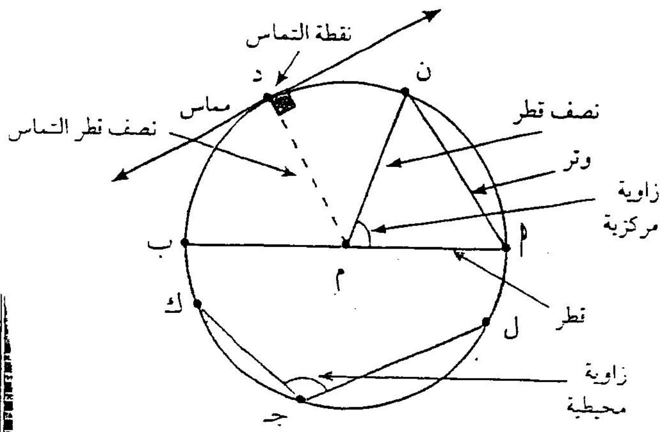
الوحدة السادسة

هندسة الدائرة

الوحدة السادسة — هندسة الدائرة

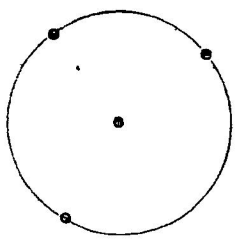
(٦-١) أ الدائرة



تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

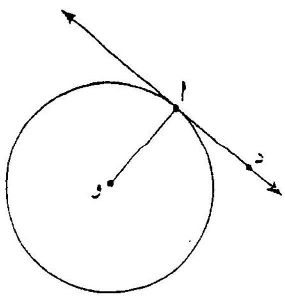
تسمى النقطة الثابتة مركز **الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز نق.



نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

(٦-١) ب مماس الدائرة



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

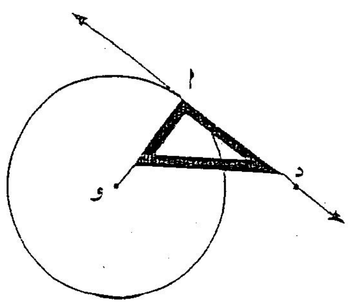
$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

نظرية (٢)



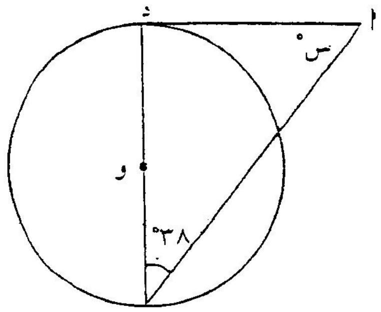
المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

أي أن $\overline{\text{وأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{دأ}}$.

حاول أن تحل ص ١٥

② في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و. أوجد قيمة س°.



المعطيات: $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و

المطلوب: إيجاد قيمة س°

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{أد}$ مماس ، $\overline{دو}$ نصف قطر التماس

∴ ق(أ $\hat{د}$ و) = ٩٠° (نظرية)

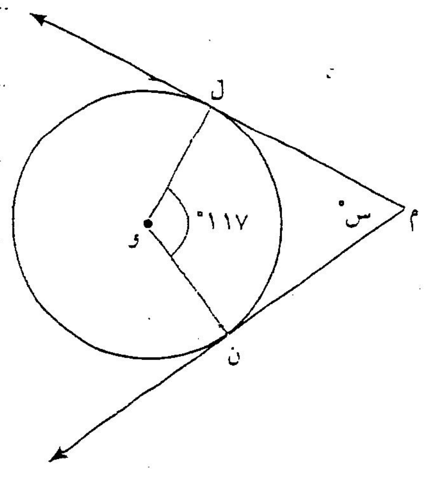
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

٩٠° + ٣٨° + س° = ١٨٠°

∴ س° = ٥٢°

مثال (٢)

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{مل}$، $\overleftrightarrow{من}$ مماسان للدائرة التي مركزها و. أوجد قياس الزاوية ل $\hat{م}$ ن.



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{مل}$ ، $\overleftrightarrow{من}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ل $\hat{م}$ ن

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{مل}$ مماس

و ل نصف قطر التماس

∴ ق(م $\hat{ل}$ و) = ٩٠°

وبالمثل: ق(م $\hat{ن}$ و) = ٩٠° نظرية

بما أن ل م ن و رباعي فمجموع قياسات زواياه يساوي ٣٦٠°.

∴ ق($\hat{ل}$) + ق($\hat{ن}$) + ق($\hat{م}$) + ق($\hat{و}$) = ٣٦٠°

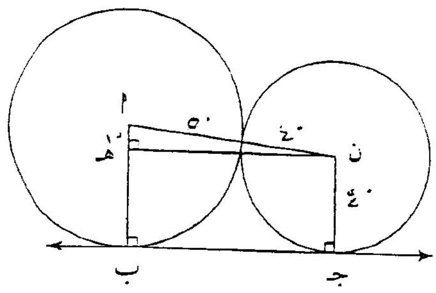
٩٠° + ٩٠° + س° + ١١٧° = ٣٦٠° بالتعويض

٢٩٧° + س° = ٣٦٠° بالتبسط

س° = ٦٣°

∴ ق(ل $\hat{م}$ ن) = ٦٣°

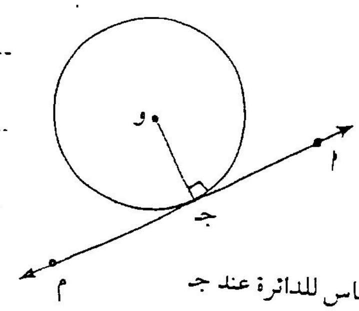
حاول أن تحل ص ١٦



٣. يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.
أوجد طول $\overline{ب جـ}$ إذا كانت الدائرتان متماستين وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.

