الصـــــف العاشر

الفترة الدراســـية الثانية (1)

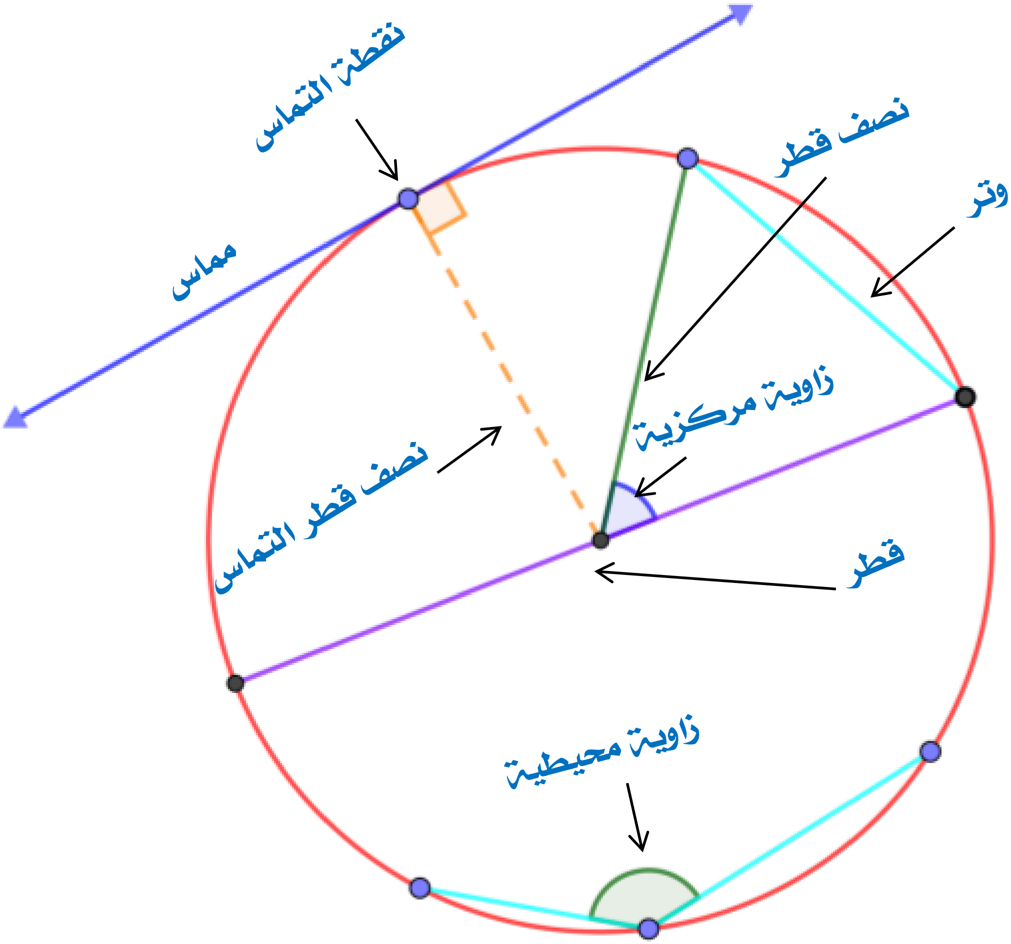
دفتر متابــــعة الطالــــب

2019 / 2020

"هذا الدفتر لايغني عن كتاب الطالب وكراسة التمارين"

Samer ALKASSAR

99363000

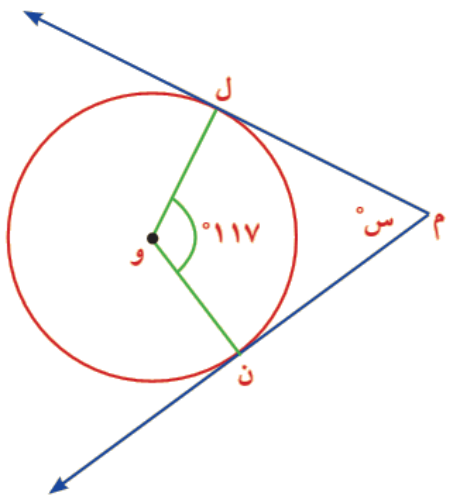

نقطة التماس
مماس
نصف قطر
وتر
زاوية مركزية
نصف قطر التماس
قطر
زاوية محيطية

نظرية (١) كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة .

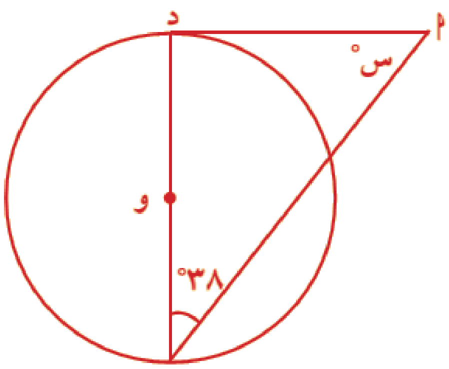
نظرية (٢) المماس عمودي على نصف قطر التماس .

مثال(١) في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و .

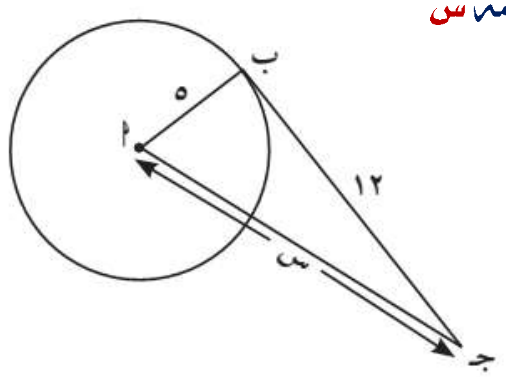
أوجد قياس الزاوية $\widehat{\text{ل م ن}}$.



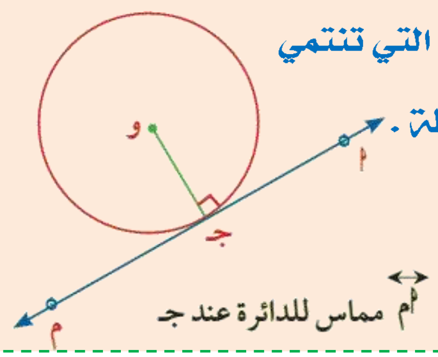
مثال(٢) في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و أوجد قيمة س



مثال(٣) في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ مماس للدائرة . أوجد قيمة س

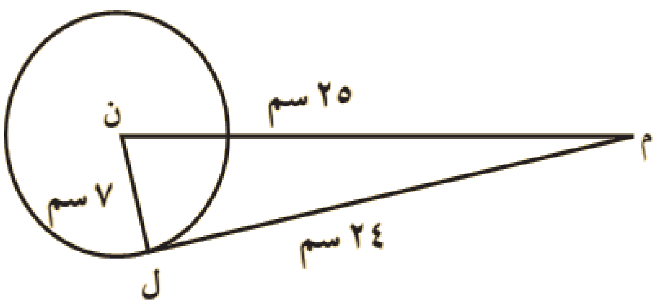


نظرية (٣) المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة .



مثال(٤) في الشكل المقابل : دائرة مركزها ن ، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم

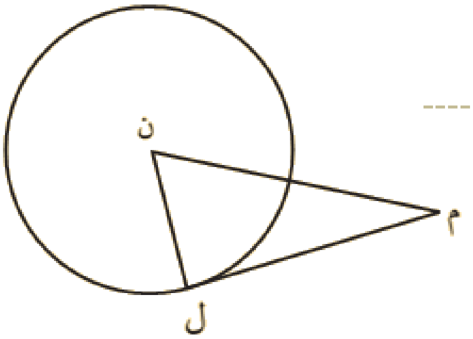
أثبت أن م ل مماس للدائرة .



