الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية

مدرسة مرشد سعد البذال الثانوية

قســــم الرياضيــات

ملخص قوانين الرياضيات للصف العاشر

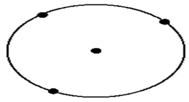
الفصل الدراسى الثانى ٢٠١٨ / ٢٠١٩

ملاحظة : القوانين لا تغنى عن الكتاب المدرسى

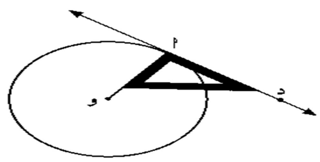
إعداد أ / محمد مصطفى أحمد

مدير المدرسة أ / صالح المطيرى

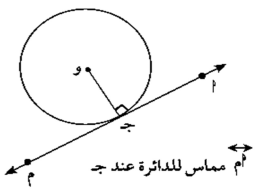
كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



المماس عمودي على نصف قطر التماس.

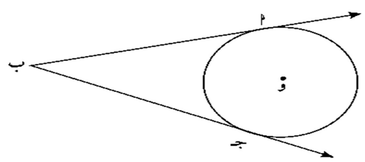


المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـب}}$

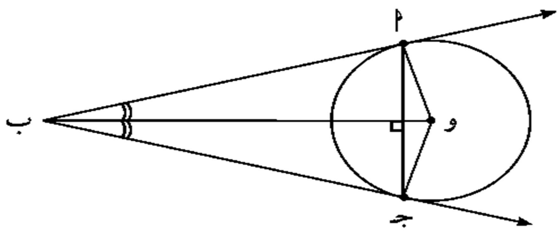


$\triangle$ بأجـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overleftarrow{\text{بو}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{ب}}$ جـ

٢ $\overleftarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{و}}$ جـ

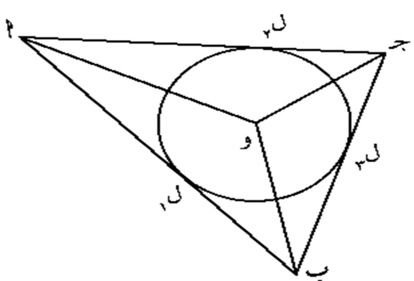
٣ $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أجـ}}$



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

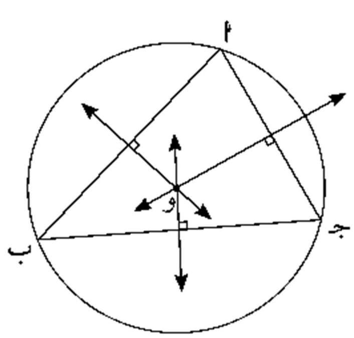
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.



الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)

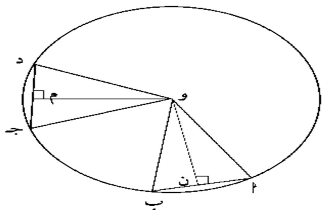
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



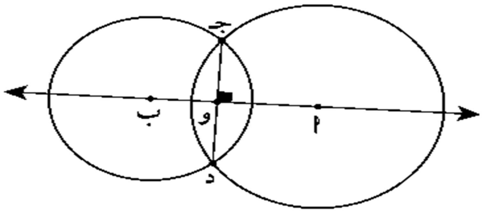
---

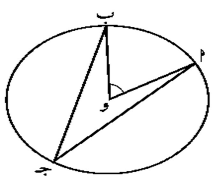
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

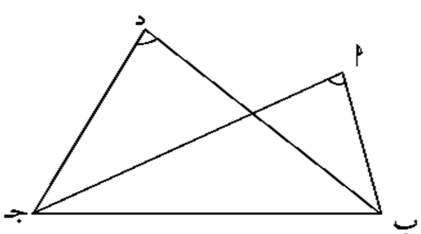
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.





قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.



١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂، د̂ المرسومات على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًّا دائريًّا.