البرهان: المثلث ن هـ أ قائم الزاوية في هـ
بتطبيق نظرية فيثاغورث
$(أن)^2 = (ن هـ)^2 + (أ هـ)^2$
$(ن هـ)^2 = (أن)^2 - (أ هـ)^2$
$= (٩٠)^2 - (١٠)^2 = ٨٠٠٠$
ن هـ = ٨٩٫٤٤
∴ الشكل ن جـ ب هـ مستطيل
∴ ب جـ = ن هـ = ٨٩٫٤٤

نظرية (٣)

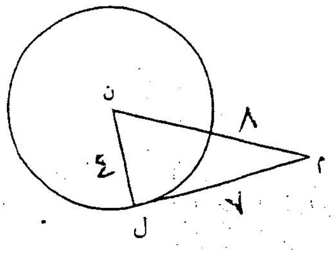


$\overleftrightarrow{أم}$ مماس للدائرة عند جـ

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

إذا كان $\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{و جـ}$
فإن $\overleftrightarrow{أم}$ مماس للدائرة عند جـ

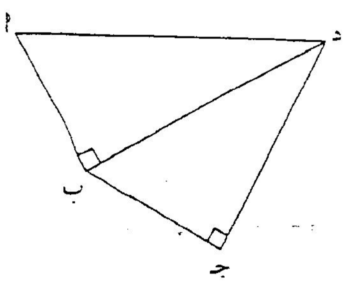
حاول أن تحل ص ١٨



٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤، ل م = ٧، ن م = ٨، فهل $\overleftrightarrow{م ل}$ مماس للدائرة؟ فسّر إجابتك

$(ن ل)^2 + (ل م)^2 = ٤^2 + ٧^2 = ٦٥$
$(ن م)^2 = ٨^2 = ٦٤$
$\therefore (ن ل)^2 + (ل م)^2 \neq (ن م)^2$
∴ ق(∠ م ل ن) ≠ ٩٠° ∴ $\overleftrightarrow{م ل}$ ليس مماس للدائرة

حاول أن تحل ص ١٩

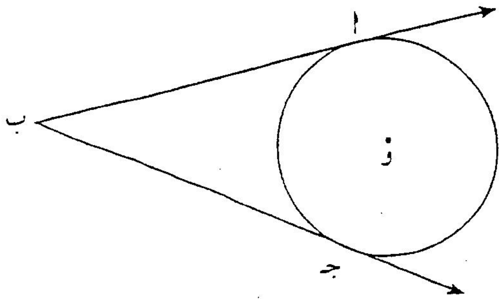


٥ أكمل النص التالي:

$\overline{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث ..ب جـ د

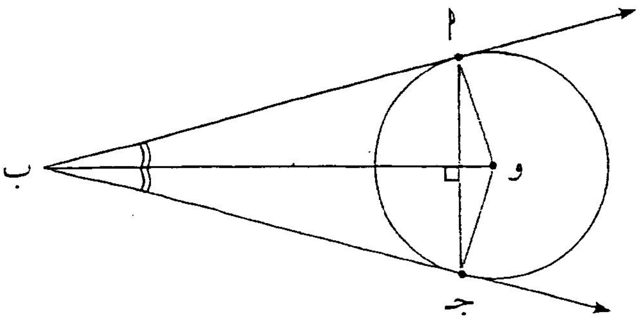
نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.



$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$

نتائج النظرية



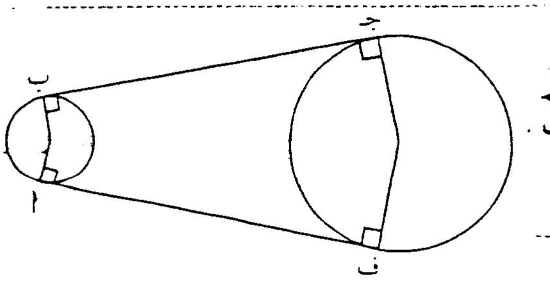
Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ$\hat{\text{ب}}$ جـ

٢ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ$\hat{\text{و}}$ جـ

٣ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

حاول أن تحل ص ٢١



٦ مستخدمًا الرسم أعلاه، أثبت أن ب جـ = أف إذا لم يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مع $\overleftrightarrow{\text{أف}}$.

البرهان: $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ف}} = \emptyset$

$\therefore \overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ف}}$

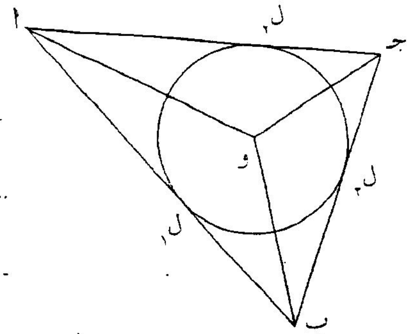
$\therefore$ الشكل أ ف جـ ب مستطيل

$\therefore$ ب جـ = أ ف

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

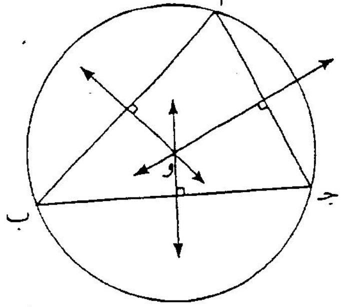
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)

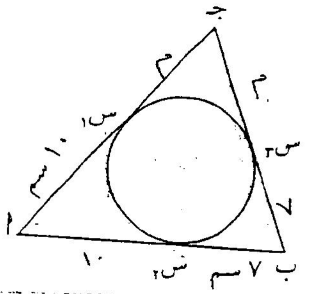
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



حاول أن تحل ص ٢٣

⑦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{ب جـ}$.