تطبيق (٢) : في الشكل المقابل : دائرة مركزها ن ، ن ل = ٤ سم ، ل م = ٧ سم ، ن م = ٨ سم

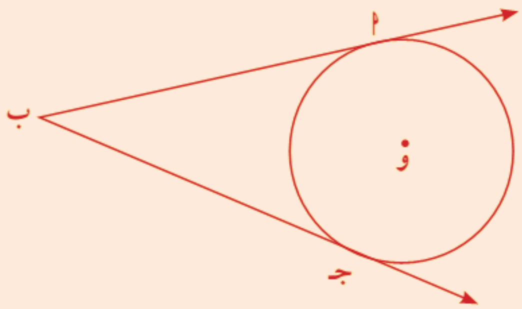
هل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن ؟ فسر إجابتك .

الحل :



نظرية (٤) القطعتان المماستان لدائرة و المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان .

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$

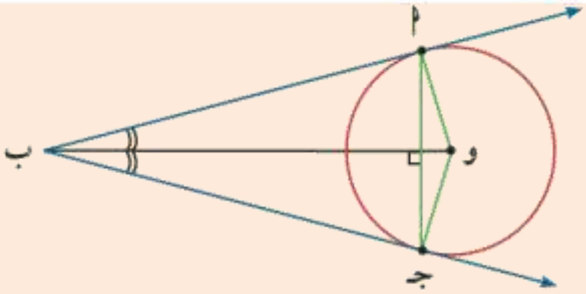


نتائج النظرية أ ب جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة .

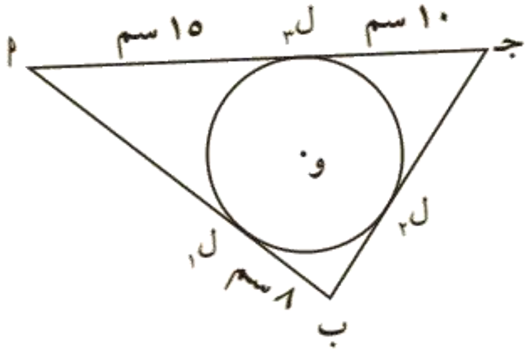
١) $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية $\widehat{\text{أ ب جـ}}$

٢) $\overleftarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية $\widehat{\text{أ و جـ}}$

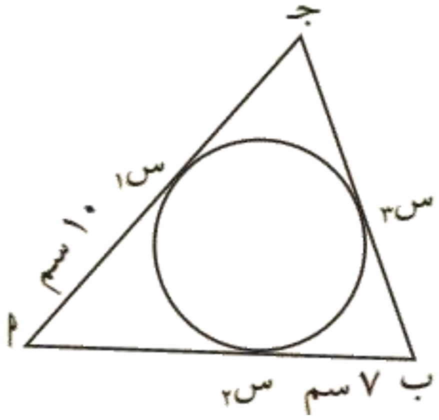
٣) $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أجـ}}$



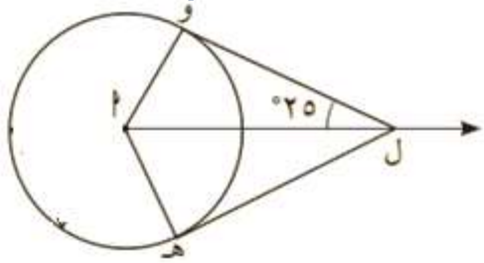
مثال(٥) في الشكل المقابل أوجد محيط المثلث أ ب جـ



مثال(٦) في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



مثال(٧) في الشكل المقابل ، أوجد ق(أ هـ ل) ، ق(ل أ و) إذا كانت $\overline{\text{ل و}}$ ، $\overline{\text{ل هـ}}$ تمسان الدائرة

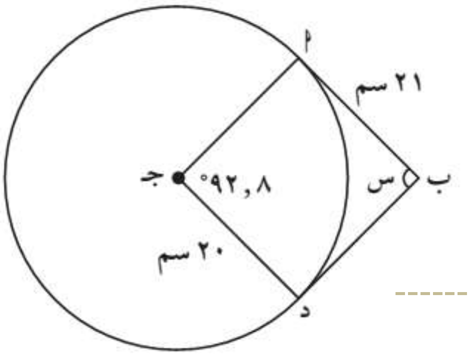


مثال(٨) ب أ ، ب د مماسان للدائرة

١) أوجد قيمة س

٢) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د .

٣) أوجد ب جـ

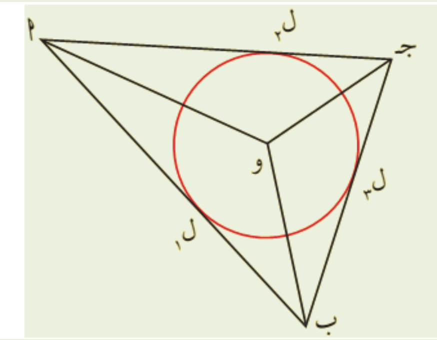


الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) :

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل .

مركز هذه الدائرة هو :

نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث .



الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة) :

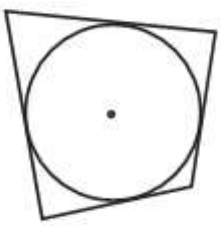
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة .

مركز هذه الدائرة هو :

نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث .

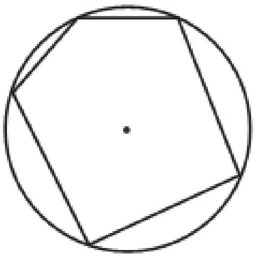
مثال(٥) : حدد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع(داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة)

١)



----

٢)



الأوتار و الأقواس

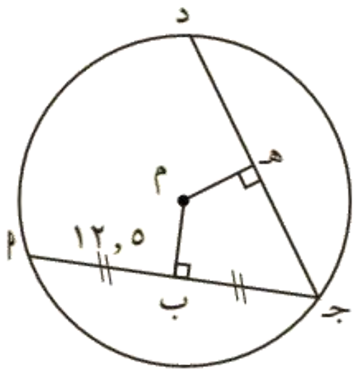
نظرية (١) في دائرة أو في دوائر متطابقة (١) للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة .

(٢) الأوتار المتطابقة تقابل أقواساً متطابقة . (٣) للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة .

نظرية (٢) (١) الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة .

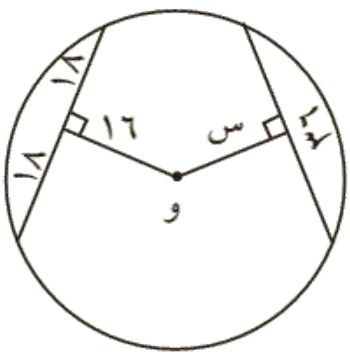
(٢) الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة .

مثال(١) في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة ، م ب = م هـ . أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسر .



تطبيق(١) : في الشكل المقابل دائرة مركزها م أوجد قيمة س . فسر

الحل:



محمد سامر القصار

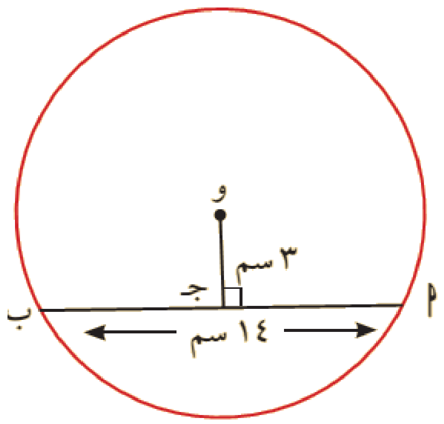
نظرية (٣)

1 القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه و ينصف كلاً من قوسيه .

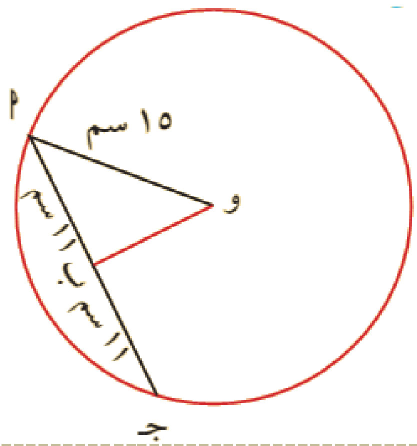
٢ القطر الذي ينصف وتراً (ليس قطراً) في دائرة يكون عمودياً على هذا الوتر .