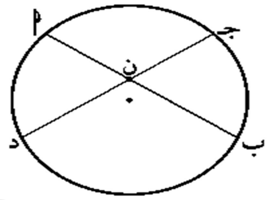
---

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

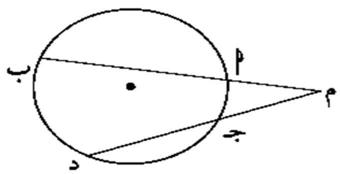
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



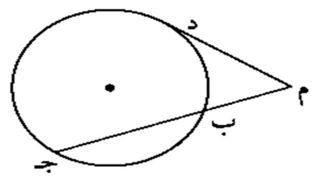
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

$(\text{م د})^2$ = م ب × م جـ .



محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{ب جـ}$

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

النظير الضربى للمصفوفة:

خاصية

بفرض أن: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{\text{أ}}$ لها نظير ضربي $\underline{\text{أ}}^{-1}$ حيث:

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\text{أ}}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{\text{أ د} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

النسب المثلثية لنقطة مثلثية:

$جتا\theta = س_١$

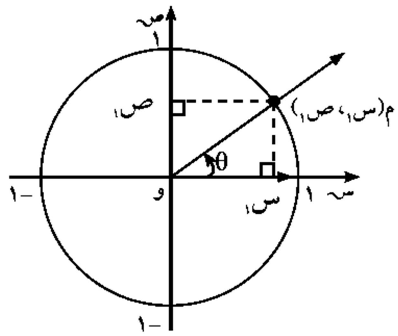
$جا\theta = ص_١$

$ظا\theta = \frac{ص_١}{س_١}$ ، $س_١ \neq ٠$

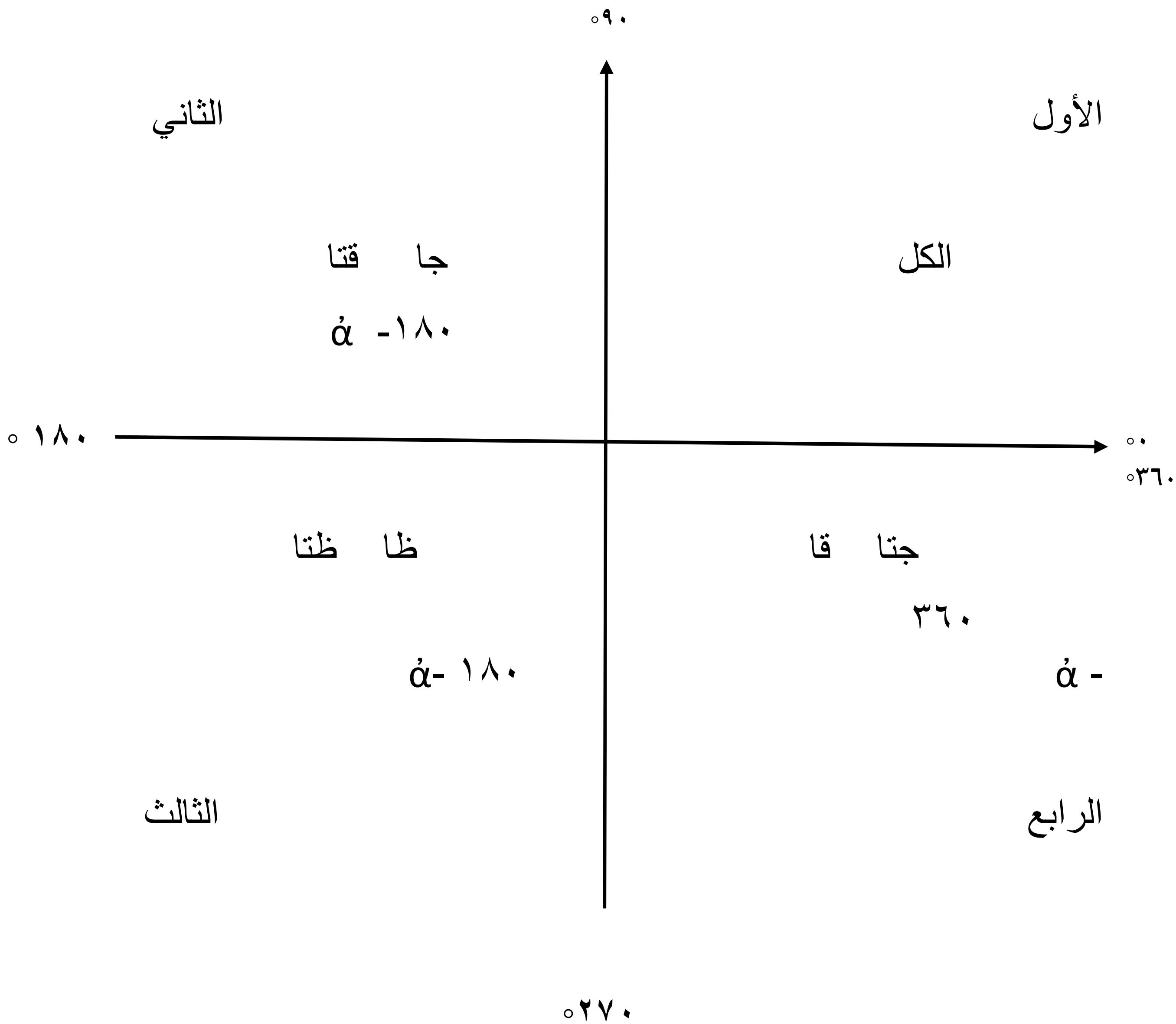
$ظتا\theta = \frac{س_١}{ص_١}$ ، $ص_١ \neq ٠$

