وزارة التربية
الإدارة العامة لمنطقة حولي التعليمية
مدرسة مارية القبطية الثانوية بنات

قسم الرياضيات

كويت جديدة . . مارية جديدة
NEW KUWAIT .. NEW MARIA

الخرائط الذهنية
لمادة الرياضيات
لمواضيع كتاب الطالب
للصف العاشر
الفصل الدراسي الثاني

إعداد المعلمة : أ. منى المحاسنة

رئيسة القسم : أ. خلود بن حيدر

الموجهة الفنية : أ. سميرة المتروك

مديرة المدرسة: أ. منال المطيري

هندسة الدائرة

مماس الدائرة

- نقطة المماس
- قطعة المماس

الأوتار والأقواس

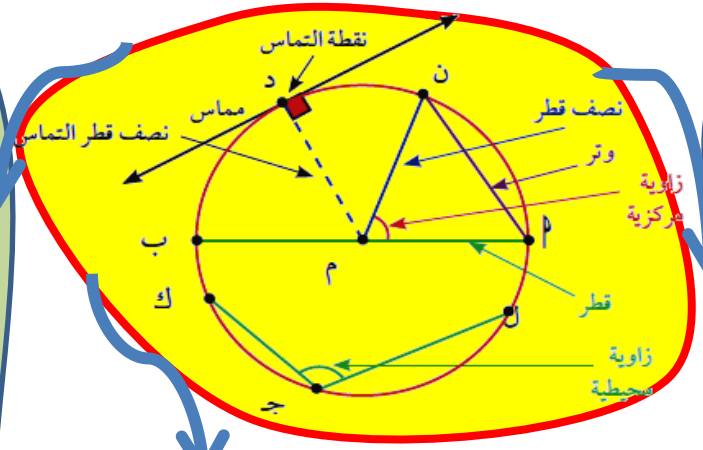
- الوتر
- القوس

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

- الزاوية المركزية
- الزاوية المحيطية
- الشكل الرباعي الدائري

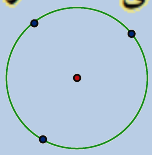
الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

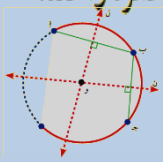
- العلاقة بين الأوتار المتقاطعة



نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



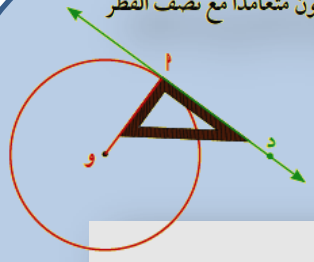


نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

أي أن $\overleftrightarrow{\text{أ}}$ و $\perp$ $\overline{\text{دأ}}$.



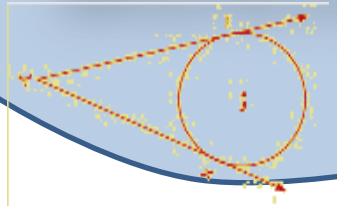
نظرية (٣)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًّا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$



نظرية (١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

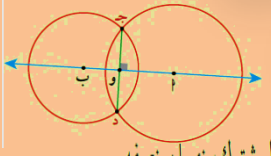
نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه



خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

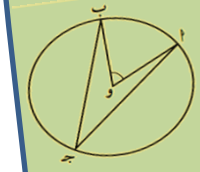
تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.



نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

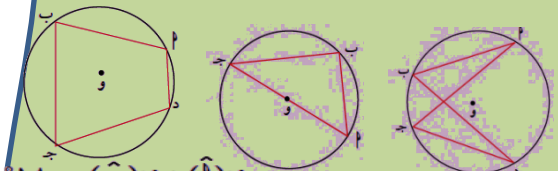
نتائج

١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًّا دائريًّا.



ق(أ) + ق(جـ) = ١٨٠°

ق(ب) + ق(د) = ١٨٠°

نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

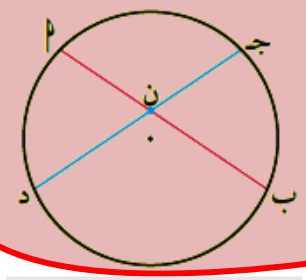
الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

تقاطع الأوتار داخل الدائرة

نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

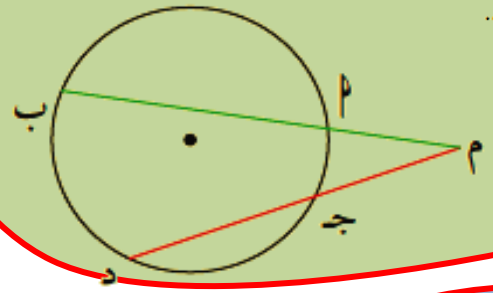


تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة (١)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.

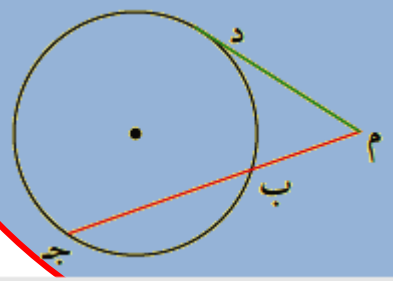


تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

نتيجة (٢)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

$(م د)^{٢}$ = م ب × م جـ .