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .

مثال (٢) في الشكل المقابل أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و .



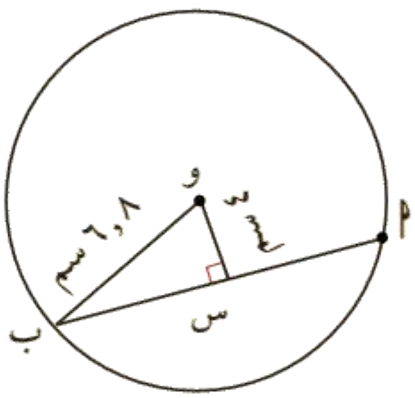
مثال (٣) في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة و الوتر .



مثال(٤) في الشكل المقابل أوجد :

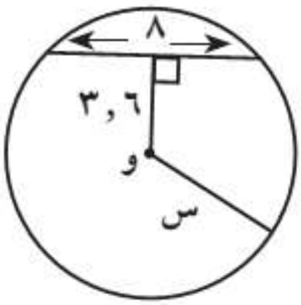
١) طول الوتر $\overline{\text{ٯ ب}}$.

٢) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{ٯ ب}}$.



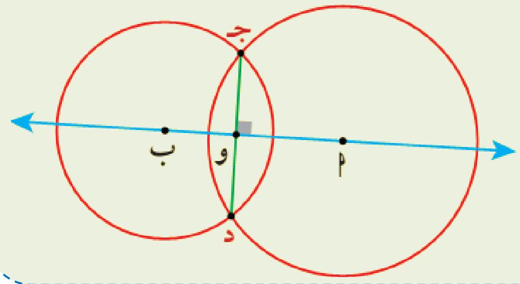
واجب : في الشكل المقابل أوجد قيمة س .

الحل :



نتيجة:

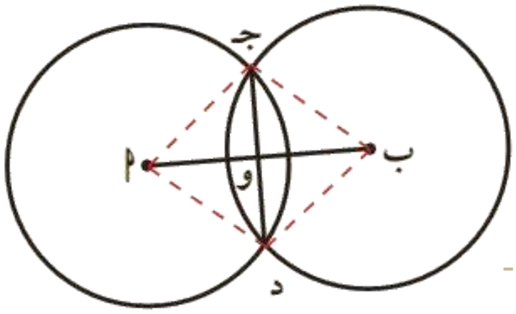
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك بينهما و ينصفه .



مثال (٢): في الشكل المقابل دائرتين متطابقتين . جـ د وتر مشترك .

إذا كان ا ب = ٢٤ سم ، س =١٣ سم

فما طول جـ د ؟



الحل :

الزوايا المركزية و الزوايا المحيطية

تعاريف ① الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة .

② الزاوية المحيطية : هي زاوية رأسها إحدى نقاط الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة .

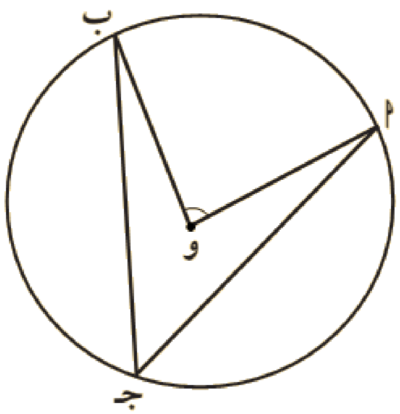
نظرية (١) قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصورة بين ضلعيها على الدائرة .

نظرية (٢) في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها .

نتيجة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه .

مثال (١) : في الشكل المقابل : إذا كان ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = 80° فأوجد ق (∠ ا جـ ب) .

الحل :

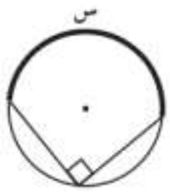


محمد سامر القصار

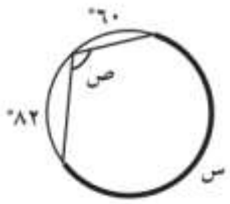
تطبيق(١) : أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية :

(أ)

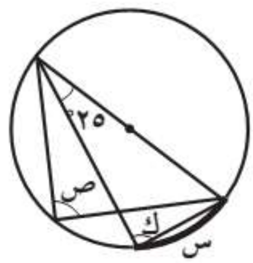
(ب)



(جـ)



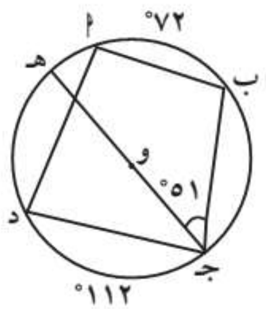
(هـ)



واجب : في الشكل المقابل أوجد قياس كل من :

(أ) القوس الأصغر ب جـ ⌢   (ب) ق(ب̂)

(جـ) ق(ب جـ̂ د)



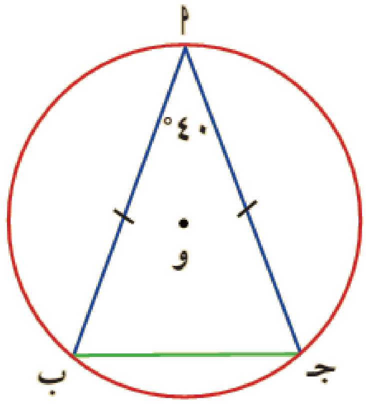
مثال (١) أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ،

ق(ب أ جـ)=٤٠°

١) أوجد قياس كل من الأقواس أ ب ، ب جـ ، أ جـ

٢) إذا كان جـ هـ منصف الزاوية الداخلية أ جـ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ .

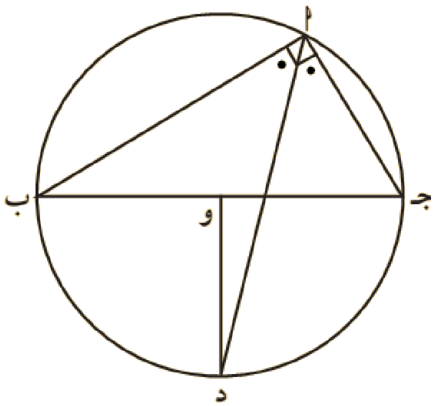
ما قياس القوس الأصغر أ هـ



مثال(٢) في الشكل المقابل : دائرة مركزها و .

١) أثبت أن د و ⊥ ب جـ .

٢) إذا كان ق(أ ب جـ) = ٣٠ ، أوجد ق(أ د ب) .



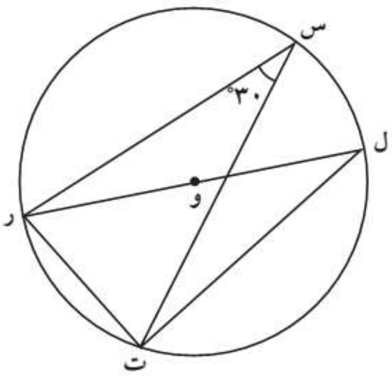
نتائج
١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان .

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة .

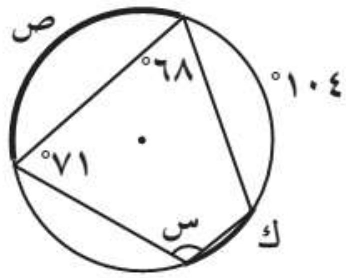
٣ كل شكل رباعي دائري تكون زواياه المتقابلة متكاملة .