البرهان :- أ س١ = أ س٢ = ١٠ سم نظرية

ب س٢ = ب س٣ = ٧ سم نظرية

جـ س١ = جـ س٣ = م سم نظرية

محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم

∴ أ ب + ب جـ + أ جـ = ٥٠

١٠ + ٧ + ٧ + م + م + ١٠ = ٥٠

٣٤ + ٢م = ٥٠

٢م = ٥٠ − ٣٤

$\frac{٢م}{٢} = \frac{١٦}{٢}$

م = ٨

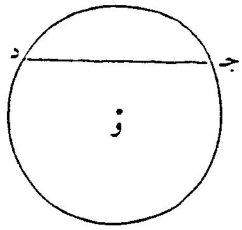
∴ ب جـ = ٧ + ٨ = ١٥ سم

الأوتار والأقواس (٦ - ٢)

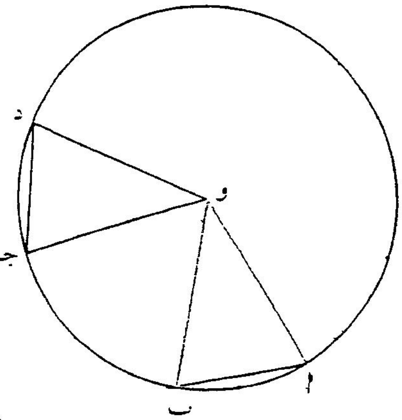
الوتر (Chord) هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة.

يبيّن الشكل المقابل الوتر $\overline{\text{جـ د}}$ والقوس (Arc) $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$ المناظر لهذا الوتر.

تتمحور النظرية التالية على العلاقة بين الزوايا المركزية في دائرة والأوتار والأقواس التي تحصرها.



نظرية (١)

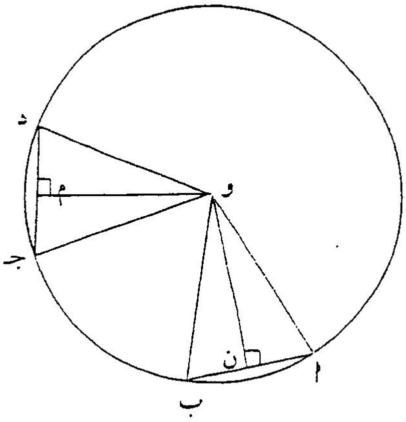


في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

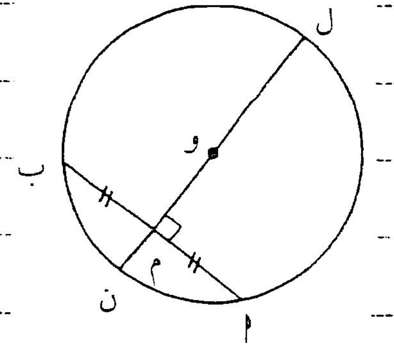
٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.



نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



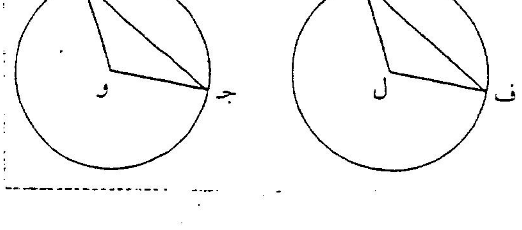
نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

حاول أن تحل — صـ ٢٥

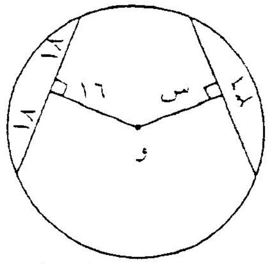


١ في الرسم أعلاه، إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{دف}}$ ، فماذا تستنتج؟

∴ $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$

∴ $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$ ⇐ $(\hat{\text{و}}) \cong (\hat{\text{ل}})$

حاول أن تحل ص ٢٧



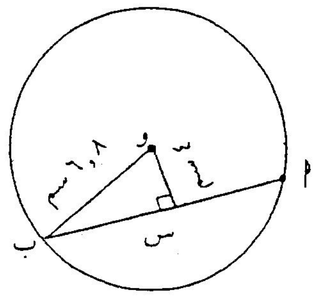
٢ دائرة مركزها و. أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.

البرهان ∵ طول الوتر = طول الوتر = ٣٦

∴ البعد = البعد

∴ س = ١٦

حاول أن تحل ص ٣٠



٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{أب}$.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.

∵ $\overline{وس} \perp \overline{أب}$

∴ أس = س ب

$(س ب)^2 = (و ب)^2 - (و س)^2$

$(س ب)^2 = (٦٫٨)^2 - (٤)^2 = ٣٠٫٢٤$

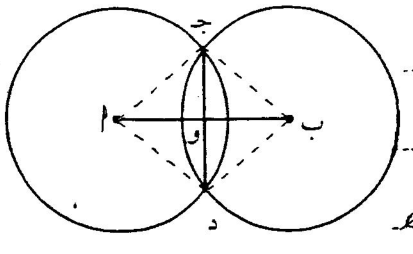
∴ س ب ≃ ٥٫٥

أس = ٥٫٥ سم

معلومة مفيدة:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

حاول أن تحل ص ٣١



٤ في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، ب جـ = ١٣ سم، فأوجد طول $\overline{أب}$.

