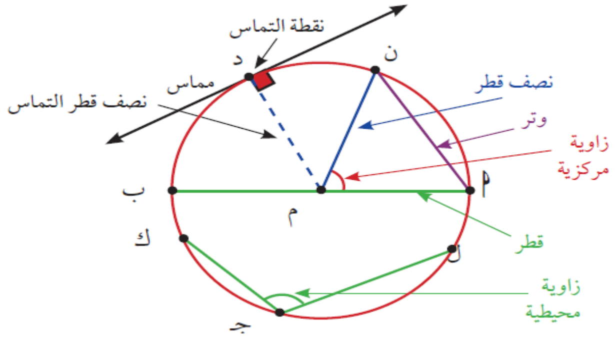
بند (٦ – ١)

الدائرة
The Circle

تعريف الدائرة

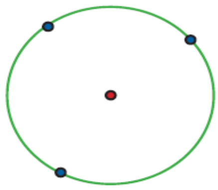
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز نق.



نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

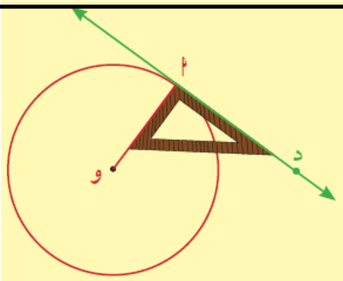


نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

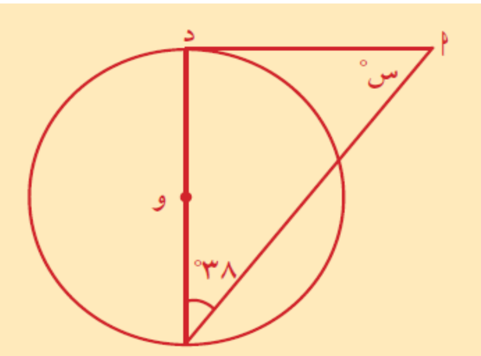
أي أن $\overline{وأ} \perp \overleftrightarrow{أد}$.



حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

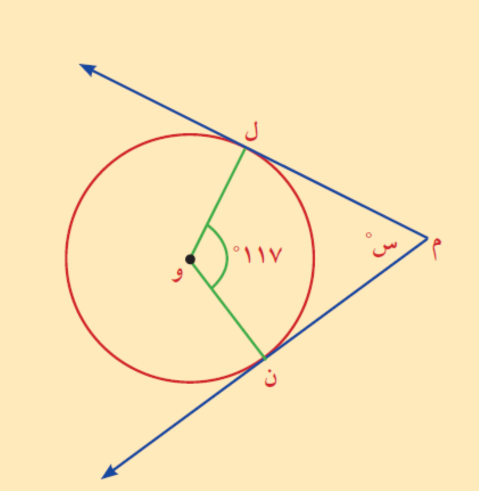
أوجد قيمة س°.



مثال (٢)

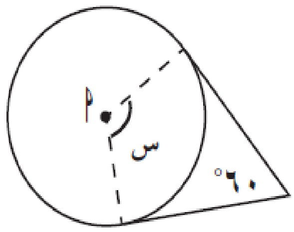
في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و

أوجد قياس الزاوية ل م̂ ن.

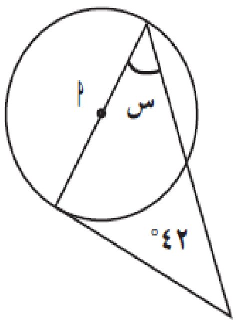


القطع المستقيمة تمس الدوائر، ٲ مركز كل دائرة. أوجد قيمة س.

(١)

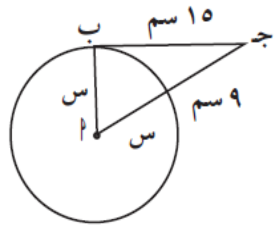


(٢)

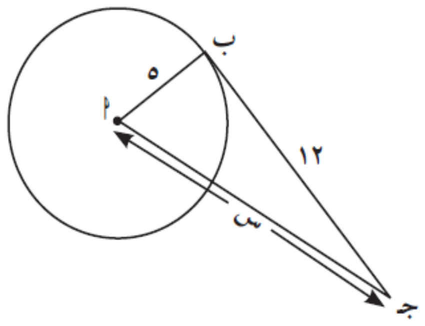


ب جـ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.

(٨)



(٩)

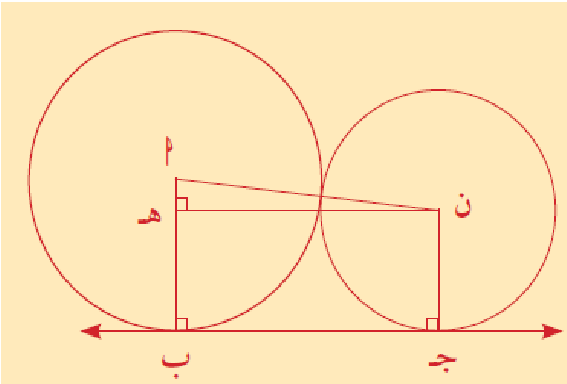


حاول أن تحل

٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.

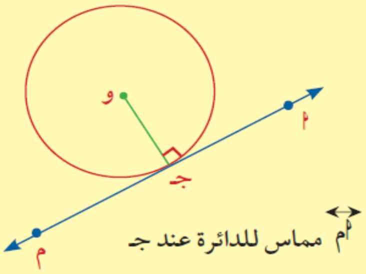
أوجد طول ب جـ إذا كانت الدائرتان متماستين

وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



نظرية (٣)

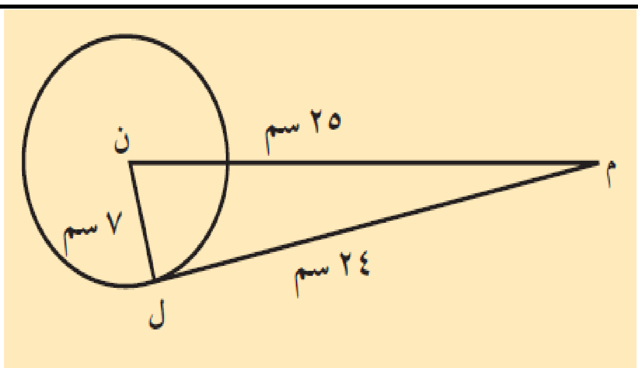
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



