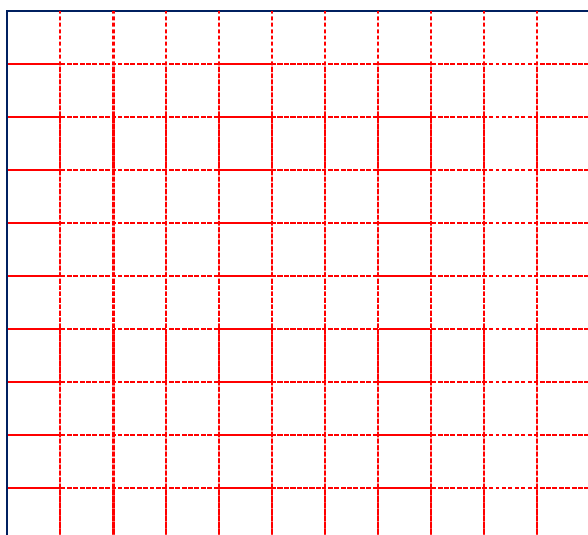
[illegible]

أوجد :

a $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$

b $\int_0^4 -\sqrt{16 - x^2} dx$





مثال (8) صفحـة 56

أوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$

حاول أن نحل (9) صفحـة 58

أوجد :

a $\int_{-1}^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} \, dx$

استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل:

$$(16) \int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$(17) \int_e^6 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$(19) \int_{-1}^3 \frac{x}{x^2+1} dx$$

مثال (10) صفحہ 58

أوجد : $\int_{-2}^0 \frac{x}{e^x} dx$

تمرين (20) صفحہ 22

أوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

أوجد : $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3} dx$

أوجد : $\int_{-2}^0 \frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3} dx$