المصفوفات

تنظيم البيانات في مصفوفات
- رتبة المصفوفة
- مصفوفات متساوية
- المصفوفات المربعة

جمع وطرح المصفوفات
- نظير جمعي
- عناصر متناظرة
- شروط جمع المصفوفات وطرح

ضرب المصفوفات
- الضرب القياسي
- مربع المصفوفة

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي
- محدد المصفوفة المربعة
- حل المعادلات المصفوفية
- النظير الضربي

حل نظام معادلتين خطيتين
- قاعدة كرامر
- العنصر المحايد الضربي
- محدد المصفوفة

المصفوفات

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

ترميز عناصر المصفوفة

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $\text{أ}_{٣١}$

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

جمع وطرح المصفوفات

أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة م × ن

∴ جـ من الرتبة م × ن.

$\text{جـ}_{\text{ون}} = \text{أ}_{\text{ون}} + \text{ب}_{\text{ون}}$.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- $\text{ص}_{\text{م×ن}}$ + أ = أ + $\text{ص}_{\text{م×ن}}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = $\text{ص}_{\text{م×ن}}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ − ب = أ + (−ب).

حل المعادلات المصفوفية: Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات أ، ب، جـ لها الرتبة نفسها إذا كان: أ = ب، فإن: أ + جـ = ب + جـ، أ − جـ = ب − جـ.

ضرب المصفوفات

مصفوفة أ: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ٣×٢ — ٣ صفوف، عمودان

مصفوفة ب: $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ٩ & ١٠ \\ ١١ & ١٢ & ١٣ & ١٤ \end{bmatrix}$ ٢×٤ — صفان، ٤ أعمدة

$\text{أ}_{\text{م×ن}} \times \text{ب}_{\text{ن×ر}} = \text{جـ}_{\text{م×ر}}$

متساويان

أبعاد مصفوفة الضرب ٣ × ٤

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- أ × ب: مصفوفة من الرتبة م × م.
- (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) — خاصية التجميع للضرب
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ — خاصية التوزيع
- (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- $\text{ص}_{\text{م×م}}$ × أ = أ × $\text{ص}_{\text{م×م}}$ = $\text{ص}_{\text{م×م}}$ — خاصية الضرب في الصفر

ضرب مصفوفة في عدد

$$٣\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١٢ & -٩ \end{bmatrix}$$

خواص الضرب القياسي

إذا كان أ ، ب ، ٠ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك أ : مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) أ = ك(د أ) — خاصية التجميع للضرب
- ك(أ + ب) = ك أ + ك ب — خاصية التوزيع من اليمين
- (أ + ب)ك = أ ك + ب ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × أ = ٠ — خاصية الضرب في صفر

في ضرب المصفوفات

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{ب جـ}$

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر

بالمصفوفة المنفردة

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت أ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة أ × أ يرمز إليها بالرمز $\text{أ}^{٢}$.

وتقرأ مربع المصفوفة أ. وبالمثل $\text{أ}^{٣} = \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ}$، $\text{أ}^{٤} = \text{أ}^{٣} \times \text{أ}$ ،....

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد: $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{أ}^{٣}$

الحل:

$$\text{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^{٣} = \text{أ}^{٢} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

مصفوفات الوحدة

$$\text{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

أ × و = و × أ = أ

النظير الضربي (المعكوسات)

خاصية

بفرض أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ،

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ د} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

حل نظام من معادلتين خطيتين

الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة:

حلّ النظام: $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٣ \\ \text{س} - \text{ص} = ٧ \end{cases}$

الحل:

اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad (١)$$

حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - (١-) \times ١ = ٢- \neq ٠$$

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{٢-} \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢}- & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{\text{أ}}^{-١}$

نحصل على $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢}- & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢- \end{bmatrix}$$

وبالتالي: س = ٥، ص = −٢

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أ س + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{جـ} & \text{م} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq ٠$)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} + ٧ = ٠ \\ ٣\text{ص} - ٦\text{س} + ٣ = ٠ \end{cases}$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية: $\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} = -٧ \\ -٦\text{س} + ٣\text{ص} = -٣ \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٥- \\ ٦- & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٧- & ٥- \\ ٣- & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & ٧- \\ ٦- & ٣- \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٣٦-}{١٨-} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٥٤-}{١٨-} = ٣$$

حساب المثلثات (٢)

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

- دوال مثلثية
- زاوية الإسناد
- إشارات الدوال المثلثية
- إشارات مقلوب دالة مثلثية

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

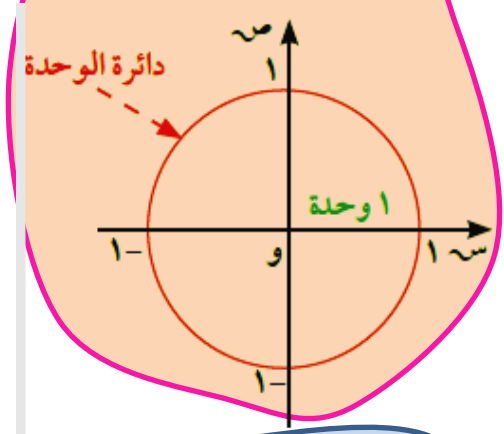
- حل معادلات مثلثية
- تبسيط تعبيرات جبرية