$قا\theta = \frac{١}{س_١}$ ، $س_١ \neq ٠$

$قتا\theta = \frac{١}{ص_١}$ ، $ص_١ \neq ٠$



قاعدة الإشارات للنسب المثلثية:



النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$.

قانون:

جتا$(-\theta)$ = جتاθ

جا$(-\theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(-\theta)$ = $-$ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = $-$جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = $-$ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi - \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi - \theta)$ = $-$جتاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ

وبالتالي ظا$(\pi - \theta)$ = $-$ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا$(\theta$ + ٢ك $\pi)$ = جاθ

جتا$(\theta$ + ٢ك $\pi)$ = جتاθ

ظا$(\theta$ + ك $\pi)$ = ظاθ حيث ظاθ معرّف

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = $-$جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص $\forall \theta \in$ ح

٢ جتاθ = س $\forall \theta \in$ ح

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$، س $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

٤ قاθ = $\frac{1}{س}$، س $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

٥ قتاθ = $\frac{1}{ص}$، ص $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$، ص $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل المعادلة جا س = جا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢ك π ، (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

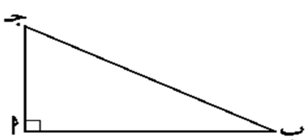
حل المعادلة ظا س = ظا θ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

المتطابقات المثلثية الأساسية — Basic Trigonometric Identities

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \dfrac{1}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث المقام $\neq$ ٠

$\text{قا}\,\theta = \dfrac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \dfrac{1}{\text{جا}\,\theta}$



متطابقات فيثاغورث

$\text{جا}^2\,\theta + \text{جتا}^2\,\theta = 1$ تسمى متطابقة فيثاغورث

العلاقة بين ظا θ، قا θ

$1 + \text{ظا}^2\,\theta = \text{قا}^2\,\theta$

العلاقة بين ظتا θ، قتا θ

$1 + \text{ظتا}^2\,\theta = \text{قتا}^2\,\theta$

المسافة بين نقطتين

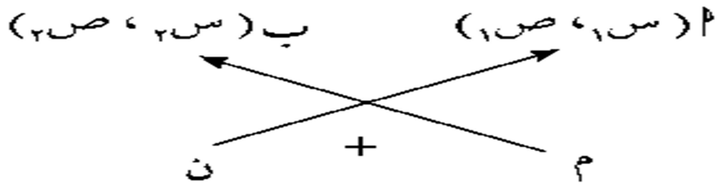
المسافة بين أي نقطتين أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) تساوي $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