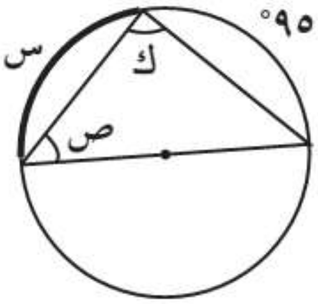
مثال(٣) مستخدماً معطيات الشكل المقابل حيث "و" مركز الدائرة

أ أوجد ق(ل ت ر) ؟ ب أوجد ق(ل ر ت)



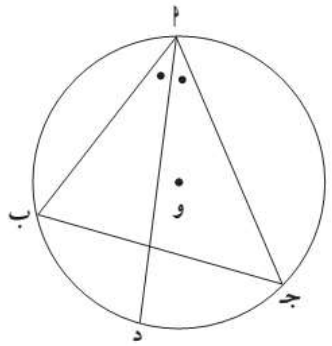
تطبيق(٣) : أوجد قياسات الزوايا و الأقواس المجهولة في الأشكال التالية :





مثال(٤) في الشكل المقابل إذا كان ﺃ د منصف الزاوية ﺃ

أثبت أن المثلث ب جـ د متطابق الضلعين .

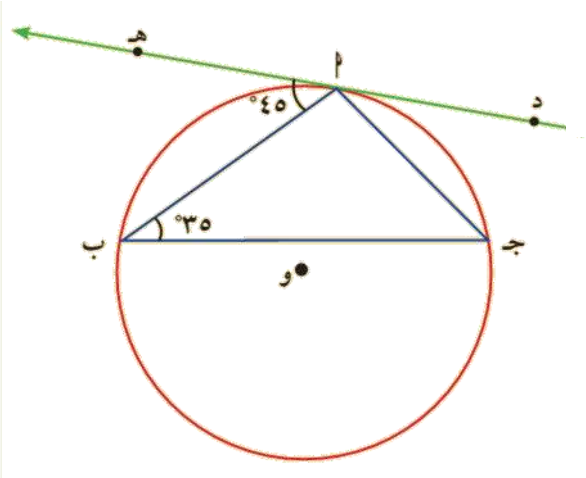


نظرية (٣)

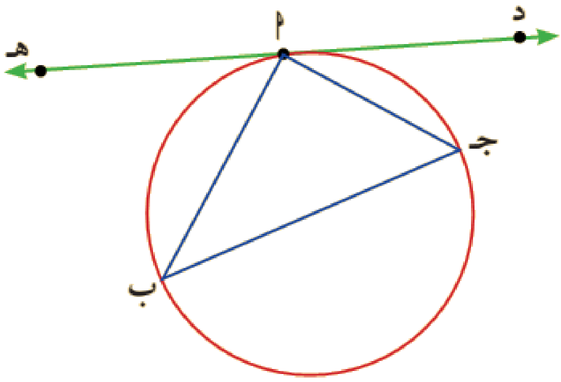
١ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه

٢ قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصورة بين المماس و الوتر .

مثال(٥) في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماساً للدائرة عند ﺃ ، فأوجد ق(جـ ﺃ ب)



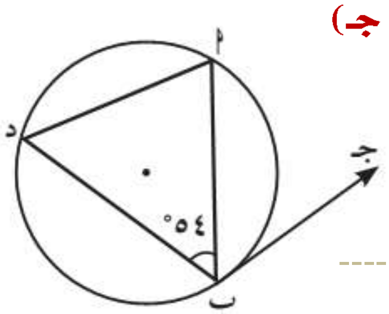
مثال(٦) في الشكل المقابل ، لدينا : ق(د أ جـ) = ٤٠ ، ق(هـ أ ب) = ٥٠°



(١) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

(٢) أثبت أن جـ ب قطر للدائرة .

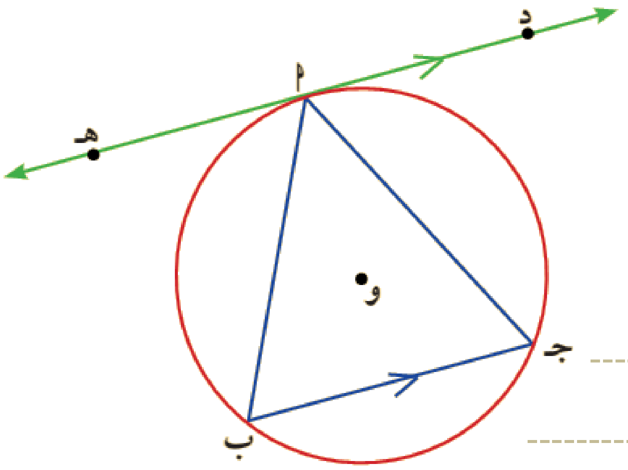
مثال(٧) في الشكل المقابل إذا كان ق(ب د) = ١٤٠ ، أوجد ق(أ ب جـ)



مثال (٨) في الشكل المقابل ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ ،

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

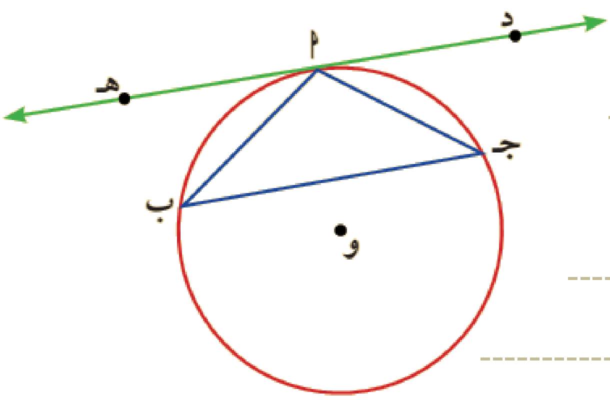
أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين .



مثال (٩) في الشكل المقابل ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ ،

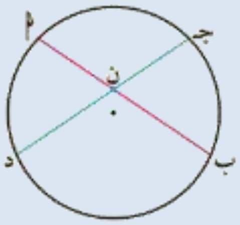
المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.



الأوتار المتقاطعة ، المماس

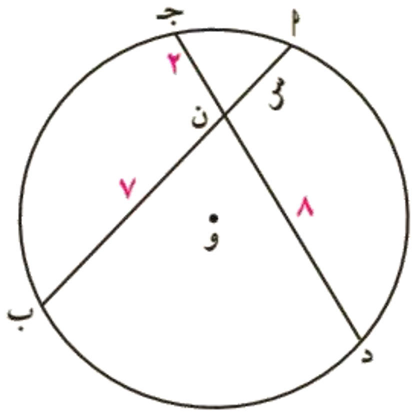
أولاً : تقاطع الأوتار داخل الدائرة :



نظرية (١) إذا تقاطع وتران داخل دائرة ، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر .

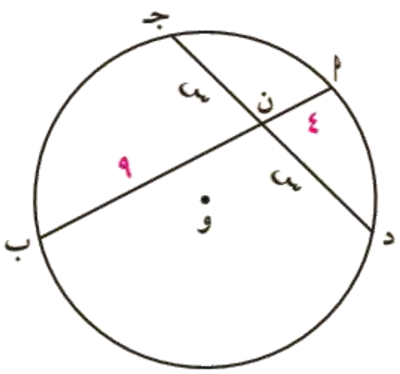
ن ا × ن ب = ن جـ × ن د

مثال(١) في الشكل المقابل أوجد قيمة س .



تطبيق(١) : في الشكل المقابل أوجد قيمة س

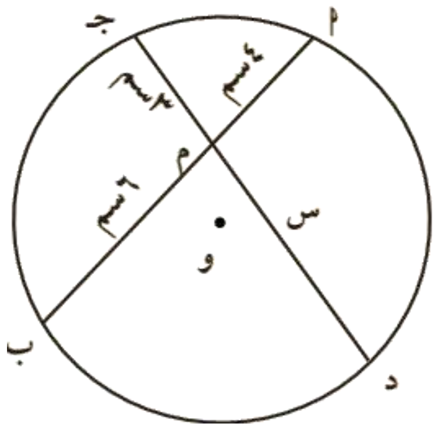
الحل :



محمد سامر القصار

مثال(٢) في الدائرة المقابلة التي مركزها و :

م ٢ = ٤ سم ، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س



(١) أوجد قيمة س

(٢) أوجد البعد بين المركز "و" والوتر د جـ

إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦

ثانيا : تقاطع الأوتار خارج الدائرة :

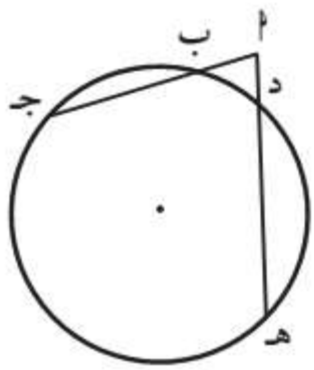
نتيجة (١) إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة ،

فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي

يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي .

م ٢ × م ب = م جـ × م د

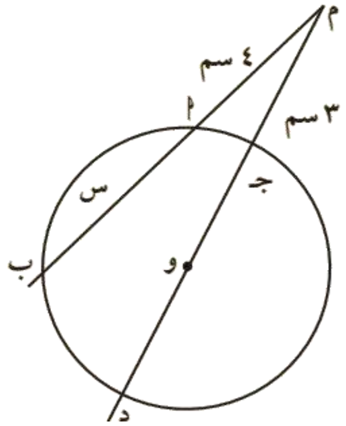
مثال(٣) في الشكل المقابل : ٢ جـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥ ، ٢ هـ = ٢٥



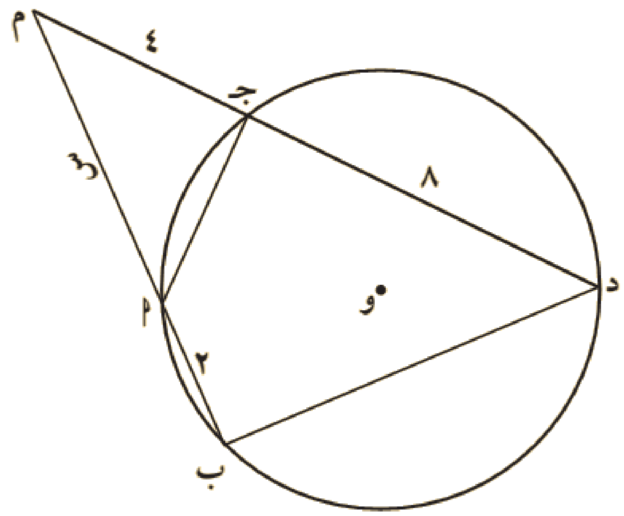
أوجد دهـ

مثال(٤) في الشكل المقابل ، دائرة مركزها و . طول نصف قطرها يساوي ٤ سم

أوجد قيمة س .



مثال(٥) في الشكل المقابل : أوجد قيمة س



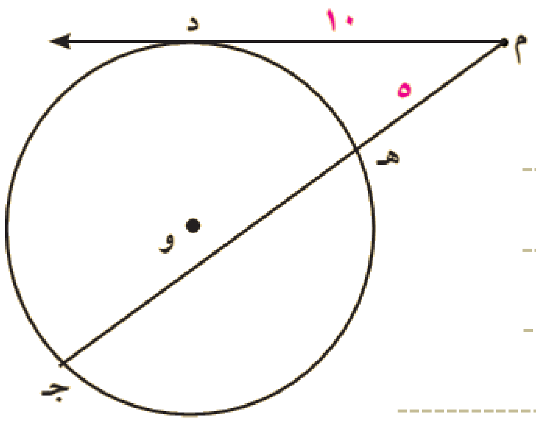
ثالثا : تقاطع مماس و قاطع الدائرة من نقطة خارج الدائرة :

نتيجة (٢) إذا رسم من نقطة خارج الدائرة قاطع و مماس ،
فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي
يساوي مربع طول القطعة المماسية .

$(\text{م د})^2 = \text{م ب} \times \text{م جـ}$

مثال(٦) : في الشكل المقابل ، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠ سم ، م هـ = ٥ سم

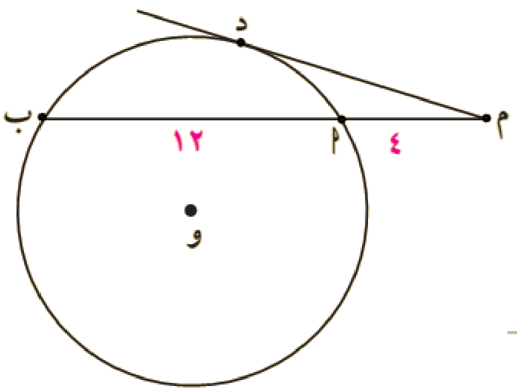
أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.



الحل :

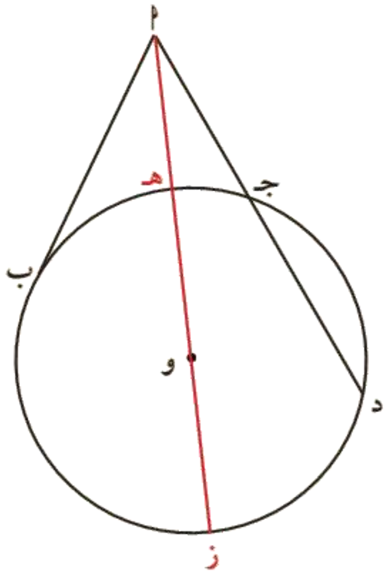
مثال(٧) في الشكل المقابل ، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$

علماً بأن : أ م = ٤ سم ، أ ب = ١٢ سم



مثال(٨) في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة

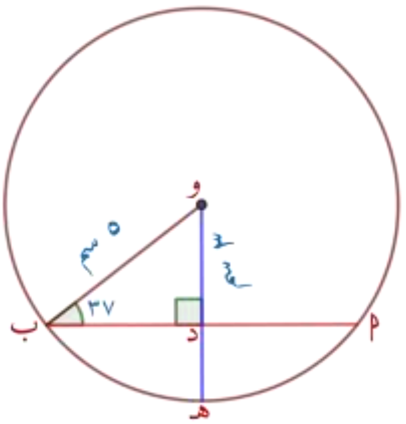
أ جـ = ١٠ ، أ هـ = ٨ ، هـ ل = ١٢ أوجد : جـ د ، أ ب .



امتحان ٢٠١٧/٢٠١٨

س١) في الشكل المقابل حيث ق(أ بَ و) = ٣٧° أوجد :

(١) أ ب **(٢) ق ب⌒ه**

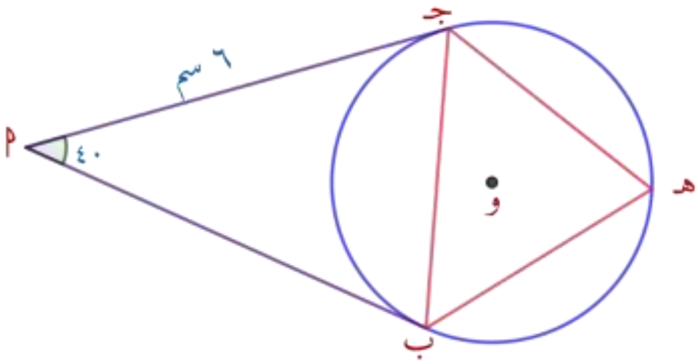


س١) في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(أَ)= ٤٠° ، أ جـ = ٦سم أوجد :

(١) أ ب

(٢) ق(أ جَـ ب)

(٣) ق(جـ هَـ ب)



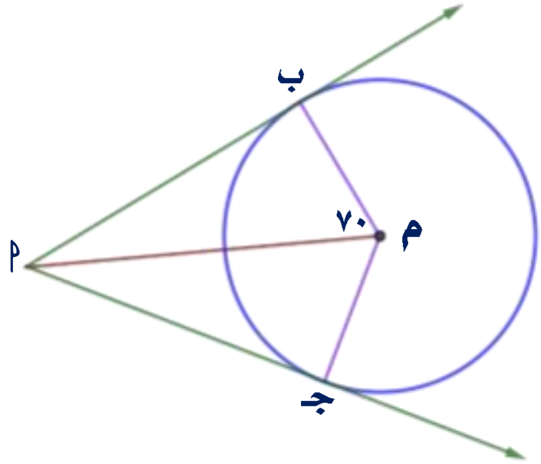
محمد سامر القصار

امتحان ٢٠١٦/٢٠١٧ (الدور الثاني)