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

- متطابقات
- تبسيط عبارات

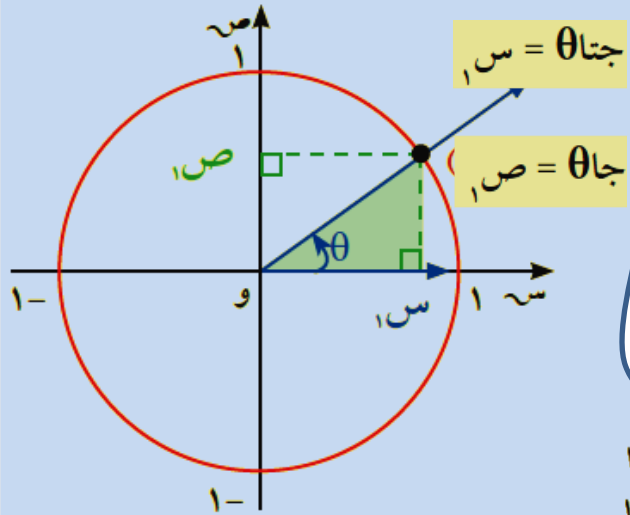
دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

دائرة الوحدة



النقطة المثلثية

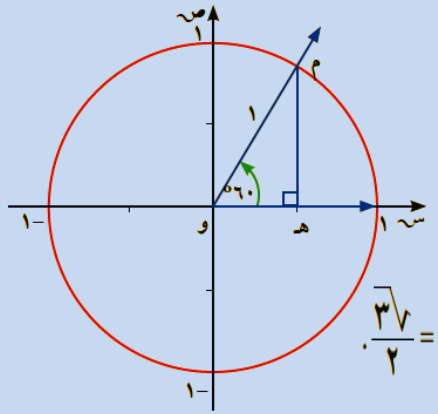
النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ



جتاθ = س١ ، جاθ = ص١

ظاθ = $\frac{ص_١}{س_١}$ ، س١ ≠ ٠ ، ظتاθ = $\frac{س_١}{ص_١}$ ، ص١ ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{س_١}$ ، س١ ≠ ٠ ، قتاθ = $\frac{١}{ص_١}$ ، ص١ ≠ ٠



جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

الدوال الدائرية (المثلثية)

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ — حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ — حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ — حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ — حيث قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ — حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠

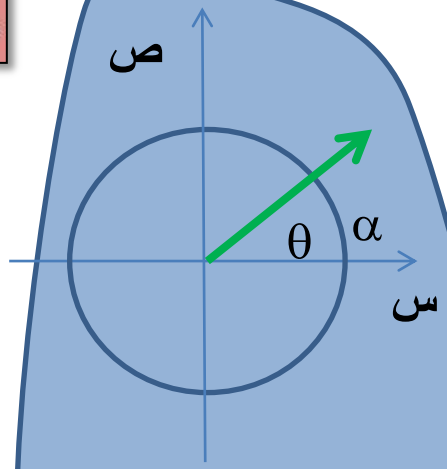
(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ — حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

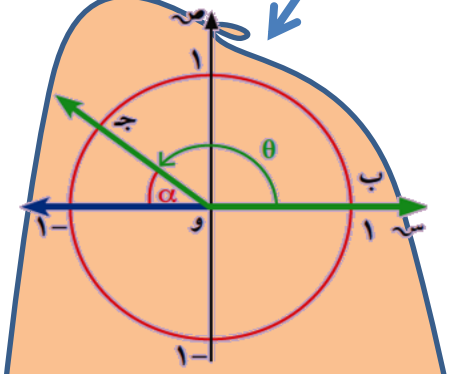
الدالة \ قياس الزاوية θ	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	١-	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	١-	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

زاوية الإسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وب، وجـ) التي في وضع قياسي
هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: ٠° < α < ٩٠°



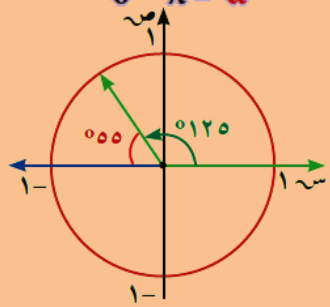
في الربع الأول α = θ



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\theta^\circ - 180^\circ = \alpha^\circ$