$\overline{أب} \perp$ جـ د خط المركزين يكون عموديا على الوتر المشترك وينصفه

∴ $\overline{ب و} \perp \overline{جـ د}$

∴ د و = و جـ = $\frac{1}{2}$ جـ د = ٧ سم   وبالمثل أ و = ١٠٫٩٥ سم

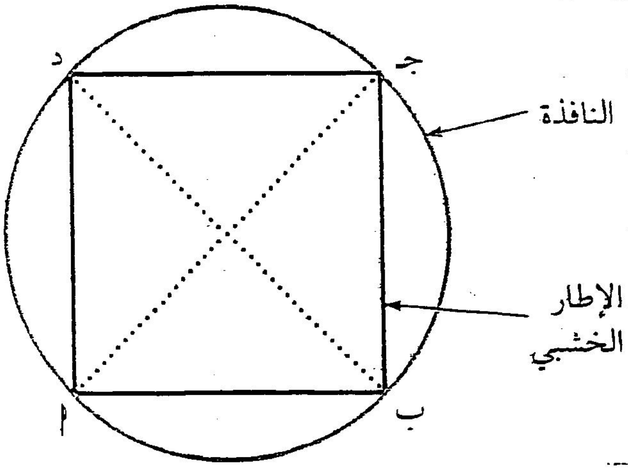
في △ ب جـ و القائم في و

$(ب و)^2 = (١٣)^2 - (٧)^2 = ١٢٠$

∴ ب و = ١٠٫٩٥ سم ⇐ أب = ٢ × ١٠٫٩٥ = ٢١٫٩ سم

حاول أن تحل ص ٣١

٥ في مثال (٥) أعلاه، أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ضلع المربع يساوي ١٫٥ متر.



أجـ = أب × $\sqrt{2}$

أجـ = ١٫٥ × $\sqrt{2}$

∴ نق = $\frac{١٫٥ \times \sqrt{2}}{٢}$ = ١٫٠٦ متر

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية (٦ - ٣)

١ - الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

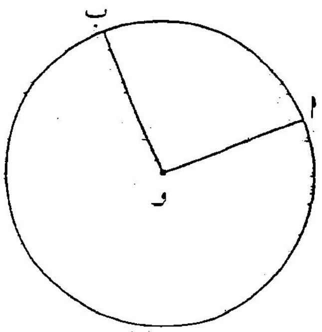
تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.



ق(∠أوب) = ق(أب⌢)

حاول أن تحل صـ ٣٣

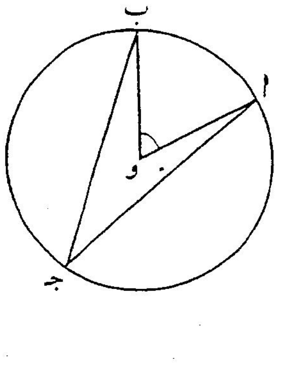
١- **إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.**

∵ قياس الزاوية المركزية = ٣٥°

∴ قياس القوس المحصور بين ضلعيها = ٣٥°

نظرية (٢)

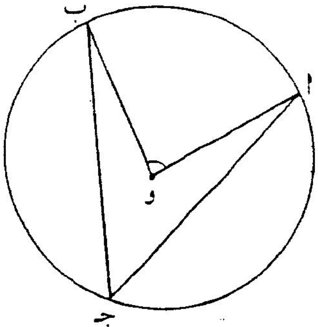
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



ق(∠أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أوب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌢)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

مثال (٢)



في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(أجب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة. ق(⌒أب) = ٨٠°

المطلوب: إيجاد ق(أجب).

البرهان:

أجب زاوية محيطية في الدائرة ∴ ق(أجب) = $\frac{1}{٢}$ ق(⌒أب)

= $\frac{1}{٢}$ (٨٠°) = ٤٠°

وبالتالي ق(أجب) = ٤٠°

حاول أن تحل ص ٣٥

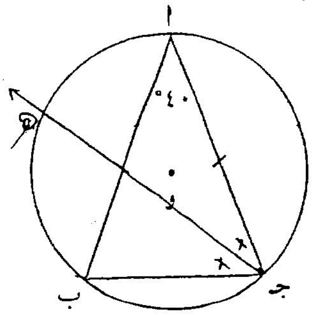
٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

الحل: قياس القوس = ٢ × ٥٤° = ١٠٨°

مثال (٣)

أجـب مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب أ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس ⌒أب، ⌒ب جـ، ⌒أجـ.



البرهان:

زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة ∴ ق(ب أ جـ) = $\frac{1}{٢}$ ق(⌒ب جـ)

ومنه: ٤٠° = $\frac{1}{٢}$ ق(⌒ب جـ). ∴ ق(⌒ب جـ) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°.

∴ ق(⌒جـ أ ب) = ٣٦٠° - ٨٠° = ٢٨٠°

∵ أب = أجـ

∴ ق(⌒أب) = ق(⌒أجـ) = $\frac{٢٨٠}{٢}$ = ١٤٠°.

حاول أن تحل ص ٣٦

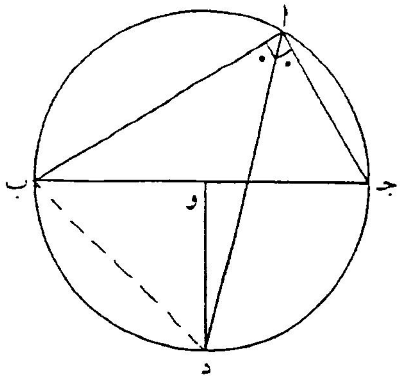
٣ في المثال (٣) إذا كان $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ منصف الزاوية الداخلية أجب ويقطع الدائرة في النقطة هـ. ما قياس القوس الأصغر ⌒أهـ؟

ق(أجب) = ½ ق(⌒أب) = ٧٠°

∴ ق(أجهـ) = ½ ق(أجب) = ٣٥°

∴ ق(⌒أهـ) الأصغر = ٢ × ٣٥° = ٧٠°

مثال (٤)



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{\text{د و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ منصف (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) ويقطع الدائرة في د.