مثال (٤)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ س

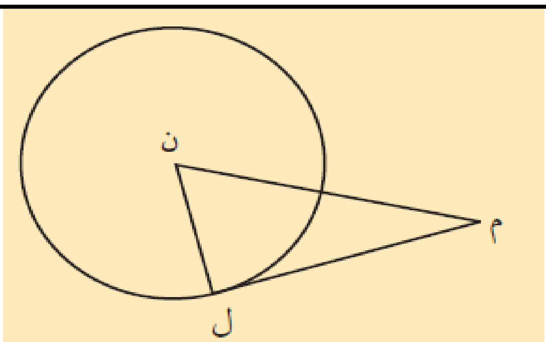
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،

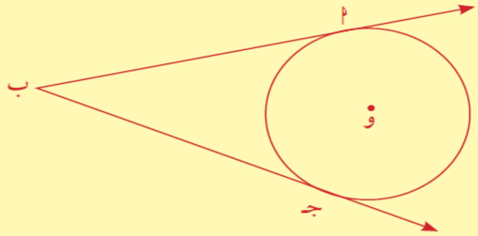
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.



نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{ﺃﺏ} \cong \overline{ﺟﺏ}$



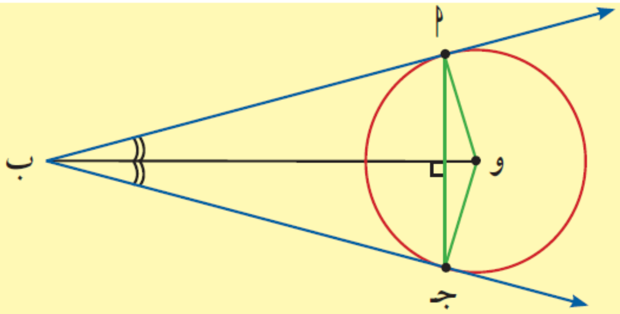
نتائج النظرية

Δ بأجـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overleftarrow{ﺏﻭ}$ منصف الزاوية أبَجـ

٢ $\overleftarrow{ﻭﺏ}$ منصف الزاوية أوَجـ

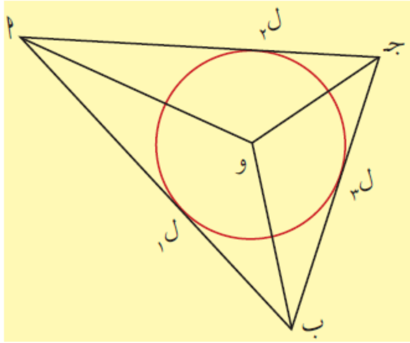
٣ $\overline{ﻭﺏ} \perp \overline{ﺃﺟ}$



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

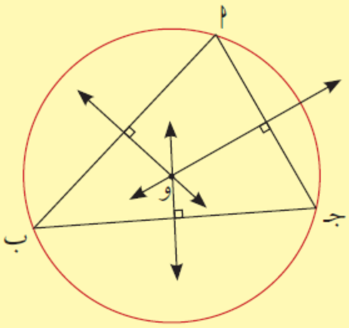
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.



الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)

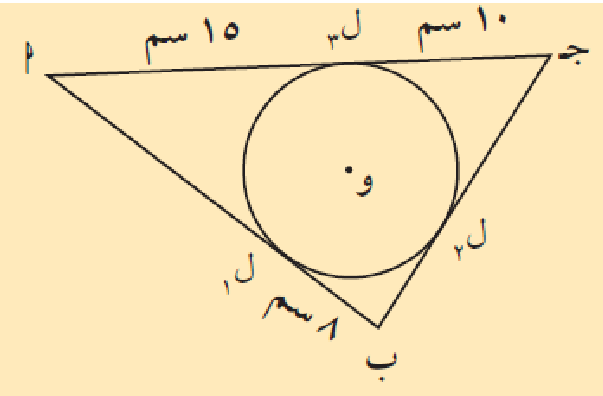
هي دائرة تمر بروؤس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



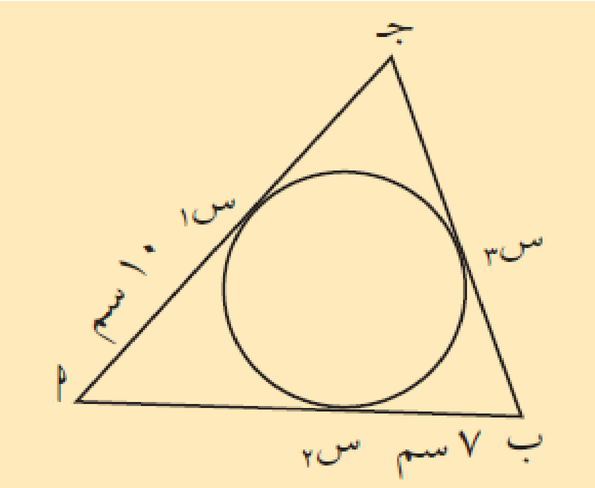
مثال (٦)

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث ⍺ب جـ.



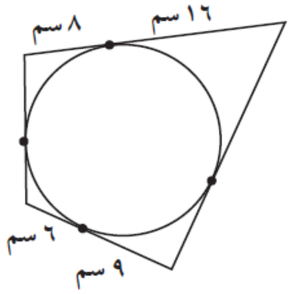
حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث ⍺ب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



في التمرين (٧)، يحيط المضلّع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

(٧)

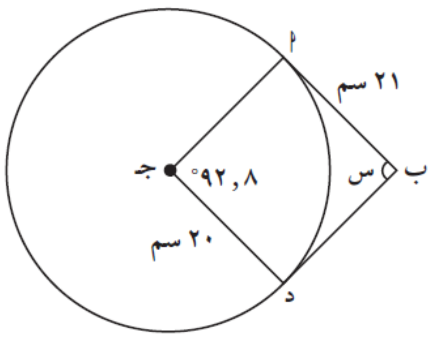


$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

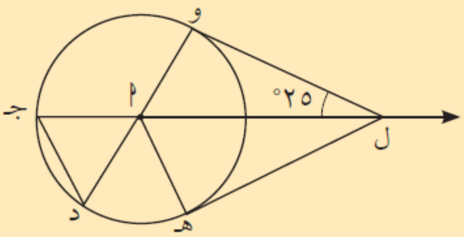
(جـ) أوجد ب جـ.



مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ د̂ جـ)، ق(هـ أ̂ د)

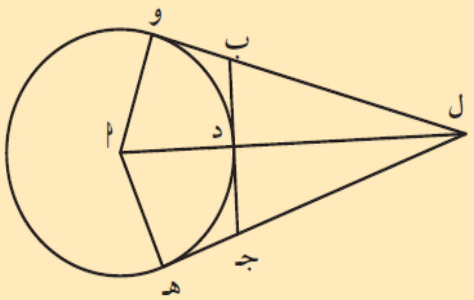
إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.



الحل:

ل هـ مماس للدائرة

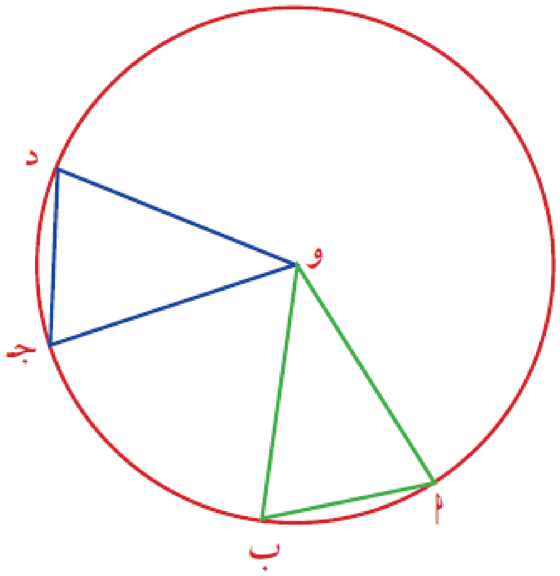
حاول أن تحل



٧ في الشكل المقابل ل و ، ل هـ مماسان للدائرة، ب جـ مماس للدائرة عند النقطة د، أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين.

الأوتار والأقواس

بند (٦ ـ ٢)



نظرية (١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

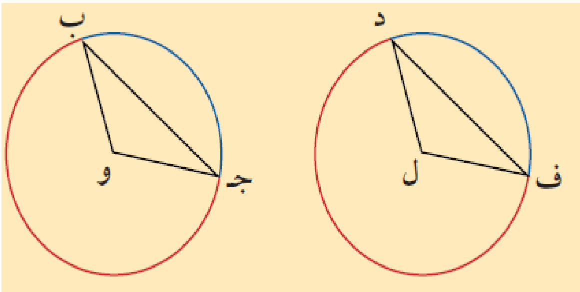
١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

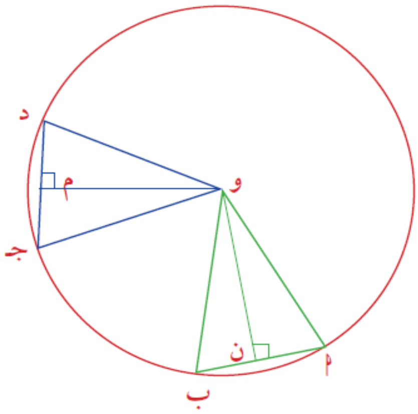
مثال (١)

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}} \cong \overset{\frown}{\text{د ف}}$. ماذا تستنتج؟



إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{دف}}$ ، فماذا تستنتج؟

نظرية (٢)

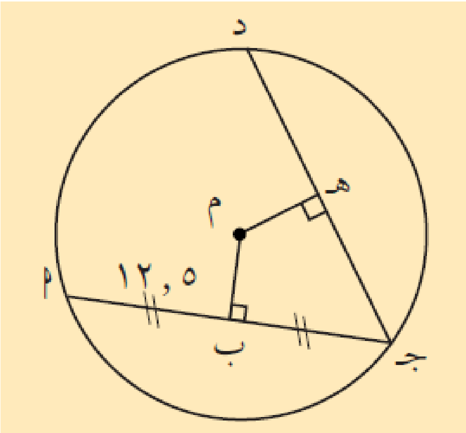


١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

مثال (٢)

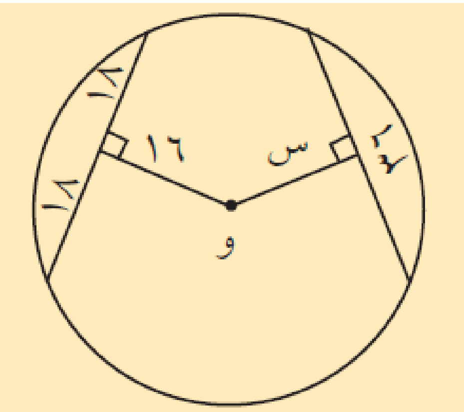
في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول جـ د. فسّر.



حاول أن تحل

٢ دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



نظرية (٣)

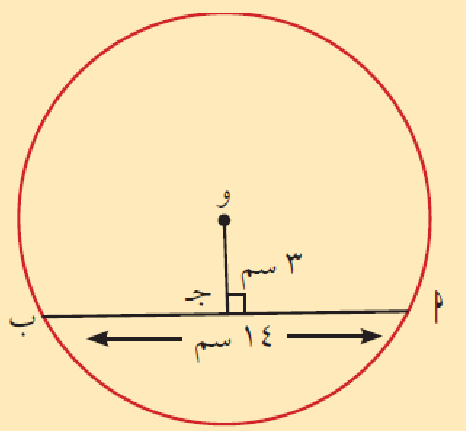
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

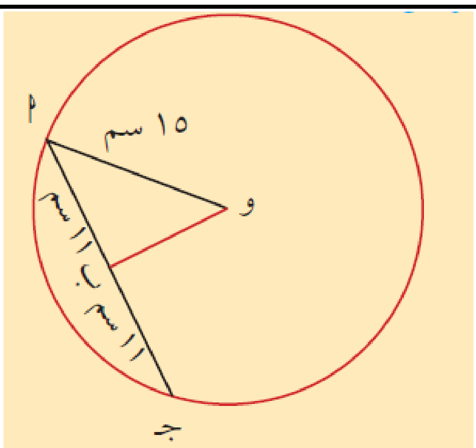
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال (٣)

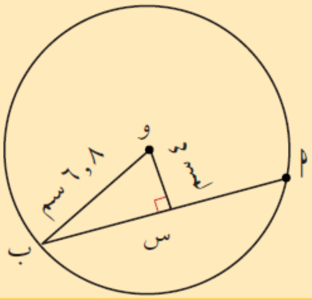
أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و



في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر



حاول أن تحل



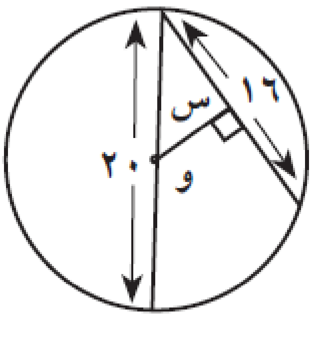
٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{\text{مب}}$.

