الوحدة السابعة

المصفوفات

الوحدة السابعة — المصفوفات

(٧-١) تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر **Elements**.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًا، نكتب ا ونقرأ **المصفوفة ا**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix} = \underline{ا}$$

المصفوفة ا هي من الرتبة ٢ × ٣.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

حاول أن تحل ص ٥٥

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠{,}٥ & ٢- \end{bmatrix} = \underline{ا} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠{,}٦ \end{bmatrix} = \underline{ج}$$

الحل: المصفوفة ا من الرتبة ٢ × ٣

المصفوفة ب من الرتبة ١ × ٣

المصفوفة ج من الرتبة ٣ × ٢

حاول أن تحل ص ٥٦

٢ (أ) وضّح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي أضيفت إليها دول أخرى.

(ب) أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣. ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.

(ج) وضّح الفرق بين المصفوفة التي رتبتها جـ × د والمصفوفة التي رتبتها د × جـ.

(أ) كل دولة جديدة يكون لها صف جديد فمثلا اذا اضيف دولة واحدة تكون المصفوفة من الرتبة ٤ × ٢

$$\begin{array}{ccc} \text{البحرين} & \text{الإمارات} & \text{الكويت} \\ \end{array}$$

ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٧ & ٤٥ \\ ١ & ٦٥ & ٤ \end{bmatrix}$ الإنتاج / الاستهلاك

جـ) المصفوفة التي رتبتها ج × د يكون عدد صفوفها ج وعدد أعمدتها د

أما التي رتبتها د × ج فيكون عدد صفوفها د وعدد أعمدتها ج

حاول أن تحل

٣ اكتب المصفوفة جـ لتمثل النقاط الممنوحة لبعض لاعبي الجمباز.

الرياضة / اللاعب	تمارين أرضية	حصان المقابض	الحلقات الثابتة	العارضتان المتوازيتان
الأول	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
الثاني	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
الثالث	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

الحل

$$\begin{bmatrix} ٩٫٨٣٧ & ٩٫٥٨٧ & ٩٫٧٠٠ & ٩٫٧٢٥ \\ ٩٫٧٧٥ & ٩٫٧١٢ & ٩٫٥٣٧ & ٩٫٦٥٠ \\ ٩٫٧١٢ & ٩٫٦٥٠ & ٩٫٦٥٠ & ٩٫٥١٢ \end{bmatrix} = \underline{ج}$$

ترميز عناصر المصفوفة

ويحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$\begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

حاول أن تحل ص٥٧

٤ في المثال (٤)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب. $ب_{٣٢} = ٢$

حيث أن العنصر $ب_{٣٢}$ يقع في الصف ٣ والعمود ٢

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة

- المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد.
- المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد
- فكر وناقش: هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

المصفوفة من الرتبة ١ × ١ تكون عمودية وأفقية معاً

حاول أن تحل ص ٦١

٥ صنّف المصفوفات في المثال (١).

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix} \qquad جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

أ مصفوفة مربعة

ب مصفوفة أفقية

جـ مصفوفة عمودية

المصفوفات المتساوية: ص ٥٨

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

حاول أن تحل ص ٥٩

ملحوظة هامة: يلزم توافر الشرطان معاً

٥ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$$س = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad ص = \begin{bmatrix} ٩ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل: المصفوفتان س، ص غير متساويتان

لأن عناصرهما المتناظرة غير متساوية

حاول أن تحل ص ٥٩

٧ (أ) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

(ب) إذا كانت [٣س   س + ص   س − ص] = [−٩   ٤   −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل (أ) المصفوفتان متساويتان

س + ٨ = ٣٨ | ٤ص − ١٠ = −ص

س = ٣٨ − ٨ | ٤ص + ص = ١٠

س = ٣٠ | ٥ص = ١٠

ص = ٢

(ب) ٣س = −٩ | س + ص = ٤

س = −٣ | −٣ + ص = ٤

ص = ٤ + ٣

ص = ٧

(٧ - ٢) جمع المصفوفات وطرحها ص ٦٠

لجمع مصفوفتين أ ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها
ونجمع كل عنصرين متناظرين معاً

حاول أن تحل ص ٦١

١ أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ٥ & -٣ \\ ١٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٤ & -٥ \\ -٧ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٤ - ١ & -١٢ - ٣ \\ ٥ + ٤ & -٣ - ٥ \\ ١٠ - ٧ & -١ + ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٣ & -١٥ \\ ٩ & -٨ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل ص ٦٣

٢ (أ) وضّح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.