س١) في الشكل المقابل دائرة مركزها م ، ا نقطة خارج الدائرة حيث $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا جـ}}$ مماسان للدائرة

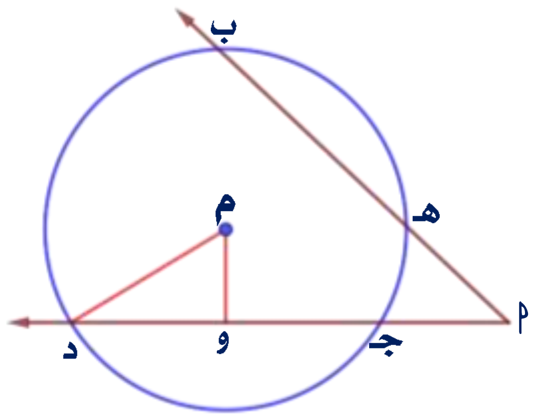
عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(ب م̂ ا) = ٧٠° فأوجد :

١) ق(م جـ̂ ا) (٢) ق(جـ ا̂ب)



س٢) في الشكل المقابل دائرة مركزها م ، ا هـ = ٧سم ، ا جـ = ٥ سم ، م و = ٦ سم ، جـ د = ١٦ سم

م و ⊥ جـ د أوجد : (١) طول $\overline{\text{هـ ب}}$ (٢) طول $\overline{\text{م د}}$

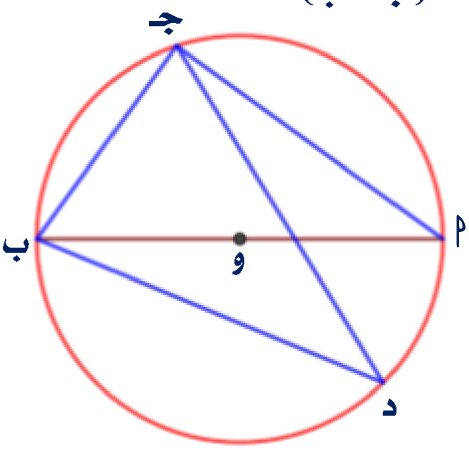


امتحان ٢٠١٦/٢٠١٧ (الفترة الثانية)

س١) في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، إذا كان ق(أ ب̂ جـ) = ٥٠

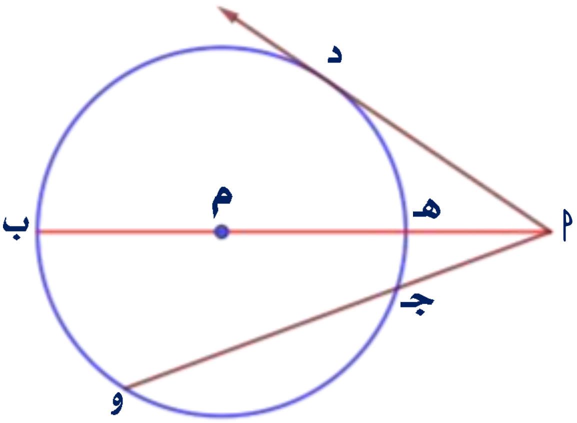
أوجد كلاً مما يلي مع ذكر السبب :

(١) ق⌒ (أ جـ ب) (٢) ق(جـ أ̂ ب) (٣) ق(جـ د̂ ب)



س٢) : في الشكل المقابل : أ د↔ مماس للدائرة أ جـ = ٣سم ، أ هـ = ٢سم ، جـ و = ٩سم

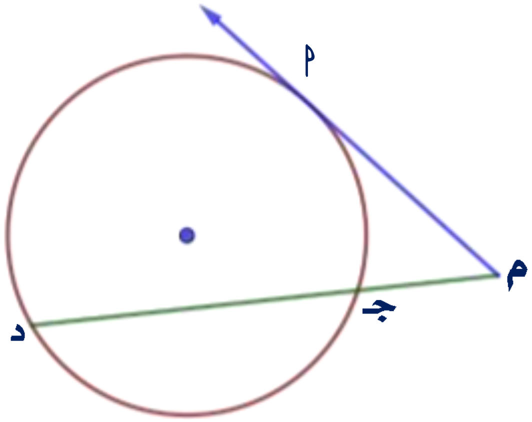
أوجد : أ د ، هـ م.



امتحان ٢٠١٥/٢٠١٦ (الفترة الرابعة)

س١) في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{م ﻫ}$ مماس للدائرة عند ﻫ. م ﻫ = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم

أوجد : جـ د.

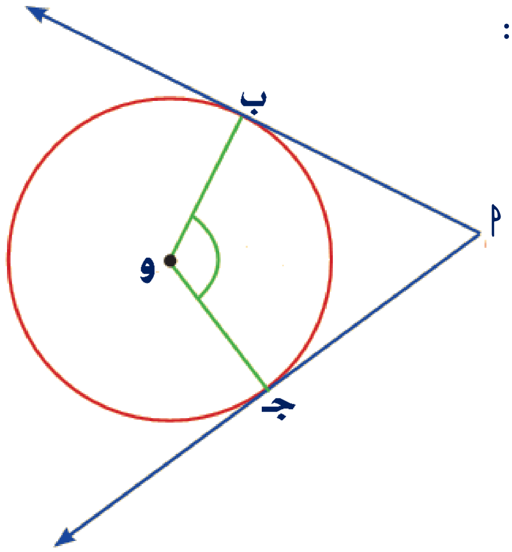


س٢) : في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{ﻫ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ﻫ جـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

ﻫ ب = ٤ سم ، و ب = ٣ سم ، ق(ب ﻫ جـ) = ٧٤ ° أوجد :

(١) ق(ﻫ ب و̂) (٢) ق(ب و جـ̂)

(٣) محيط الشكل الرباعي ﻫ ب و جـ .

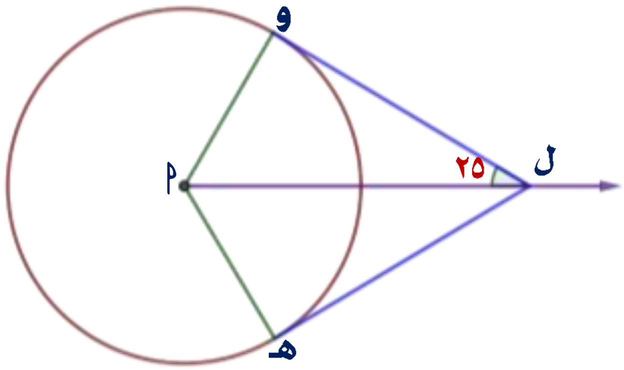


محمد سامر القصار

امتحان ٢٠١٤/٢٠١٥ (الفترة الرابعة)

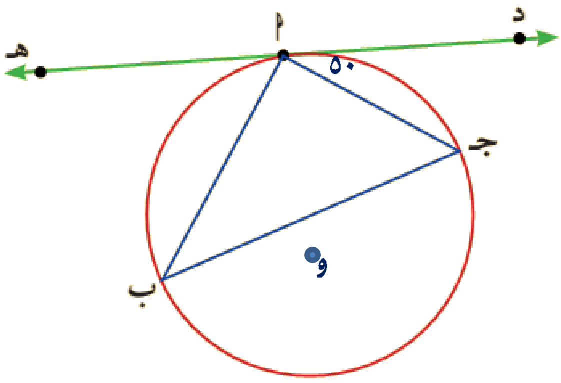
س١) : في الشكل المقابل : دائرة مركزها م، إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة

أوجد ق(م هـ ل) ، ق(ل م و)



س٢) : في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان د هـ مماساً للدائرة عند م، ق(د م جـ) =٥٠ °

أوجد قياسات زوايا المثلث م ب جـ

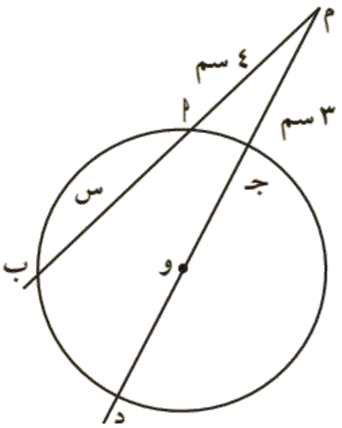


محمد سامر القصار

امتحان ٢٠١٣/٢٠١٤ (الفترة الرابعة)

س١) : في الشكل المقابل ، دائرة مركزها و . طول نصف قطرها يساوي ٤ سم

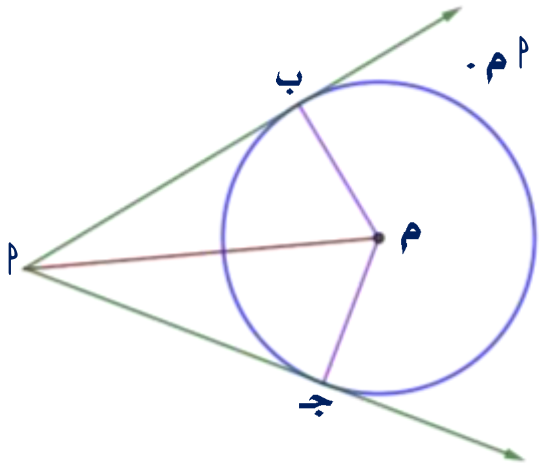
أوجد قيمة س .



س٢) في الشكل المقابل دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ٣سم ، أ نقطة خارج الدائرة حيث :

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(ب^م جـ) = ١٢٠ ° فأوجد :

(١) ق(أ^ب م) (٢) ق(جـ^أ ب) (٣) طول $\overline{\text{أ م}}$.



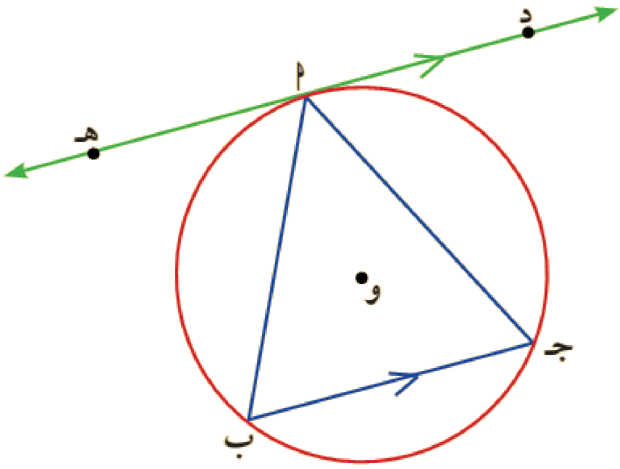
محمد سامر القصار

امتحان ٢٠١٢/٢٠١٣ (الفترة الرابعة)

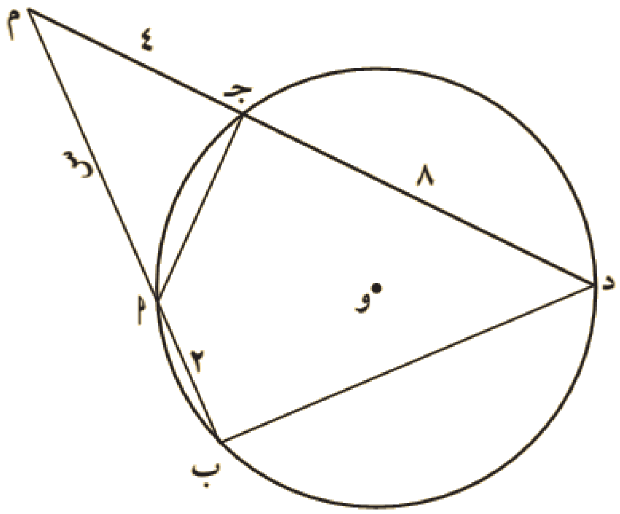
س١): في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ ،

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين .



س٢): في الشكل المقابل : أوجد قيمة س



****

المصفوفات

تعريف المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة ويرمز لها بأحد أحرف الهجاء ونضع تحته خطاً.

رتبة المصفوفة : إذا كان عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) فرتبة المصفوفة تكتب م × ن حيث نكتب عدد الصفوف أولاً ثم يليه عدد الأعمدة .
الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر . يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف و العمود الواقع فيهما .

المصفوفة المربعة : هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة .فيما عدا ذلك تسمى مصفوفة مستطيلة .

المصفوفة الأفقية : هي مصفوفة مكونة من صف واحد .

المصفوفة العمودية : هي مصفوفة مكونة من عمود واحد .

المصفوفات المتساوية : تكون مصفوفتان متساويتان إذا كانت لهما الرتبة نفسها و كانت عناصرهما المتناظرة متساوية و العكس صحيح .

مثال(١) : اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي :

<u>أ</u> = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7- & 3- & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

<u>ب</u> = $\begin{bmatrix} 3- & \frac{2}{3} & 4- \end{bmatrix}$:

<u>جـ</u> = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$:

تطبيق(١) : اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي :

<u>أ</u> = $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 7 & 0.5 & 2- \end{bmatrix}$: ---

<u>ب</u> = $\begin{bmatrix} 10 & 3 & 8- \end{bmatrix}$: ---

<u>جـ</u> = $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 5- & 1 \\ 9 & 0.6 \end{bmatrix}$: ---

مثال(٢) : في المصفوفة: <u>ب</u> = $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 12 \\ 3.5 & 2 & 6 & 2 \\ 4- & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي :

محمد سامر القصار

(أ) ب٢٢ = -------------- (ب) ب١٣ = -------------- (جـ) ب١١ = --------------

مثال(٣) : صنف كلاً من المصفوفات التالية :

أ = $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$: --

ب = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$: --

جـ = $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 12 & 5 \\ 1.6 & 9 \end{bmatrix}$: --

د = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$: --

مثال(١)

إذا كانت : $\begin{bmatrix} 2\text{س} - 5 & 4 \\ 3 & 3\text{ص} + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 4 \\ 3 & \text{ص} + 18 \end{bmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من س ، ص**

تطبيق(٥) : (أ) إذا كانت : $\begin{bmatrix} 38 & 5 \\ 3 & 4\text{ص} - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} + 2 & 5 \\ 3 & -\text{ص} \end{bmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من س ، ص**

(ب) إذا كانت : $\begin{bmatrix} س^2 & 4 \\ -2 & ص^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 5ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

العمليات على المصفوفات

الجمع و الطرح و الضرب القياسي و ضرب المصفوفات

****

أولاً : الجمع و الطرح : لجمع مصفوفتين يجب أن تكونا من الرتبة نفسها .

و نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين .

مثال(٢) إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن : (أ) $\underline{أ} + \underline{ب}$ (ب) $\underline{أ} - \underline{ب}$

تطبيق(١) : إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

أوجد ا - ب ، ب - ا

الحل :

تطبيق أوجد ناتج ما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة في عدد :

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك $\neq$ ٠

الناتج هو المصفوفة كأ

نحصل على المصفوفة ك أ بضرب كل عنصر من أ في ك

إذا كان ك = ٠ نحصل على المصفوفة الصفرية .