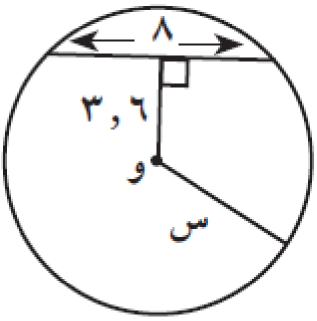
ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{مب}}$.

أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)

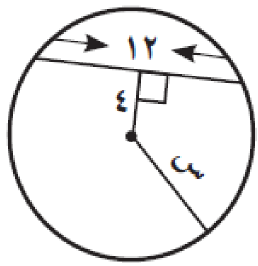


(ب)

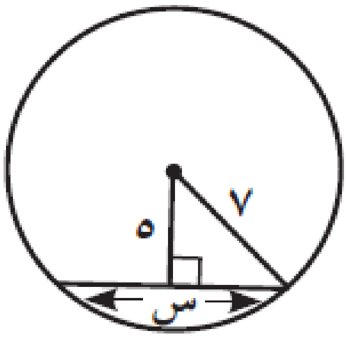


في التمرينين (٣– ٤)، أوجد قيمة س.

(٣)



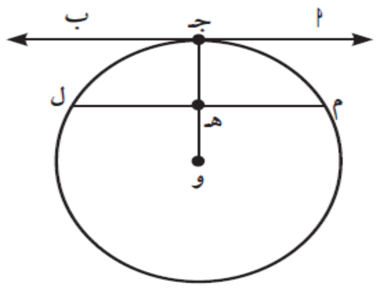
(٤)



(١٠) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة عند جـ

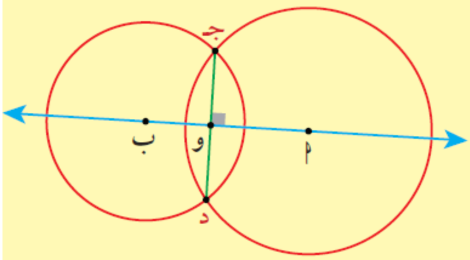
هـ منتصف الوتر $\overline{\text{م ل}}$.

أثبت أن: $\overline{\text{م ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.



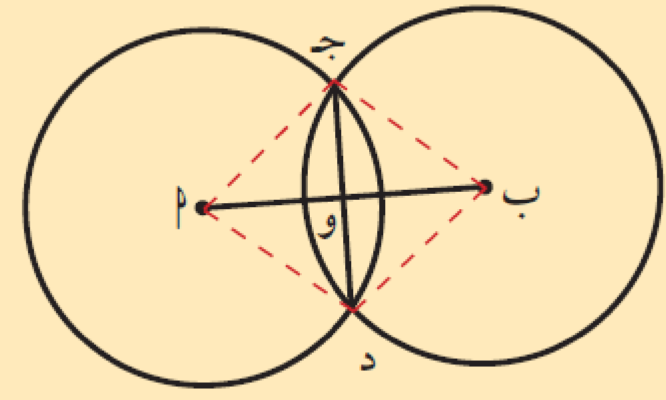
نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك. إذا كان أب = ٢٤ سم، نه = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟



الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
Central and Inscribed Angles

بند (٦ ـ ٣)

تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

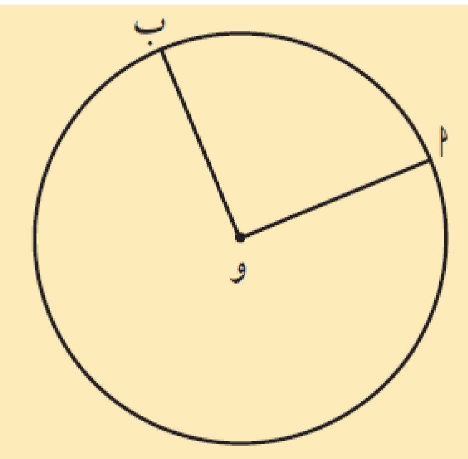
٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(⌒أب) = ٩٠°.
فأوجد ق(∠أوب).

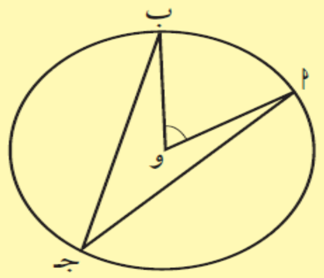


حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

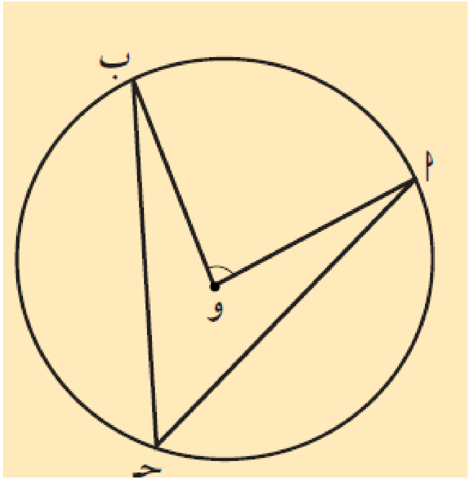


ق(∠أجـب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أوب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

مثال (٢)

في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(∠أجـب)

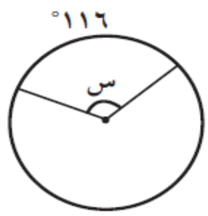


حاول أن تحل

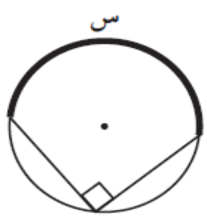
٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

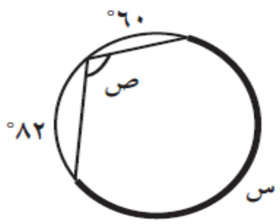
(أ)