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{د و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان:

∵ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٩٠° معطى

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ منصف الزاوية ب $\hat{\text{أ}}$ جـ

∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ د) = ٤٥°

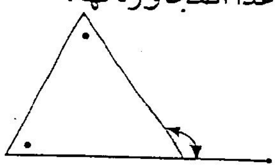
∵ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ د) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) نظرية

∴ ق($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) = ٩٠°، ق(جـ $\hat{\text{و}}$ د) = ٩٠° نظرية

∴ $\overline{\text{د و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

تذكر

قياس الزاوية الخارجة عن مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها.



حاول أن تحل ص ٣٧

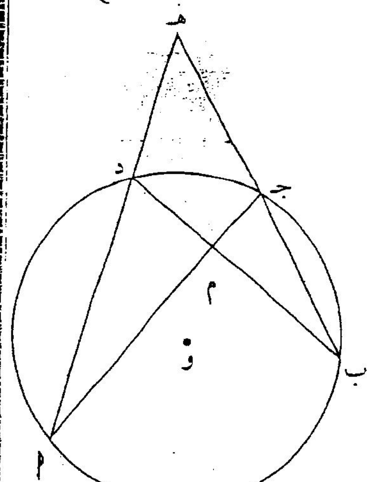
٤ في المثال (٤)، إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}}$) = ٣٠°، أوجد ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب).

في △ أ ب جـ

ق(أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

∴ ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠ = ٦٠°



حاول أن تحل ص ٣٧

٥ في المثال (٥)، أثبت أن ق(ب $\hat{\text{هـ}}$ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

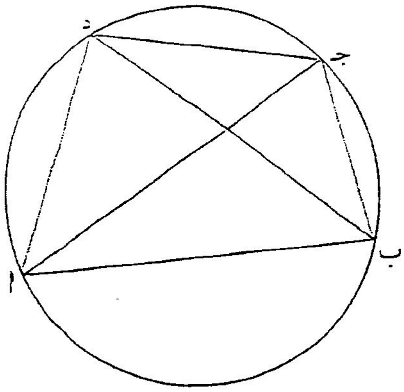
البرهان: (ب $\hat{\text{جـ}}$ أ) خارجة عن المثلث هـ جـ أ

∴ ق(ب $\hat{\text{هـ}}$ أ) = ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ أ) − ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ د)

= $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ}}$) − $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$)

= $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

مثال (٦)



أ ب جـ د شكل رباعي دائري. أثبت أن ق(أبَد) = ق(أجَد).

الحل:

المعطيات: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين (أبَد)، (أجَد).

البرهان: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أبَد زاوية محيطية ∴ ق (أبَد) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أد) (١)

أجَد زاوية محيطية ∴ ق (أجَد) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أد) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق (أبَد) = ق (أجَد).

معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

حاول أن تحل ص ٣٨

٦ في المثال (٦)، أثبت أن ق (أدَب) = ق (أجَب)

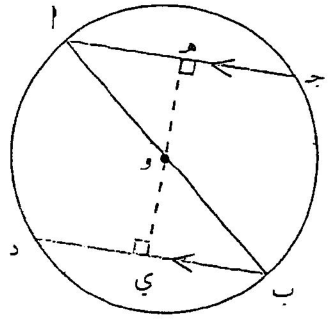
البرهان: ∵ أدَب زاوية محيطية ∴ ق(أدَب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب) ← (١)

أجَب زاوية محيطية ∴ ق(أجَب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب) ← (٢)

من (١) و(٢) نستنتج أن ق(أدَب) = ق(أجَب)

مثال (٧)

أب قطر في دائرة مركزها و. من أ، ب نرسم وترين متوازيين يقطعان الدائرة في جـ، د على الترتيب. أثبت أن الوترين هما على البعد نفسه من مركز الدائرة.



الحل:

المعطيات: أب قطر في دائرة مركزها و. أجـ // ب د .

المطلوب: إثبات أن الوترين أجـ ، ب د هما على البعد نفسه من المركز و.

العمل: من و نرسم مستقيمًا متعامدًا مع أجـ ويقطع أجـ في هـ ويقطع ب د في ي.

البرهان: أجـ // ب د ∴ وهـ متعامد مع ب د ويقطعها في النقطة ي. علينا إثبات أن و هـ = و ي.

في المثلثين و أ هـ، و ب ي: و أ = و ب = نق

ق(ب يَ و) = ق(أ هَـ و) = ٩٠°

ق(ي بَ و) = ق(هـ أَ و) بالتبادل والتوازي

∴ المثلثان و أ هـ، و ب ي متطابقان (ز . ض . ز)

ومنه و هـ = و ي (تطابق الأضلاع المتناظرة)

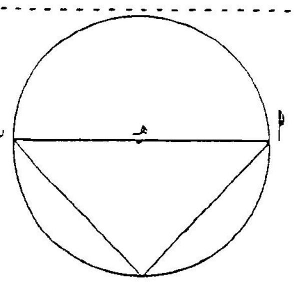
تذكر أن
الأوتار التي على أبعاد متساوية
من مركز الدائرة تكون متطابقة

حاول أن تحل ص ٣٨

٧ في المثال (٧)، أثبت أن أ جـ = ب د.