(ب) استخدم جمع المصفوفات لإثبات أنّ العبارة التالية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١١ & ١٠ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١١ & ١٠ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$$

الحل (أ) لأنه عند تساوي الرتبة يكون لكل عنصر في المصفوفة نظير في المصفوفة الأخرى ويمكن جمعهما معاً

(ب) الطرف الأيمن $= \begin{bmatrix} -٧ - ٣ & ٣ + ٢ \\ ٢ + ١١ & ٦ + ١٠ \\ ٠ + ٦ & -٤ + ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ٥ \\ ١٣ & ١٦ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} \rightarrow$ (١)

الطرف الأيسر $= \begin{bmatrix} -٣ - ٧ & ٢ + ٣ \\ ١١ + ٢ & ١٠ + ٦ \\ ٦ + ٠ & ٥ - ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ٥ \\ ١٣ & ١٦ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} \rightarrow$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ العبارة صحيحة

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع
- $0_{م \times ن}$ + أ = أ + $0_{م \times ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (-أ) = $0_{م \times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

حاول أن تحل ص ٦٧

٣ في المثال (٣)، أوجد جـ + ب ، (جـ + ب) + أ.

جـ + ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & ٣- \end{bmatrix}$

(جـ + ب) + أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ - ب = أ + (-ب).

حاول أن تحل ص ٦٨

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

(أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ٩- & ٦ \\ ٨ & ١ & ٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٤- \\ ١٠ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ - ٧ & ٣ - ٩ - & ٤ + ٦ \\ ١٠ - ٨ & ٥ - ١ & ٦ - ٢ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٢- & ١٠ \\ ٢- & ٤- & ٨- \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ - ٥ & ٣ + ٣- \\ ٤ + ١٠ & ٢ - ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١٤ & ٣- \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية

حاول أن تحل ص ٦٥

٥ أوجد س حيث:

س - $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & ٤- \end{bmatrix}$

بإضافة $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ لطرفي المعادلة

س - $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & ٤- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} ٧ & ٩ \\ ٩ & ٢- \end{bmatrix}$

(٧ - ٣) ضرب المصفوفات صـ ٦٦

ضرب مصفوفة في عدد

مثال (١)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥أ ، ٣ب . ثم ٥أ - ٣ب

الحل:

$$\text{٥أ} = \begin{bmatrix} (٤-)\times ٥ & ٣\times ٥ & ٢\times ٥ \\ ٣\times ٥ & ٤\times ٥ & ٥\times ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$$

$$\text{٣ب} = \begin{bmatrix} ٢\times ٣ & ١\times ٣ & ٠\times ٣ \\ ٣\times ٣ & (١-)\times ٣ & (٢-)\times ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٣- & ٦- \end{bmatrix}$$

$$\text{٥أ} - \text{٣ب} = \begin{bmatrix} ٢٠- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٣- & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٦- & ١٢ & ١٠ \\ ٦ & ٢٣ & ٣١ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل صـ ٦٧

١ من المثال (١)، أوجد:

(أ) ٥ب - ٤أ (ب) أ + ٦ب

(أ) $\text{٥ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ & ٠ \\ ١٥ & ٥- & ١٠- \end{bmatrix}$ ، $\text{٤أ} = \begin{bmatrix} ١٦- & ١٢ & ٨ \\ ١٢ & ١٦ & ٢٠ \end{bmatrix}$

$$\text{٥ب} - \text{٤أ} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ & ٠ \\ ١٥ & ٥- & ١٠- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٦- & ١٢ & ٨ \\ ١٢ & ١٦ & ٢٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٦ & ٧- & ٨- \\ ٣ & ٢١- & ٣٠- \end{bmatrix}$$

(ب) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{٦ب} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٠ \\ ١٨ & ٦- & ١٢- \end{bmatrix}$

$$\text{أ} + \text{٦ب} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٠ \\ ١٨ & ٦- & ١٢- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ٩ & ٢ \\ ٢١ & ٢- & ٧- \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل ص ٦٨

٢ بعد رفع الأسعار تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

الحل: التخفيض بنسبة ٢٠٪

∴ السعر الجديد = ٠٫٨ × السعر القديم

$$\begin{bmatrix} ٠٫٣٦٠ & ٠٫٦٠٠ \\ ٠٫٧٢٠ & ١٫٠٨٠ \\ ٠٫٦٠٠ & ٠٫٩٦٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠٫٤٥٠ & ٠٫٧٥٠ \\ ٠٫٩٠٠ & ١٫٣٥٠ \\ ٠٫٧٥٠ & ١٫٢٠٠ \end{bmatrix} \times ٠٫٨$$