$\theta^د - \pi = \alpha^د$

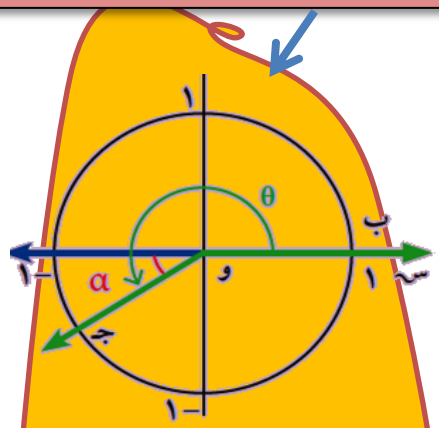


θ = ١٢٥° تقع في الربع الثاني

باس زاوية الإسناد $\alpha^\circ = 180^\circ - \theta^\circ$

$= 180^\circ - 125^\circ$

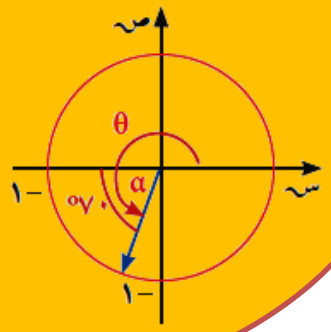
$= 55^\circ$

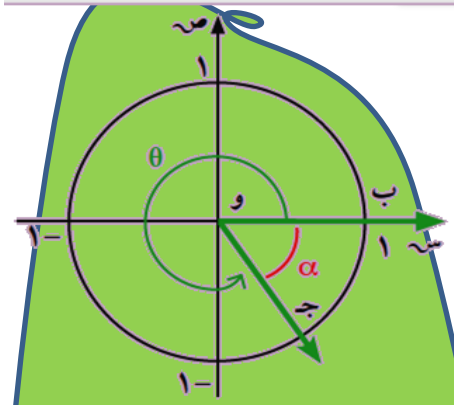


عندما θ تقع في الربع الثالث

$180^\circ - \theta^\circ = \alpha^\circ$

$\pi - \theta^د = \alpha^د$

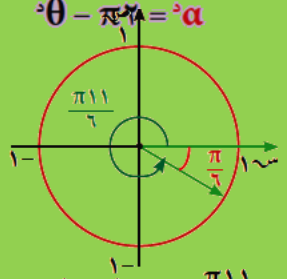




عندما θ تقع في الربع الرابع

$360^\circ - \theta^\circ = \alpha^\circ$

$2\pi - \theta^د = \alpha^د$



$\theta = \frac{11\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع

قياس زاوية الإسناد $\alpha = 2\pi - \theta$

$= 2\pi - \frac{11\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{6}$

قوانين الاسناد

$-١ \le \text{جتا}\theta \le ١$

$-١ \le \text{جا}\theta \le ١$

$\text{ظا}\theta \in \text{ح}$

التخلص من القياس السالب

قانون:

$\text{جتا}(-\theta) = \text{جتا}\theta$

$\text{جا}(-\theta) = -\text{جا}\theta$

وبالتالي $\text{ظا}(-\theta) = -\text{ظا}\theta$ بشرط أن يكون $\text{ظا}\theta$ معرّف.

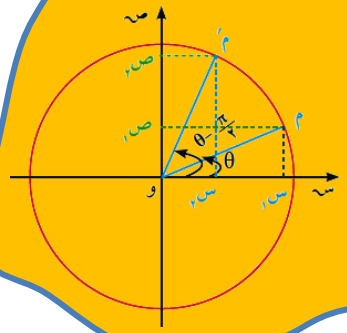
العلاقة بين النسب للزوايا المتتامة

قانون:

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جتا}\theta$

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جا}\theta$

$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{ظتا}\theta$

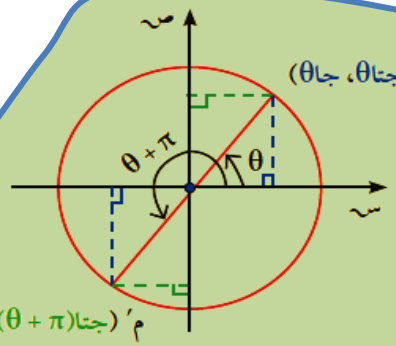


قانون:

$\text{جتا}(\pi + \theta) = -\text{جتا}\theta$

$\text{جا}(\pi + \theta) = -\text{جا}\theta$

وبالتالي $\text{ظا}(\pi + \theta) = \text{ظا}\theta$ شرط أن يكون $\text{ظا}\theta$ معرّفًا.



قانون:

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \text{جتا}\theta$

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -\text{جا}\theta$

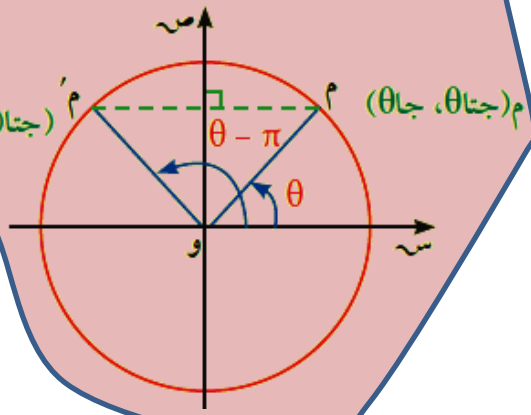
$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -\text{ظتا}\theta$

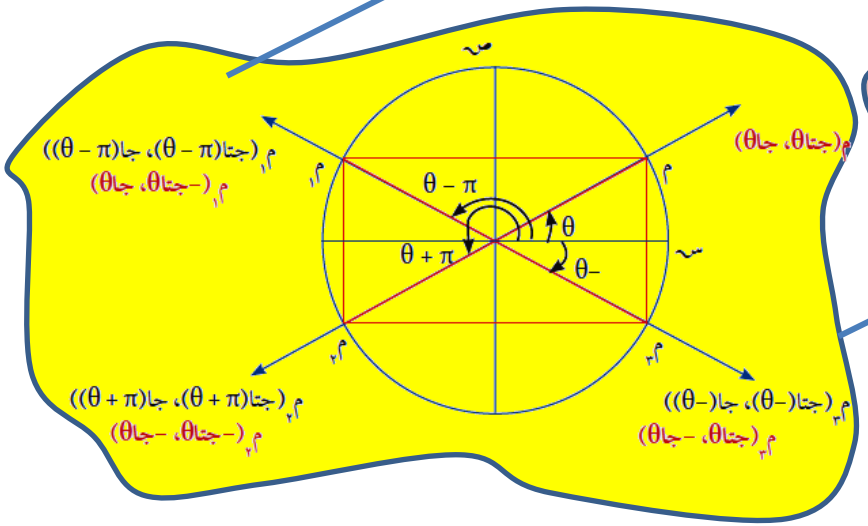
قانون:

$\text{جتا}(\pi - \theta) = -\text{جتا}\theta$

$\text{جا}(\pi - \theta) = \text{جا}\theta$

وبالتالي $\text{ظا}(\pi - \theta) = -\text{ظا}\theta$ شرط أن يكون $\text{ظا}\theta$ معرّفًا.





الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص ∀ θ ∈ ح

٢ جتاθ = س ∀ θ ∈ ح

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

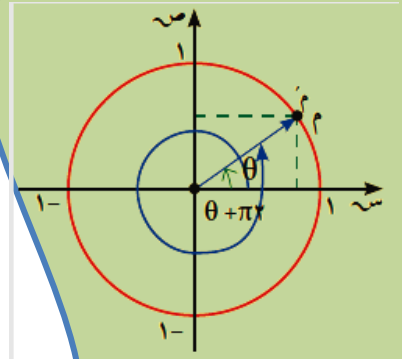
٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

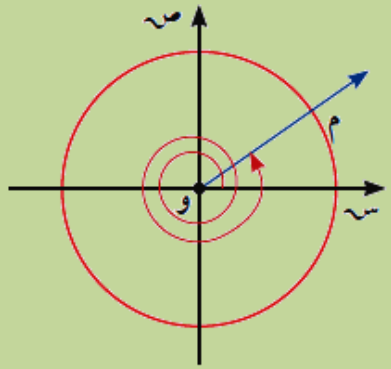
إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

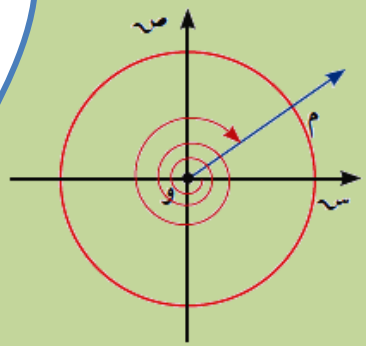
جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف





دوران بالاتجاه الموجب



دوران بالاتجاه السالب

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد عادة على أصغر قياس غير سالب)

∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = −$\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

حل المعادلة ظا س = ظا θ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

الحل:

ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$ وحيث ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ك π، (ك ∈ ص)

حل المعادلة جا س = جا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جاس > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ك π

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتاθ}}{\text{جاθ}}$ ، ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظاθ}}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{\text{جتاθ}}$ ، قتاθ = $\frac{١}{\text{جاθ}}$

جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس.

الحل:

جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)

= جاس × ١ جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

= جاس.

١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}}$

∴ جتاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{ظاθ}}$ > ٠ لأن جاθ > ٠، ظاθ > ٠

١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ

١ + $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ = قا^{٢}θ

قا^{٢}θ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٤٤+٢٥}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

قاθ = $\frac{١٣}{٥}$ قاθ = − $\frac{١٣}{٥}$ مرفوضة

جتاθ = $\frac{١}{\text{قاθ}}$ = $\frac{٥}{١٣}$

ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $\frac{١٢}{٥}$ × $\left(\frac{٥}{١٣}\right)$ جاθ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتاθ = $\frac{٥}{١٣}$

طريقة ثانية

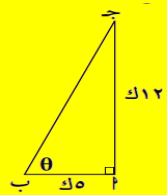
(ب جـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} نظرية فيثاغورث

ب جـ^{٢} = (٥ك)^{٢} + (١٢ك)^{٢} = ٢٥ك^{٢} + ١٤٤ك^{٢} = ١٦٩ك^{٢}

ب جـ = ١٣ك

جاθ = $\frac{١٢ك}{١٣ك}$ = $\frac{١٢}{١٣}$ ،

جتاθ = $\frac{٥ك}{١٣ك}$ = $\frac{٥}{١٣}$



١ + ظتا^{٢}θ = قتا^{٢}θ

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد ظتاθ، ظاθ.

الحل:

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{θ}}$

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{١}{\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}}$ = $\frac{١}{\frac{٩}{٤٩}}$ = $\frac{٤٩}{٩}$

ظتا^{٢}θ = $\frac{٤٩}{٩}$ − ١ = $\frac{٤٠}{٩}$

ظتاθ = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$ أو ظتاθ = − $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

∵ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها (موجبة)

∴ ظتاθ > ٠ وبالتالي ظتاθ = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

ظاθ = $\frac{١}{\text{ظتاθ}}$ = $\frac{١}{\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٤٠}}$ ≃ ٠,٤٧٤

الهندسة التحليلية

الدائرة
- معادلة مماس على الدائرة
- الصورة القياسية
- الصورة العامة
- معادلة الدائرة
- العلاقة بين دائرتين

البعد بين نقطة ومستقيم
- البعد بين نقطة وخط مستقيم

ميل الخط المستقيم ومعادلته
- معادلة
- معدل التغير
- العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية

تقسيم قطعة مستقيمة
- تقسيم من الخارج
- تقسيم من الداخل

المستوى الإحداثي
- إحداثيات نقطة تنصيف قطعة مستقيمة
- المسافة بين نقطتين

المستوى الإحداثي

المسافة بين نقطتين

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) تساوي $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).