∵ وهـ = وي ∴ أجـ = ب د

تدريب (١): ص ٣٩

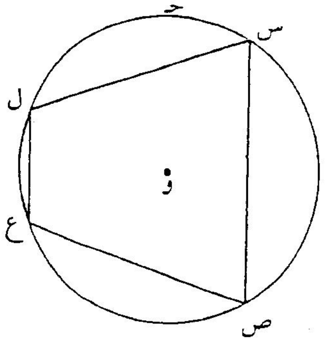


إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ ∈ الدائرة ، أثبت أن (أ جـ ب) زاوية قائمة.

∵ أب قطر

∴ ق(أب) = ١٨٠°   ∴ ق(أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب) = ٩٠°

تدريب (٢): ص ٣٩



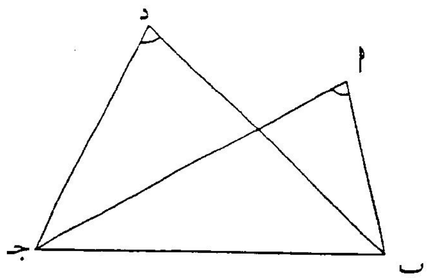
س ص ع ل شكل رباعي دائري. أثبت أن ق(ل س ص) + ق(ل ع ص) = ١٨٠°

ق (ل س ص) + ق (ل ع ص) = $\frac{1}{2}$ ق (ل ع ص) + $\frac{1}{2}$ ق (ل س ص)

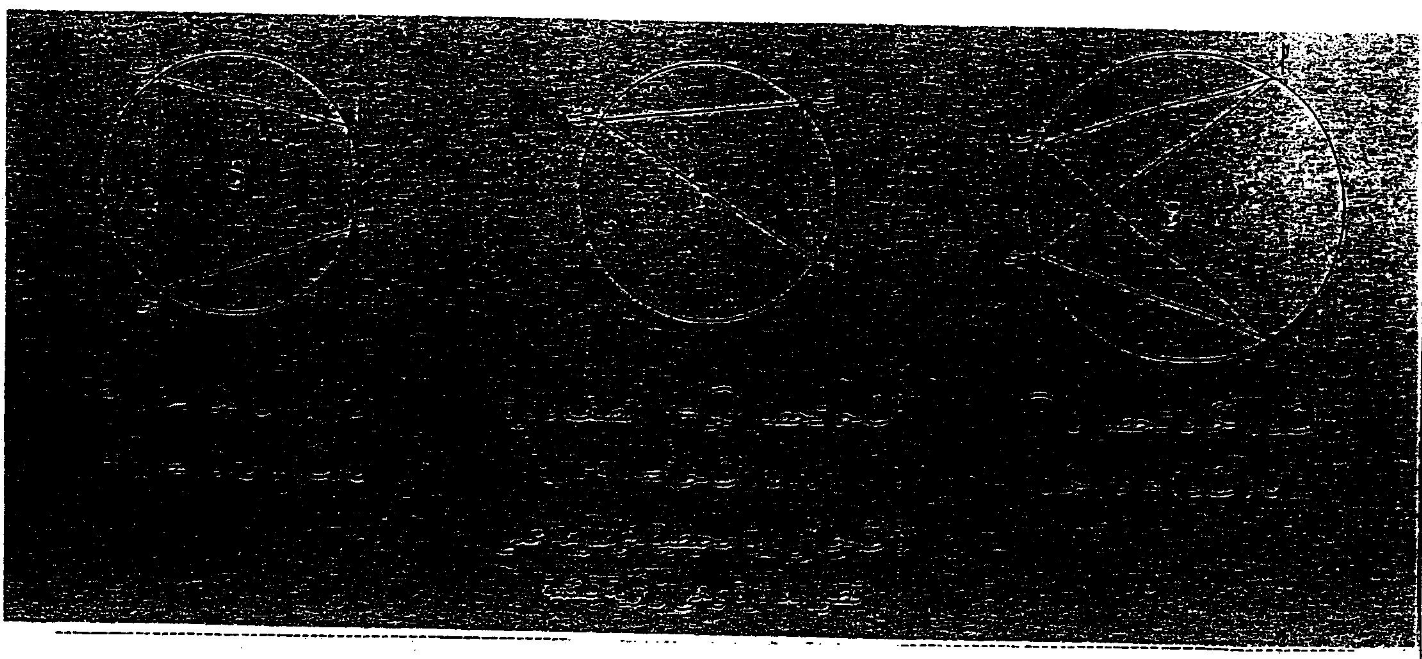
= $\frac{1}{2}$ قياس الدائرة

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠ = ١٨٠°

نتائج

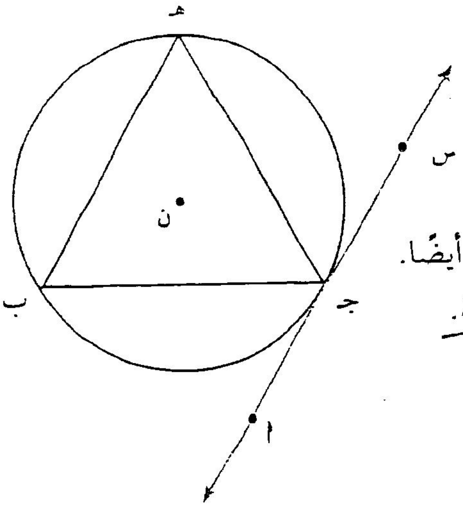


١. كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
٢. كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
٣. كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
٤. في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.



تدريب (٣): صح

لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن



$\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماس للدائرة عند النقطة جـ

$\overline{جـ ب}$ وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.

يسمى $\overline{جـ ب}$ وتر التماس

الزاوية (أ جـ ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س جـ ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.