عصير الليمون ٠٫٦٠٠ دينار ، ٠٫٣٦٠ دينار

عصير البرتقال ١٫٠٨٠ دينار ، ٠٫٧٢٠ دينار

عصير المانجو ٠٫٩٦٠ دينار ، ٠٫٦٠٠ دينار

حاول أن تحل ص ٦٩

٣ حل كل معادلة مما يلي:

(أ) $$\begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = ٢\underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = ٢\underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} = \underline{س}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & -١٨ & -١٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٧ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} + \underline{س}٣-$$

$$\begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٧ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & -١٨ & -١٩ \end{bmatrix} = \underline{س}٣-$$

$$\begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١٥ & -٢١ \end{bmatrix} = \underline{س}٣-$$

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٠ & -١ \\ -٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١٥ & -٢١ \end{bmatrix} \times \frac{-١}{٣} = \underline{س}$$

ضرب المصفوفات صـ ٦٩

حاول أن تحل

*

٥ بفرض: أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

أ) حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ×ب، ب×أ معرّفة أو غير معرّفة.

ب) أوجد ناتج الضرب المعرّف.

ج) بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل أ×ب، ب×أ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

الحل (أ)

أ × ب ‏(٢×٢) (٢×٤) ‏متساويتان

ب × أ ‏(٢×٤) (٢×٢) ‏غير متساويتين

أ × ب معرفة ورتبتها ٢ × ٤ ‏ ب × أ غير معرفة

(ب) أ × ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ١٦- = ٠ & ٢- ٤- & ١٠+ ٠ & ٤ - ٣٢ \\ ٣٢- = ٠ & ٤- ٥- & ٢٠+ ٠ & ٨- ٤ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ١٦- & ٦- & ١٠ & ٢٨ \\ ٣٢- & ٩ & ٢٠ & ٣٢ \end{bmatrix}$

(ج) أ × ب رتبتها ٢ × ٢

ب × أ رتبتها ٣ × ٣

أ × ب ، ب × أ غير متساويتان

ص ٧٣

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{أ} \times \underline{أ}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{٢}$.
وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{أ}$. وبالمثل $\underline{أ}^{٣} = \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ}$، $\underline{أ}^{٤} = \underline{أ}^{٣} \times \underline{أ}$، ....

مثال (٧)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{أ}^{٢}$، $\underline{أ}^{٣}$

الحل:

$$\underline{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٣} = \underline{أ}^{٢} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل ص ٧٢

٧ إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^{٢}$، $\underline{ب}^{٣}$.

الحل

$$\underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ - ١ & ٢ + ٤ \\ -٢ - ٤ & -١ + ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}^{٣} = \underline{ب}^{٢} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ - ٦ & ٣ + ٢٤ \\ -١٢ - ١٥ & -٦ + ٦٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٢٧ \\ -٢٧ & ٥٤ \end{bmatrix}$$

(٧ - ٤) مصفوفات الوحدة والنظير الضربي ص ٧٤

مصفوفة الوحدة Identity Matrix ص ٧٥

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة للضرب**. ويرمز إليها بـ و

$$\text{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ،\ \text{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

بفرض أن $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، $\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\text{أ} \times \text{و} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}\times١ + \text{ب}\times٠ & \text{أ}\times٠ + \text{ب}\times١ \\ \text{جـ}\times١ + \text{د}\times٠ & \text{جـ}\times٠ + \text{د}\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

كذلك $\text{و} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ}$

أي أن: $\text{أ} \times \text{و} = \text{و} \times \text{أ} = \text{أ}$

$\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\text{و}_{\text{ن}\times\text{ن}}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي Multiplicative Inverse ص ٧٥

إذ كانت أ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\text{أ} \times \text{س} = \text{و}$ ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ.

ويرمز إليها بـ $\text{أ}^{-١}$.

إذًا $\text{أ} \times \text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١} \times \text{أ} = \text{و}$

حاول أن تحل ص ٧٥

١ (أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

(ب) في المثال (١)، أثبت أن أ هي النظير الضربي لـ ب.