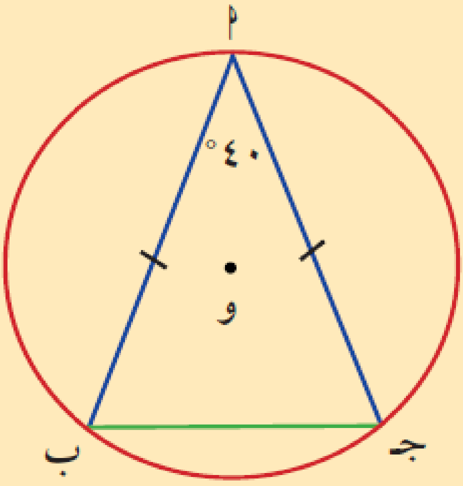


(ب)



(جـ)

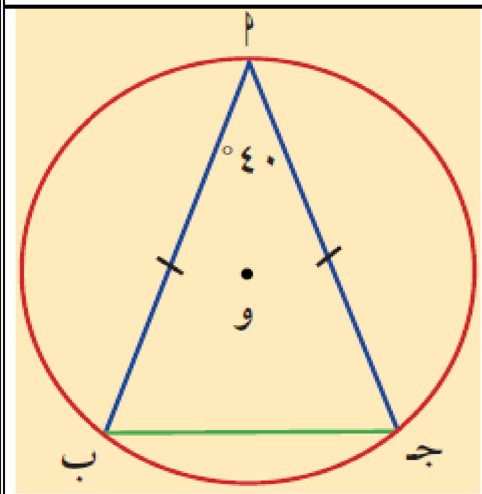




مثال (٣)

في الشكل المقابل مب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث م، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب م̂ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس مب، ب جـ ، م جـ .



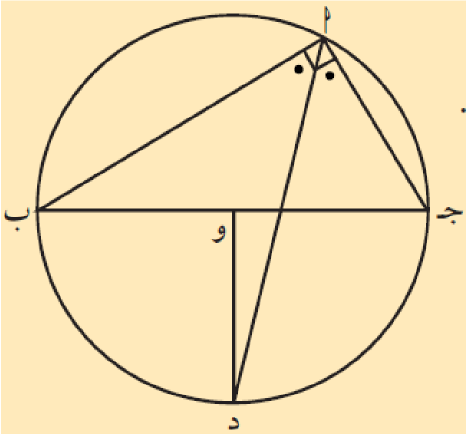
حاول أن تحل

٣ في المثال (٣) إذا كان جـ هـ، منصف الزاوية الداخلية م جـ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.

ما قياس القوس الأصغر م هـ؟

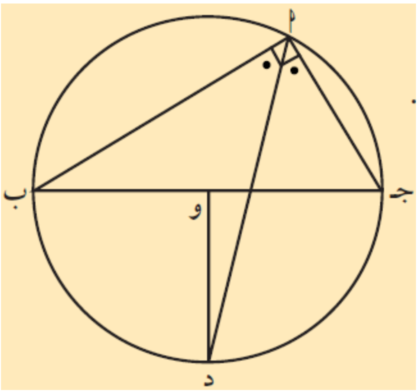
مثال (٤)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{دو} \perp \overline{بجـ}$.



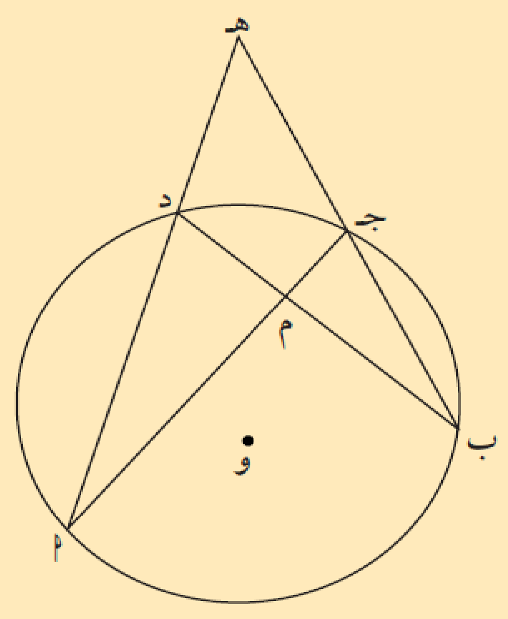
حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، إذا كان ق(أبَ جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أدَ ب).



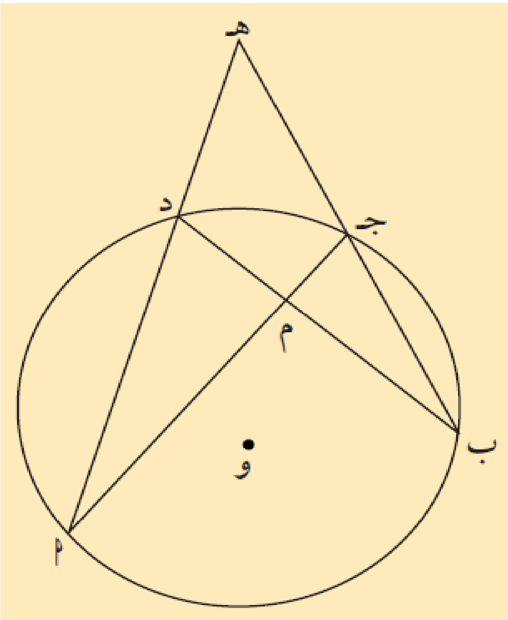
مثال (٥)

في الشكل المقابل، أثبت أن: $\text{ق}(\widehat{\text{ب م أ}}) = \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$.

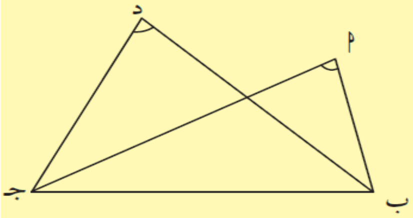


حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن $\text{ق}(\widehat{\text{ب هـ أ}}) = \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$



نتائج

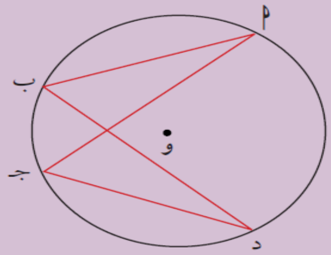


١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

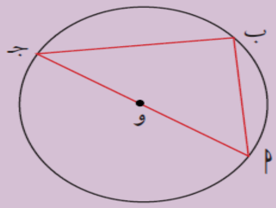
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.