الزاوية (جـ هـ ب) تشترك مع الزاوية المماسية في القوس نفسه باستخدام المنقلة.

أكمل:

ق (أ جـ ب) = ٦٠°

ق (جـ هـ ب) = ٦٠°

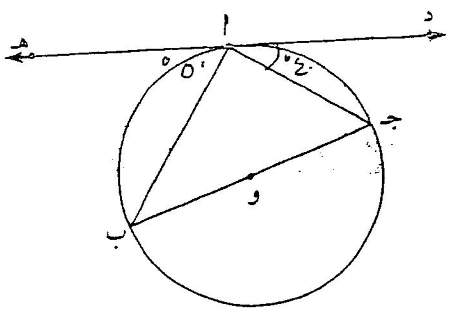
ماذا تستنتج؟ ق (أ جـ ب) = ق (جـ هـ ب) = ٦٠°

نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

حاول أن تحل صح



٨ في الشكل المقابل، لدينا:

ق(د أ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن $\overline{جـ ب}$ قطر للدائرة.

البرهان ∵ (د أ هـ) زاوية مستقيمة

∴ ق(جـ أ ب) = ١٨٠ − (٤٠ + ٥٠) = ٩٠°

ق(أ جـ ب) = ق(هـ أ ب) = ٥٠°

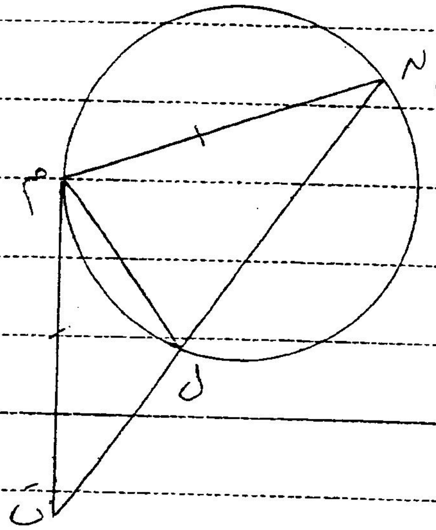
، ق(أ ب جـ) = ق(د أ جـ) = ٤٠°

∵ (جـ أ ب) = ٩٠°

∴ $\overline{جـ ب}$ قطر للدائرة

حاول أن تحل ص ٤٢

٩ $\overleftrightarrow{\text{م ت}}$ مماس لدائرة مركزها و. $\overline{\text{م ن}}$ وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت. (م نقطة التماس) $\overline{\text{ت ن}}$ تقطع الدائرة في ل
أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)



البرهان:

ق($\hat{\text{ت م ل}}$) المماسية = ق($\hat{\text{م ن ل}}$) المحيطية (١)

∵ م ن = م ت

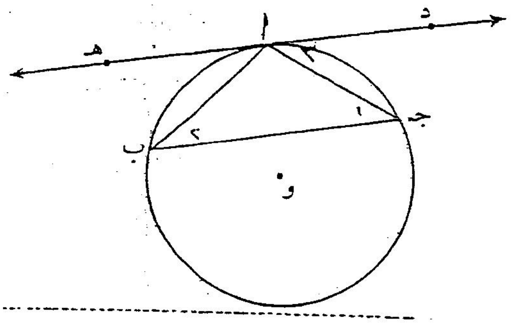
∴ ق($\hat{\text{م ن ل}}$) = ق($\hat{\text{م ت ل}}$) ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن

ق($\hat{\text{ت م ل}}$) = ق($\hat{\text{م ت ل}}$)

∴ Δ ت ل م متطابق الضلعين

حاول أن تحل ص ٤٣



١٠ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.
المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ).
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ موازٍ لـ $\overline{\text{ب جـ}}$.

في Δ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

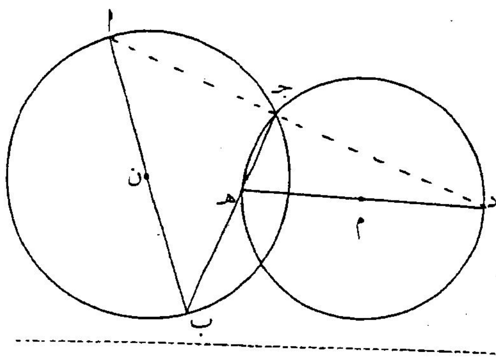
∴ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) ← (١)

ق($\hat{٣}$) المماسية = ق($\hat{٢}$) المحيطية ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٣}$) وهما في وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

حاول أن تحل ص ٤٤



١١ في الشكل المقابل، أثبت أن النقاط أ، جـ، د تقع على مستقيم واحد.

∵ $\overline{\text{د هـ}}$ قطر ∴ ق($\hat{\text{د جـ هـ}}$) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ∴ ق($\hat{\text{أ جـ ب}}$) = ٩٠°

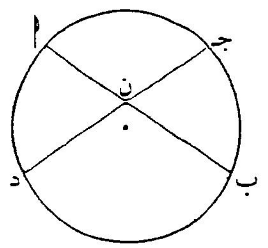
ق($\hat{\text{د جـ هـ}}$) = ق($\hat{\text{د جـ هـ}}$) + ق($\hat{\text{أ جـ ب}}$) = ١٨٠°

∴ أ، جـ، د تقع على مستقيم واحد

الأوتار المتقاطعة والمماس (٦ - ٤)

١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

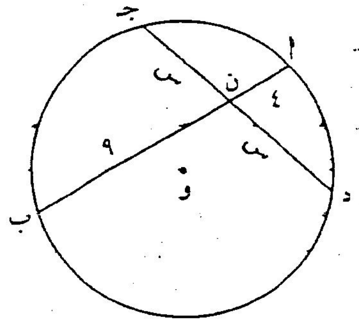
نظرية (١)



إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

حاول أن تحل ص ٤٦



١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل

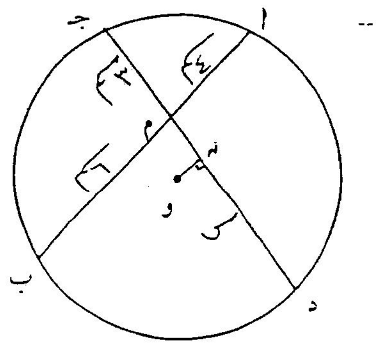
ن أ × ن ب = ن جـ × ن د نظرية

س × س = ٤ × ٩

س^2 = ٣٦

س = ± ٦ ، السالب مرفوض ∴ س = ٦

حاول أن تحل ص ٤٧



٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و: م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم، م جـ = ٣ سم، م د = س.

أ أوجد قيمة س.

ب أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{\text{د جـ}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٨ سم.

الحل

م د × م جـ = م أ × م ب

س × ٣ = ٤ × ٦

س = $\frac{٤ \times ٦}{٣}$ = ٨ سم ∴ د جـ = ٨ + ٣ = ١١ سم

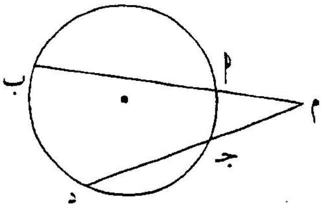
$\overline{\text{و هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{د جـ}}$ ∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ د جـ = ٥,٥ سم

(و هـ)^2 = (٨)^2 − (٥,٥)^2 = ٣٣,٧٥

∴ و هـ = ٥,٨ سم

٢ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة

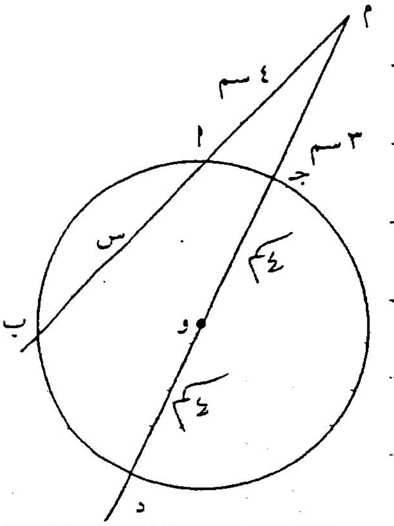
نظرية (١)



إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.

حاول أن تحل صـ ٤٨



③ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم. أوجد قيمة س.

م أ × م ب = م جـ × م د

٤ × (س + ٤) = ٣ × ١١

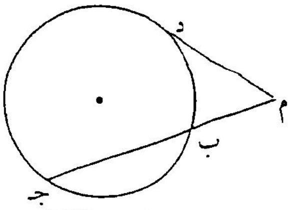
$\frac{٣٣}{٤}$ = س + ٤

س = ٨,٢٥ − ٤

س = ٤,٢٥

٣ – تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

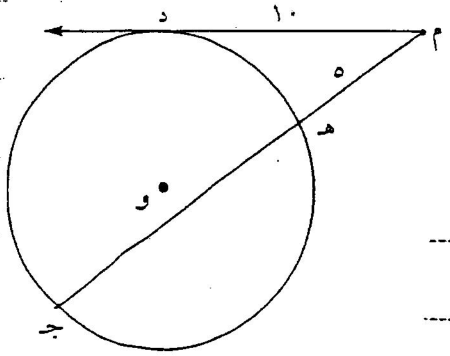
نظرية (٢)



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ.

حاول أن تحل صـ ٥٠



④ في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠
م هـ = ٥. أوجد طول هـ جـ.

(م د)^{٢} = م هـ × م جـ

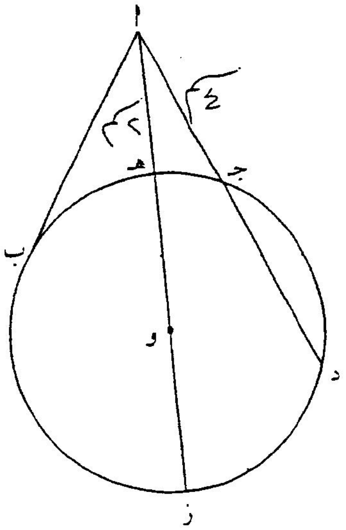
(١٠)^{٢} = ٥ × (٥ + هـ جـ)

$\frac{١٠٠}{٥}$ = $\frac{٥}{٥}$ × (٥ + هـ جـ)

∴ ٥ + هـ جـ = ٢٠ هـ جـ = ١٥

مثال (٥)

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة أ إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة أ فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث أ جـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث أ د = ٩ سم. ما طول القطعة المماسية $\overline{\text{أب}}$؟



الحل: جبريًا

المعطيات: أ جـ = ٤ سم، أ د = ٩سم، أب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{أب}}$.

البرهان:

(أ ب)^{٢} = أ جـ × أ د	نتيجة
(أ ب)^{٢} = ٤ × ٩	بالتعويض
(أ ب)^{٢} = ٣٦	بالتبسيط
أ ب = ٦	بإيجاد الجذر التربيعي

فيكون طول $\overline{\text{أب}}$ يساوي ٦سم

حاول أن تحل ص ٥٠

٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢سم.

(م ب)^{٢} = م هـ × م ز

٦^{٢} = ٢ × م ز

٣٦ = ٢ × م ز

م ز = $\frac{٣٦}{٢}$ = ١٨

٢ + ٢ نق = ١٨

٢ نق = ١٦

نق = ٨