(أ) $\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤+٥ & ٤-٤ \\ -٥+٥ & ٥-٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ أ × ب = و ∴ ب هي النظير الضربي للمصفوفة أ

أو ∴ أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب

(ب) في المثال (١)

$\text{ب} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

ص ٧٦

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى محدد أ ويرمز إلى هذا العدد بالرمز |أ| ويقرأ محدد المصفوفة أ

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ

حاول أن تحل ص ٧٦

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & \text{ك} \\ -٣ & \text{ك}-٣ \end{bmatrix}$

الحل

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (٤ \times ٢) - (٤ \times ٢) = ٠$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{vmatrix} = (٨ \times ١٠) - (٢ \times ٧) = ٦٦$

$|\text{جـ}| = \begin{vmatrix} ٣ & \text{ك} \\ -٣ & \text{ك}-٣ \end{vmatrix} = (\text{ك} \times -٣) - (\text{ك}-٣) \times ٣$

$= -٣\text{ك} - (-٩ - ٣\text{ك})$

$= -٣\text{ك} - ٩ + ٣\text{ك}$

$= -٩$

خاصية

بفرض أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن أ لها نظير ضربي $\text{أ}^{-١}$ حيث:

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ د} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} -\text{ب} & \text{د} \\ \text{أ} & -\text{جـ} \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:
المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة منفردة

حاول أن تحل ص ٧٧

٣ أ) هل $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

ب) هل $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

الحل

(أ) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$ ∴ ب لها نظير ضربي

(ب) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = -٢٤ + ٢٤ = ٠$ ∴ ب ليس لها نظير ضربي

حاول أن تحل ص ٧٨

٤ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

الحل (أ) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $|\underline{أ}| = ٦ - ٤ = ٢ \neq ٠$

∴ أ لها نظير ضربي هو $\underline{أ}^{-١}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٠,٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$ ، $|\underline{ب}| = ٠,٥ \times ٧,٢ - ٠,٣ \times ٢,٣$

$= ٢,٩١ \neq ٠$

∴ ب لها نظير ضربي هو $\underline{ب}^{-١}$

$\underline{ب}^{-١} = \frac{١}{٢,٩١} \begin{bmatrix} ٧,٢ & ٢,٣ \\ -٠,٣ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل ص ٧٨

٥ أ إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

ب هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١,٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

الحل (أ) ∵ ب مصفوفة منفردة

∴ ١٠س + ٤٠ = ٠

١٠س = -٤٠

س = -٤

(ب) $|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ١,٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٦ - ٦ = ٠$

∴ ب ليس لها نظير ضربي

(٥ - ٧) حل نظام من معادلتين خطيتين ص ٧٩

أولاً: باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة طريقة

حاول أن تحل ص ٨٠

① حلّ النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$أ \times ع = ب \Leftarrow ع = أ^{-١} \times ب$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ - ٩ = ١ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = -١ ، ص = ٤

حاول أن تحل

② قطعة أرض مستطيلة طولها يساوي ضعف عرضها ومحيطها يساوي ٨٤٠ مترًا. ما أبعادها باستخدام المصفوفات؟

الحل: نفرض أن الطول = س ، العرض = ص

س = ٢ص $\quad\quad$ س - ٢ص = ٠

٢ × (س + ص) = ٨٤٠ $\quad\quad$ س + ص = ٤٢٠

$$\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤٢٠ \end{bmatrix}$$

$\underline{أ} \times \underline{ع} = \underline{ب}$

$\underline{ع} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{ب}$

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ + ٢ = ٣$

$\underline{أ}^{-1} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{ع} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤٢٠ \end{bmatrix}$

$\underline{ع} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ٨٤٠ \\ ٤٢٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٨٠ \\ ١٤٠ \end{bmatrix}$

∴ الطول = ٢٨٠ ، العرض = ١٤٠

ثانيًا باستخدام قاعدة كرامر (المحددات) ص ٨٠

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٧ص = ١ \\ ٣س - ٤ص = ١٦ \end{array}\right.$ باستخدام المحددات (قاعدة كرامر)

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٨ - ٢١ = -٢٩$ ∴ $س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-١١٦}{-٢٩} = ٤$

$\Delta_س = \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ ١٦ & -٤ \end{vmatrix} = -٤ - ١١٢ = -١١٦$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{٢٩}{-٢٩} = -١$

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١٦ \end{vmatrix} = ٣٢ - ٣ = ٢٩$

∴ م ح = $\{(٤ ، -١)\}$

حاول أن تحل ص ٨١

استخدم قاعدة كرامر لحل النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

الحل

$٣س + ٢ص = -٦$

$-٤س - ٣ص = ٧$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ + ٨ = -١$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٧ & -٣ \end{vmatrix} = ١٨ - ١٤ = ٤$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١ - ٢٤ = -٣$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٤}{-١} = -٤$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٣}{-١} = ٣$$

م ح = $\{(-٤ ، ٣)\}$