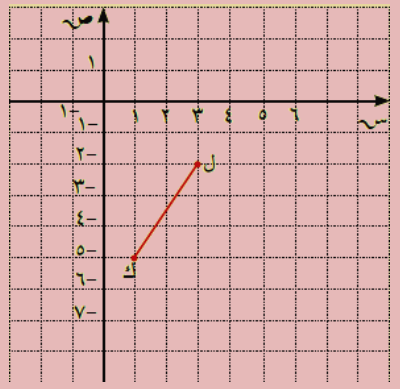
الحل: المسافة = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

$= \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - (-٥))^٢}$

$= \sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢}$

$= \sqrt{١٣} = ٣,٦$ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.



نقطة المنتصف

قانون:

إذا كانت أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$).

فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص)

$\text{س} = \frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}$.

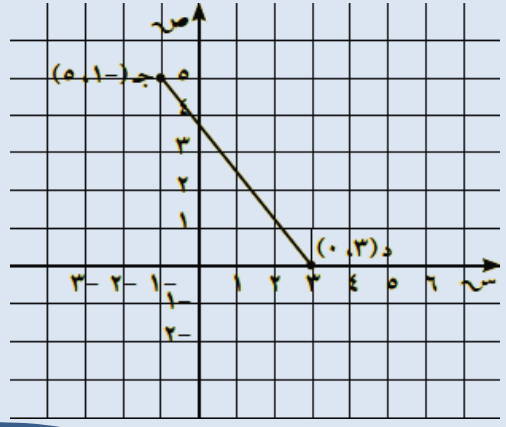
في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ حيث جـ(−١، ٥)، د(٣، ٠)

الحل: $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right) = \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

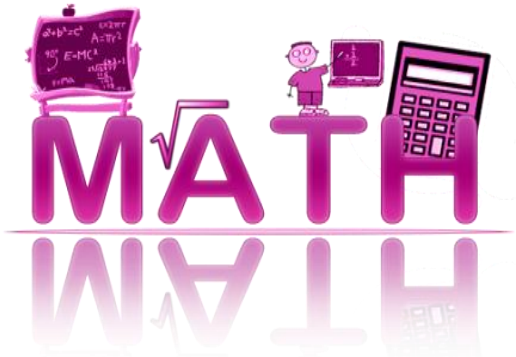
$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

$= (١ ، ٢,٥)$

نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ هي (١ ، ٢,٥).

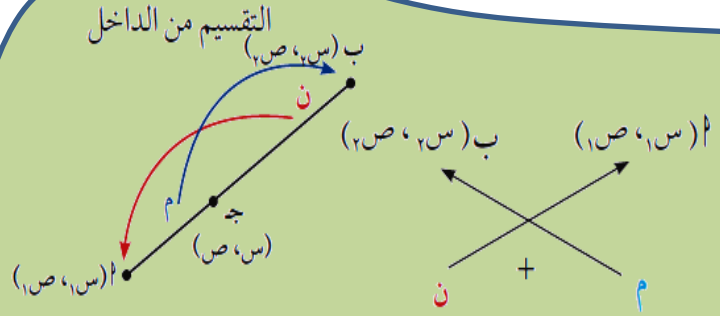


تقسيم قطعة مستقيمة



١ – التقسيم من الداخل

التقسيم من الداخل



$$س = \frac{م\ س_٢ + ن\ س_١}{م + ن}$$

$$ص = \frac{م\ ص_٢ + ن\ ص_١}{م + ن}$$

$$جـ \left(\frac{م\ س_٢ + ن\ س_١}{م + ن} ، \frac{م\ ص_٢ + ن\ ص_١}{م + ن} \right)$$

لتكن $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (٥، ٤)، ب (١٠، ٦)

المطلوب تقسيم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل من جهة أ.

	أ	ب
	(٥، ٤)	(١٠، ٦)
بنسبة	٢	٣

نقطة التقسيم جـ (س، ص)

$$= \left(\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} \right)$$

$$= (٧ ، ٤,٨)$$

ميل الخط المستقيم

المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

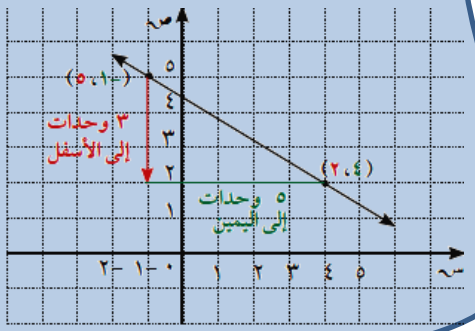
معدل التغير = $\frac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$

الميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

$= \frac{٢ - ٥}{٤ - (-١)}$

$= \frac{-٣}{٥}$

ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{-٣}{٥}$.



الميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ، $س_٢ - س_١ \neq ٠$

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).