نقطة المنتصف

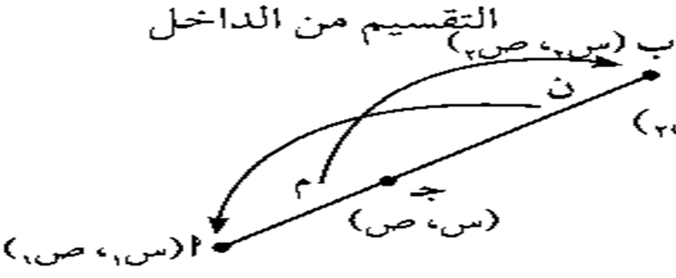
قانون:

إذا كانت أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث $\text{س} = \frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢}$.

تقسيم قطعة مستقيمة



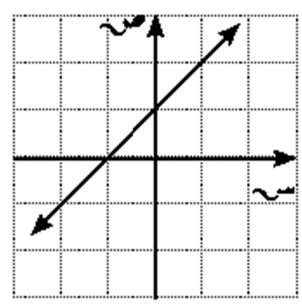
التقسيم من الداخل



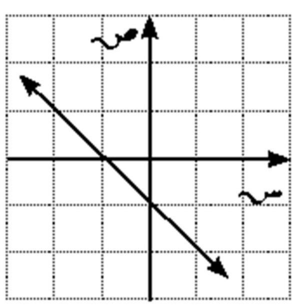
جـ $\left(\frac{\text{م س}_{٢} + \text{ن س}_{١}}{\text{م} + \text{ن}} \text{ ، } \frac{\text{م ص}_{٢} + \text{ن ص}_{١}}{\text{م} + \text{ن}} \right)$

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} \text{ ، } \text{س}_{٢} - \text{س}_{١} \neq ٠$$

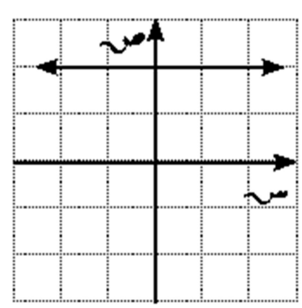
ميل المستقيم موجب



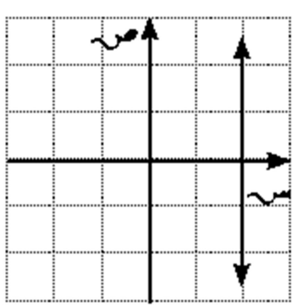
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل



معادلة المستقيم: ص − ص١ = م(س − س١)

شرط توازى مستقيمين

ميل الأول = ميل الثانى

شرط تعامد مستقيمين ميل الأول × ميل الثانى = - ١

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س١، ص١) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: ف = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$. حيث $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًا هذه المعادلة بمجرد مقارنة

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب$ مع الصفر.

١ عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

٢ عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.

٣ عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

التباين والانحراف المعياري

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن}$$

$$\text{ومنه الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{ع^٢}$$

قانون التباديل :

قانون

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!} \quad \text{حيث } ر، ن \in ص_{+} ، ر \leq ن، \; ^{ن}ل_{ن} = ١$$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن $\geq$ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\, ر!}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

قانون الإحتمال :

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$ل(\text{الحدث أ}) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $ل(أ) = \frac{ن\,(أ)}{ن\,(ف)}$

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ $٠ \leq ل(أ) \leq ١$

٢ إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ حدثًا مستحيلًا.

٣ إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ حدثًا مؤكدًا.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\overline{\text{أ}}$) = ١ – ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة **Multiplication principle of Independent Events**

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

ل(ب|أ) = $\dfrac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$ حيث ل (أ) ≠ ٠

وكذلك ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ)

بالنجاح والتوفيق بإمتياز لجميع الطلبة