مثال(٣) إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

فأوجد : ٥ أ - ٣ ب ، ٢ أ + ب

حل المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية : هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير)

القصار

مثال(١) حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$\underline{س}^{٢} - \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 9 & 8\end{bmatrix}$$

مثال(٢) : أوجد س حيث :

$$\underline{س} + \begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 10\\ 4 & -4\end{bmatrix}$$

الحل :

مثال (٣) :

$$\begin{bmatrix}-٣ & ٢ & ١\\ ٣ & ١ & ٢\end{bmatrix} + \underline{س} = \begin{bmatrix}٨ & ١ & ٥\\ ٥ & ٠ & -٦\end{bmatrix}$$

مثال(٤) حل المعادلة : ٤ $\underline{س}$ +٢ $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 10\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

مثال(١) : إذا كانت : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

فأوجد : ٥ أ ، ٣ب . ثم ٥ أ - ٣ ب

الحل :

مثال (١) : من المثال (١) أوجد : ٥ ب - ٤ أ ، أ + ٦ ب

مثال(٧) إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد $\underline{ب}^2$ ، $\underline{ب}^3$

مثال(٢) : حل المعادلة : ٤ س + $2\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 10\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

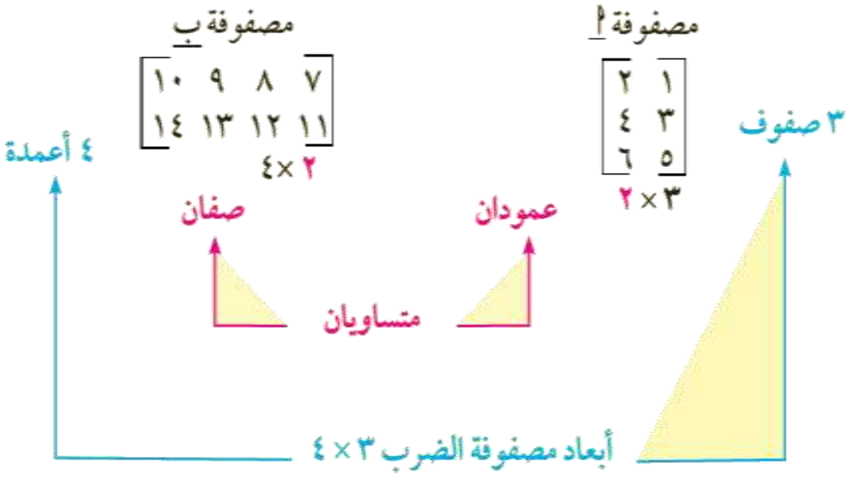
الحل :

تطبيق(٢) : حل كل معادلة مما يلي :

٢ س = $\begin{bmatrix}12 & 4\\ -4 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات :

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.



تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$أ_{م \times ن} \times ب_{ن \times ر} = جـ_{م \times ر}$

مثال(٣) : بفرض أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب : أ × ب ، ب × أ معرفة أو غير معرفة .

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرفة .

الحل :

****

تطبيق (٣) :

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥- \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

(٥) أ × ب ________________

(٦) أ × جـ ________________

(٧) جـ × ب ________________

(٨) د × أ ________________

(٩) د × جـ ________________

مثال(٦) أوجد ناتج أ × ب حيث : أ = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

تطبيق(٤) : أوجد ناتج الضرب : $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

واجب : أوجد ناتج ضرب كل مما يلي :

(١) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

مصفوفات الوحدة و النظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ١ و بقية العناصر صفر و يرمز لها و

النظير الضربي : إذا كانت ب ، جـ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون ب × جـ = و

فإن جـ هي النظير الضربي للمصفوفة ب و يرمز لها ب-١

مثال(٨) أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

تطبيق(١) : بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى .

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} ج & أ \\ د & ب \end{bmatrix}$ هو أ د − ب ج

نكتب $|أ| = \begin{vmatrix} ج & أ \\ د & ب \end{vmatrix} =$ أ د − ب ج

مثال(٩) أوجد محدد كل من المصفوفات التالية :

$أ = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

تطبيق(٢) : أوجد محدد كل مصفوفة .

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢- & ٦- \end{bmatrix}$

محمد سامر القصار

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة **المنفردة** .

مثال(١٠) إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 4 & س \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س

تطبيق(٣) : إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2س & -4 \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س

الحل :

خاصية

بفرض أن: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{\text{أ}}$ لها نظير ضربي $\underline{\text{أ}}^{-1}$ حيث:

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\text{أ}}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{\text{أ د} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

مثال(١١) هل للمصفوفة : $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي ؟ في حالة الإيجاب أوجده

تطبيق(٤) : هل للمصفوفة : $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي ؟ فسّر إجابتك

الحل :

مثال(١٢) حل المعادلة :

$$\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

تطبيق حل المعادلة :

$$\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

حل نظام من معادلتين خطيتين

أولاً : الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة :

مثال(١٣) حل النظام : $\begin{cases} \text{س} - \text{ص} = 7 \\ \text{س} + \text{ص} = 3 \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة .

مثال(١٣) حل النظام : $\left\{\begin{array}{l} \text{س} + \text{ص} = ٥ \\ \text{س} - ٢\text{ص} = -٤ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة .

ثانياً : الحل باستخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين :

مثال(١٤) حل النظام : $\begin{cases} 5س + 3ص = 7 \\ 3س + 2ص = 5 \end{cases}$ باستخدام قاعدة كرامر .

مثال(١٥) حل النظام : $\begin{cases} 3س + 2ص = -6 \\ -4س - 3ص - 7 = 0 \end{cases}$ باستخدام قاعدة كرامر.

محمد سامر القصار

****

واجب : حل المعادلة المصفوفية إن أمكن :

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

واجب : حل المعادلة المصفوفية إن أمكن :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- \\ ٣ \end{bmatrix}$$

أسئلة الامتحانات السابقة (المصفوفات)

س١) استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل النظام :
$$\begin{cases} 5س + 3ص = 7 \\ 3س + 2ص = 5 \end{cases}$$
الفترة الثانية ٢٠١٧/٢٠١٨

س٢) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :
$$\begin{cases} 4س - 5ص = -7 \\ 3ص - 6س = -3 \end{cases}$$
الدور الثاني ٢٠١٦/٢٠١٧

س٣) أوجد س بحيث :
$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$
الفترة الثانية ٢٠١٦/٢٠١٧

س٤) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :
$$\begin{cases} 3س + 2ص = -6 \\ -4س - 3ص = 7 \end{cases}$$
الفترة الرابعة ٢٠١٥/٢٠١٦

س٥) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :
$$\begin{cases} 2س + ص = 4 \\ س + 3ص = 7 \end{cases}$$
الفترة الثالثة ٢٠١٥/٢٠١٦

س٦) إذا كانت : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
الفترة الثالثة ٢٠١٥/٢٠١٦

فأوجد : ➊ النظير الضربي لـ أ ➋ أ + ٣ ب

****

س٧) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام : س + ص = 7 ، س − ص = 1

الدور الثاني ٢٠١٤/٢٠١٥

س٨) استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل النظام : س + 3ص = 5 ، س + 4 ص = 6

الفترة الرابعة ٢٠١٤/٢٠١٥

س٩) اكتب نظام المعادلات : 5س + 3ص = 7 ، 3س + 2 ص = 5

الفترة الرابعة ٢٠١٣/٢٠١٤

على صورة المعادلة المصفوفية أ× ع = ب حيث أ هي مصفوفة المعاملات ، ع هي مصفوفة المتغيرات ب هي مصفوفة الثوابت . ثم حل نظام المعادلات (باستخدام النظير الضربي أو باستخدام المحددات)

س١٠) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام : 2س + ص = 4 ، س + 3ص = 7

الفترة الرابعة ٢٠١٢/٢٠١٣

س١١) أوجد النظير الضربي للمصفوفة : أ = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

الفترة الرابعة ٢٠١٢/٢٠١٣

س١٢) إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

أثبت أن ب هي النظير الضربي لـ أ

الفترة الثالثة ٢٠١٢/٢٠١٣

س١٣) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام : 3س + 2ص = −6 ، −4س − 3ص = 7

الفترة الثالثة ٢٠١٢/٢٠١٣