الحل:

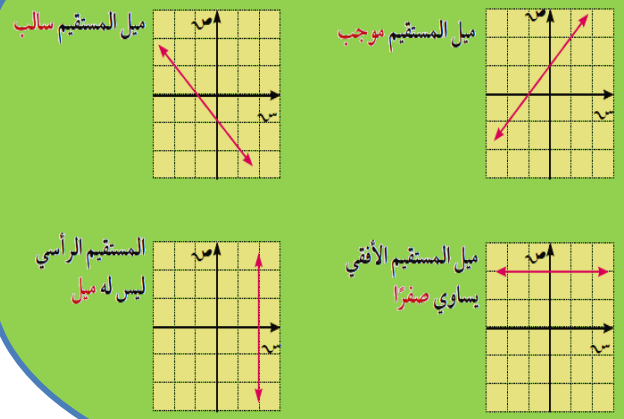
الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٧ - ١}{٥ - (-٢)}$ عوّض

$= \frac{٦}{٧}$ بسّط

ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي $\frac{٦}{٧}$.

م = ظا θ.



معادلة الخط المستقيم

ص = م س + ن

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، −١).

الحل:

ص − (−١) = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ١ = $\frac{٣}{٢}$ س − ٦

ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٧ بالتبسيط

∴ المعادلة: ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٧.

معادلة المستقيم: ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$).

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١، ٣) ، ب(−٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$

م = $\frac{٣}{٣}$ = ١

المعادلة: ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)

ص − ٣ = ١ (س − ١) بالتعويض في المعادلة

ص = ٣ + س − ١ بالتبسيط

ص = س + ٢

س − ص + ٢ = ٠

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

أس + ب ص + جـ = ٠

حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س$_{١}$، ص$_{١}$) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: ف = $\frac{|\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

أوجد البعد من النقطة د(−٤، −٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ س − ٧.

الحل:

نكتب أولًا معادلة المستقيم ل على الصورة: أ س + ب ص + جـ = ٠

ل: ٣س − ٢ص − ٧ = ٠

أ = ٣ ب = −٢ جـ = −٧

س$_{١}$ = −٤ ص$_{١}$ = −٣

البعد ف = $\frac{|\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$

ف = $\frac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٢)^{٢}}} = \frac{|-١٣|}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{١٣}{\sqrt{١٣}} = \sqrt{١٣}$.

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

ملاحظة:

إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة تنتمي للمستقيم.

معادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$$

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ ، حيث (د، هـ) مركزها

$(س - ٣)^٢ + [ص - (-٢)]^٢ = ٤٩$ بالتعويض عن (د، هـ) بـ (٣، −٢)

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤٩$

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل

$$س^٢ + ص^٢ = نق^٢$$

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$، ثم ارسم الدائرة.

بمقارنة معادلة الدائرة المعطاة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

نجد أن: $-د = ٢ \Longleftarrow د = -٢$

$-هـ = -٣ \Longleftarrow هـ = ٣$

$نق^٢ = ٩ \Longleftarrow نق = ٣$

مركز الدائرة (−٢، ٣) وطول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات.

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$. حيث $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$

$$٣س^٢ + ٣ص^٢ - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠$$

$$س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٣ص - ٤ = ٠$$

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

$\therefore ل = -٢، ك = ٣، ب = -٤$

$$المركز = \left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$$

$$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$$

$$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$$

$$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$$

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًا هذه المعادلة بمجرد مقارنة

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب$ مع الصفر.

1. عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
2. عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
3. عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

أ) المعادلة: $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$

$ل = -٣، ك = ٥، ب = \frac{-١٥}{٤}$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠$

ب) المعادلة: $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$

$ل = ٤، ك = -٧، ب = ٢٠$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

$\therefore$ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

جـ) المعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$

$ل = -٦، ك = ٨، ب = ٢٥$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٣٦ + ٦٤ - ٤ \times ٢٥ = ٠$

$\therefore$ المعادلة تمثل نقطة.

معادلة مماس لدائرة

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٥$ عند نقطة التماس أ(٣، ١).

الحل:

النقطة أ(٣، ١) تنتمي إلى الدائرة .

إحداثيات مركز الدائرة و(١، ٢).

$ميل \overline{وأ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ١}{١ - ٣} = -\frac{١}{٢}$

∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ $ميل_{المماس} \times ميل \overline{وأ} = -١$

$م_{المماس} \times (-\frac{١}{٢}) = -١$

$م_{المماس} = ٢$

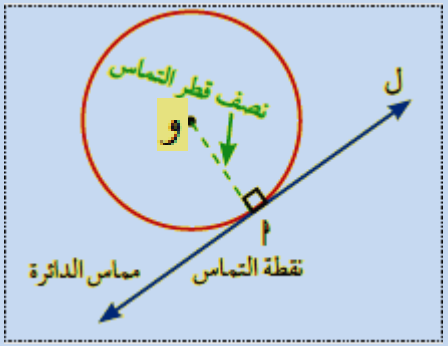
معادلة المماس $\overline{أ}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ١ = ٢ (س - ٣)$

$ص - ١ = ٢س - ٦$

∴ معادلة المماس ص = ٢س − ٥

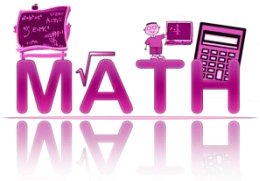


∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ $ميل_{المماس} \times ميل \overline{وأ} = -١$

معادلة المماس

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$



أثبت أن النقطة أ(٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$

المعادلة على شكل الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث ل = −٤، ك = ٢ ، ب = −٢٠

بالتعويض عن النقطة (٦، −٤)

$(٦)^٢ + (-٤)^٢ - ٤(٦) + ٢(-٤) - ٢٠$

$= ٣٦ + ١٦ - ٢٤ - ٨ - ٢٠ = ٠$ ✓

∴ النقطة أ(٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة.