أبٓد ، أجٓد تحصران ⌒أد

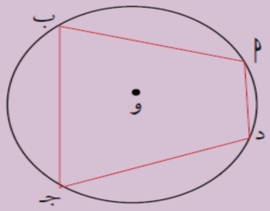
∴ ق(أبٓد) = ق(أجٓد)



أبٓجـ تحصر ⌒أجـ (نصف دائرة)

∴ ق(أبٓجـ) = ٩٠°

(أبٓجـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

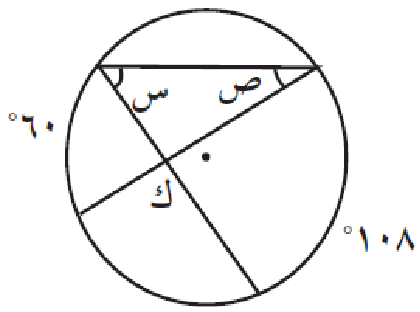


ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

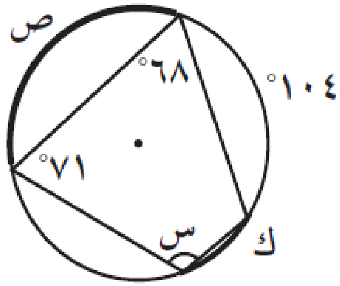
ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

(أ)



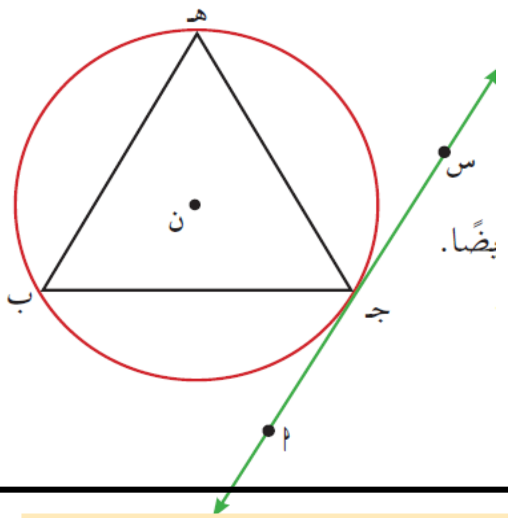
(ب)



نظرية (٣)

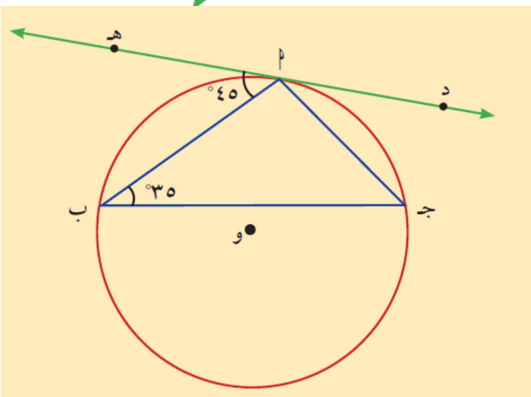
(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.



مثال (٧)

في الشكل المقابل إذا كان دهـ ↔ مماسًا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـأ̂ب).

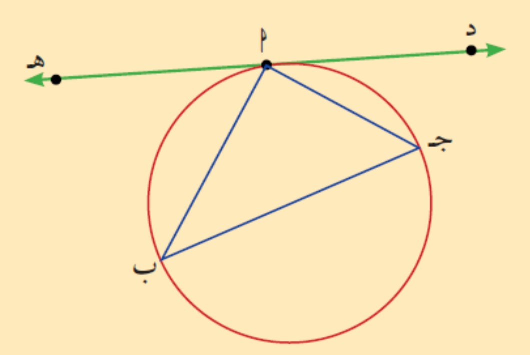


حاول أن تحل

٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د̂اجـ) = ٤٠°، ق(هـ̂اب) = ٥٠°.

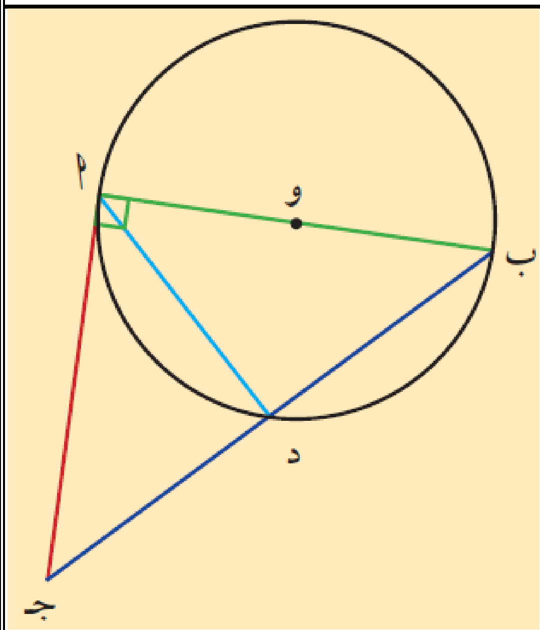
أ أوجد قياسات زوايا المثلث اب جـ.

ب أثبت أن جـب قطر للدائرة.



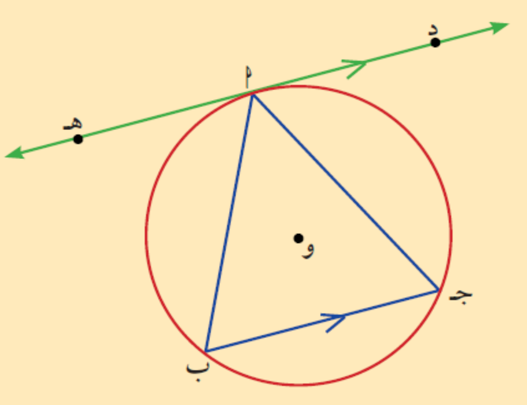
مثال (٨)

اب قطر في دائرة مركزها و. نرسم اجـ مماسًا للدائرة بحيث يكون اجـ = ٢ نق . ب جـ تقطع الدائرة في د. أثبت أن اد = جـ د.



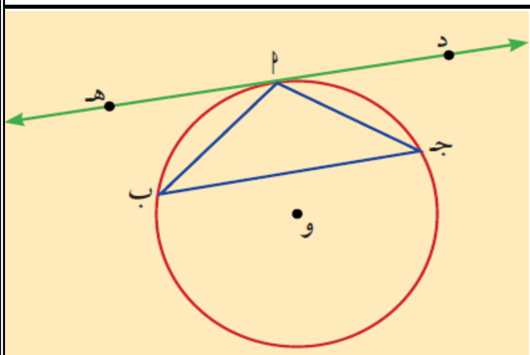
مثال (٩)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة ؏،
$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$.
أثبت أن المثلث ؏ب جـ متطابق الضلعين.



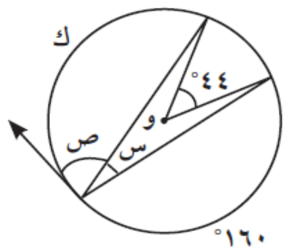
حاول أن تحل

٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة ؏.
المثلث ؏ب جـ متطابق الضلعين (؏ب = ؏جـ).
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

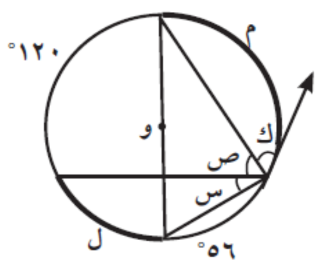


أوجد قيمة المجهول في كلّ من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل شكل يمثل مماسًا للدائرة.

(أ)

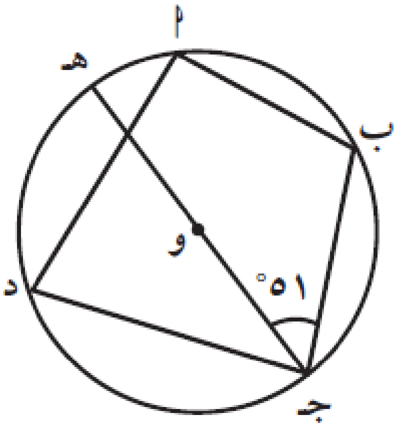


(ب)

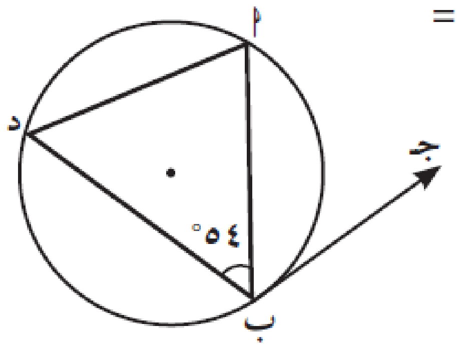


في الشكل المقابل، إذا كان ق(أب⌒) = ٧٢°، ق(ب جـ^ هـ) = ٥١°.

فإن قياس القوس هـ أ⌒ =



في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د⌒) = ١٤٠°، فإن ق(أ ب^ جـ) =



الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

بند (٦ – ٤)

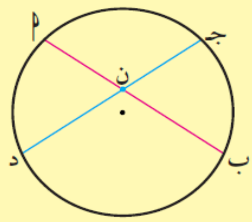
١ – تقاطع الأوتار داخل الدائرة

Intersecting Chords Inside the Circle

نظرية (١)

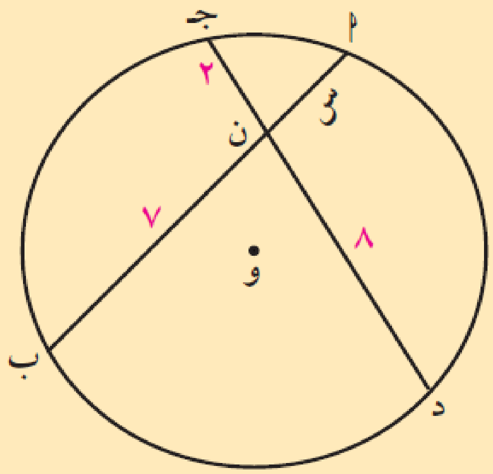
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



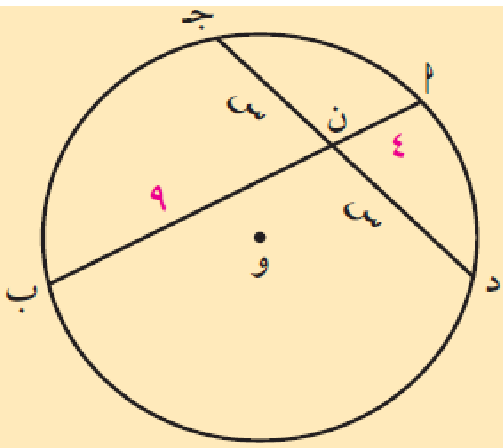
مثال (١)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

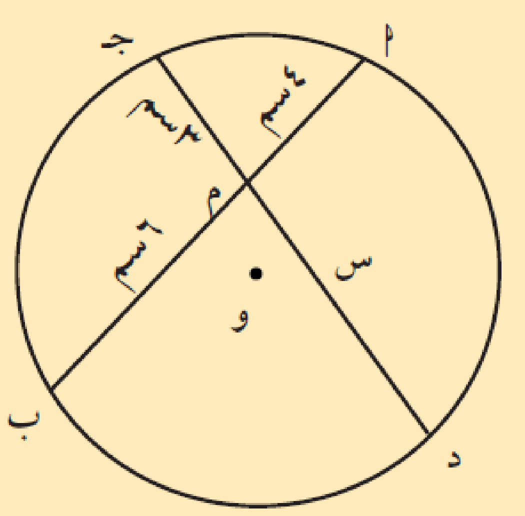


٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و:

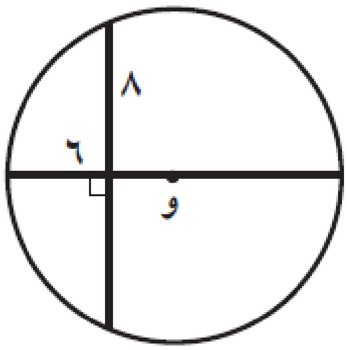
م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س.

أ أوجد قيمة س.

ب أوجد البعد بين المركز و والوتر د جـ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.



أوجد طول قطر كل دائرة.

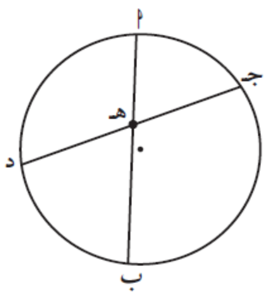


في الشكل أدناه:

هـ جـ = ٥ ، هـ أ = ٣ ،

هـ د = ٦ .

أوجد هـ ب.



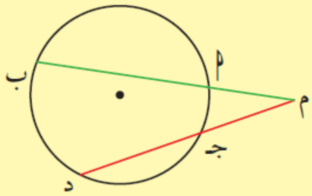
٢ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة

Intersecting Chords Outside the Circle

نتيجة (١)

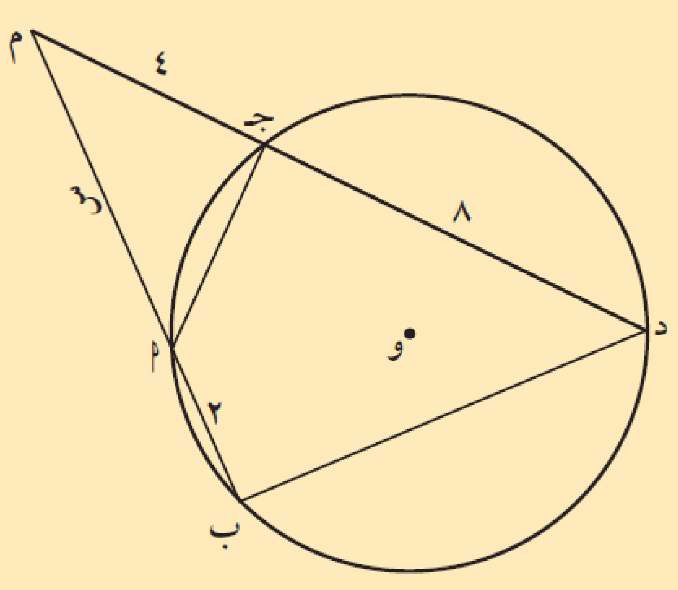
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



مثال (٣)

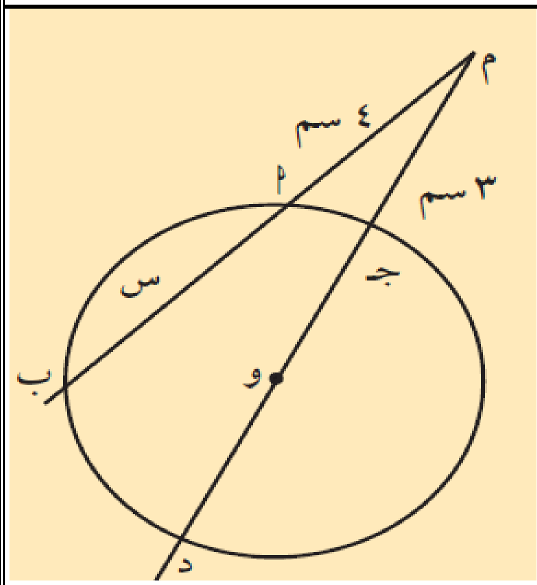
في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل

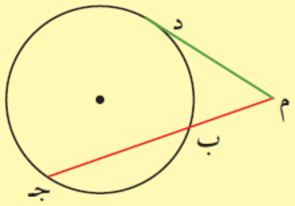
٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

أوجد قيمة س.



٣ – تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

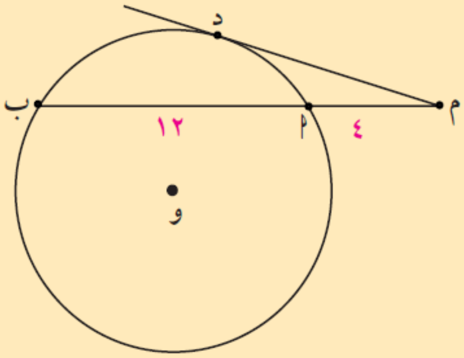
نتيجة (٢)



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

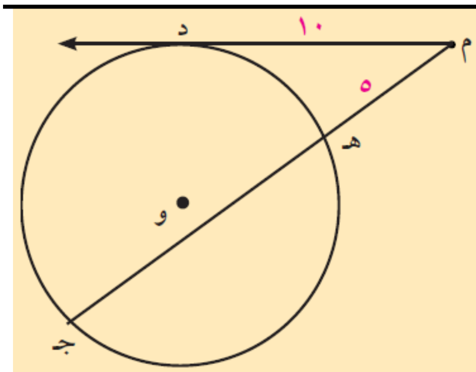
(م د)^{٢} = م ب × م جـ .

مثال (٤)



في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علمًا بأن: أم = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.

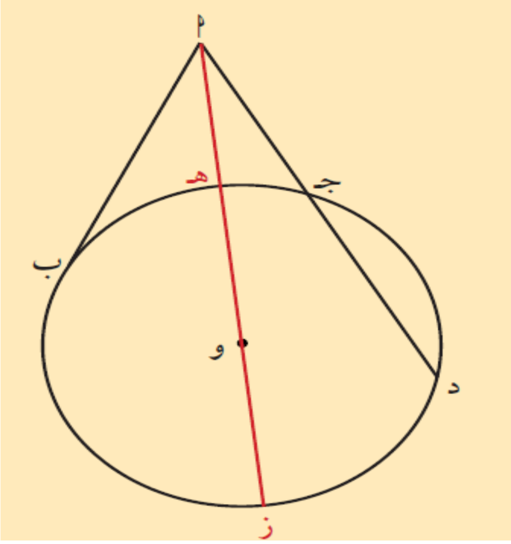
حاول أن تحل



٤ في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥.

أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.



مثال (٥)

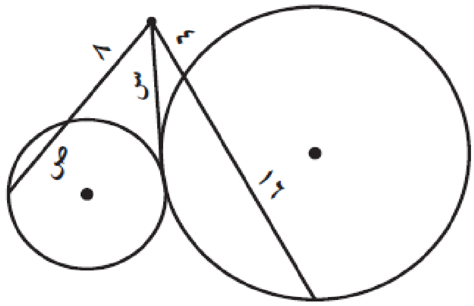
أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة م إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة م فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث م جـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث م د = ٩ سم.

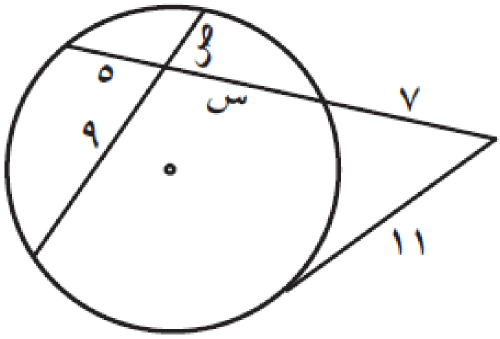
ما طول القطعة المماسية $\overline{\text{م ب}}$؟

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت م هـ = ٢ سم.

أوجد قيمة كل من س ، ص.





(٣)