مركز الدائرة و (٢، −١)، طول نصف قطرها: $ن_و = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

$ن_و = \frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠} = ٥$

ميل نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ = $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٤ - (-١)}{٦ - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

نعرف أن نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ هو عمودي على المماس عند النقطة أ

ليكن $م'$ ميل المماس: $م \times م' = -١$

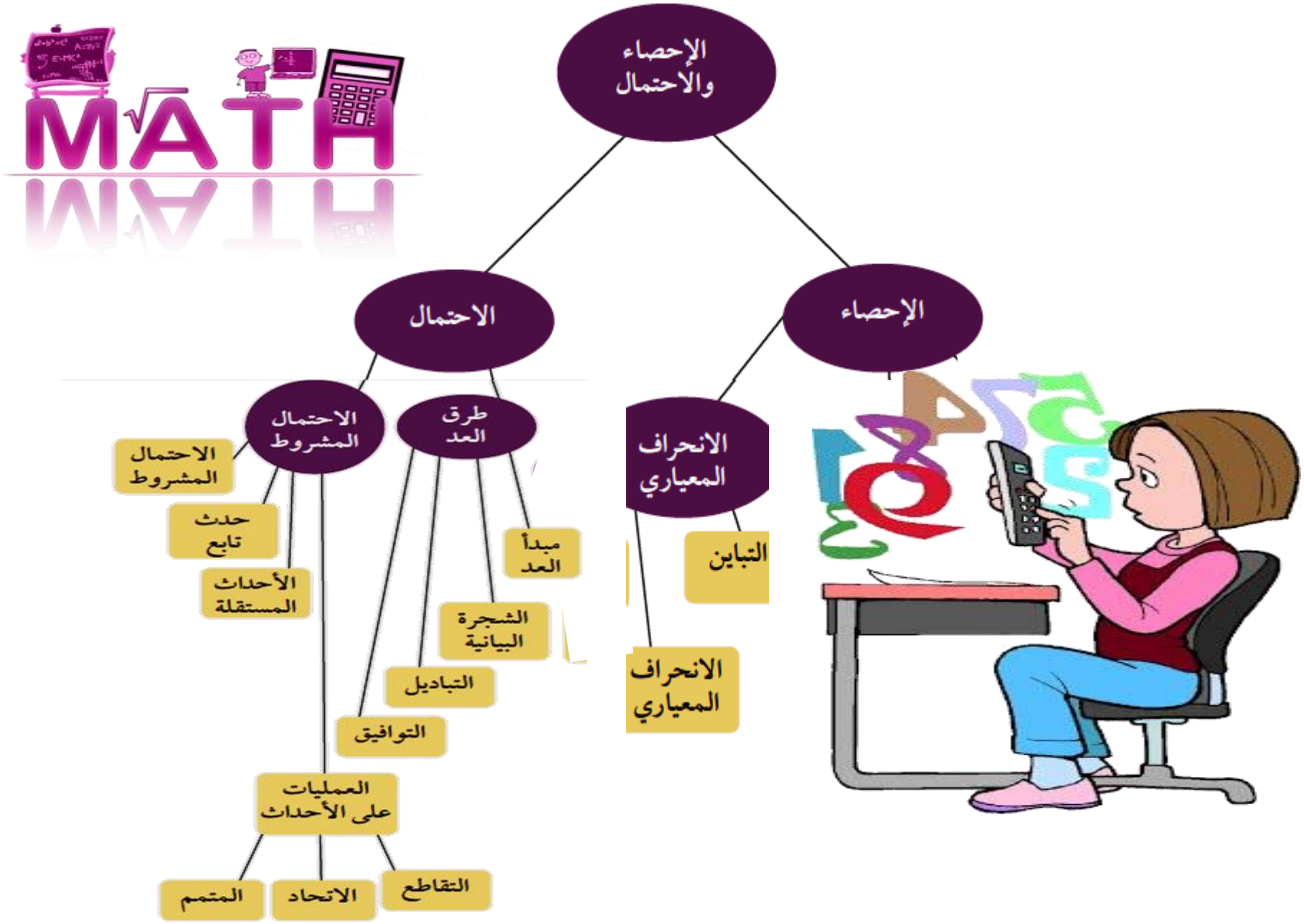
أي $\frac{-٣}{٤} \times م' = -١$ ومنه $م' = \frac{٤}{٣}$

نأخذ المعادلة: $ص - ص_١ = م' (س - س_١)$

$ص - (-٤) = \frac{٤}{٣}(س - ٦)$

$ص = \frac{٤}{٣}س - ١٢$

∴ معادلة المماس $ص = \frac{٤}{٣}س - ١٢$


MATH
الإحصاء والاحتمال
الاحتمال
الإحصاء
الاحتمال المشروط
طرق العد
الانحراف المعياري
الاحتمال المشروط
حدث تابع
الأحداث المستقلة
مبدأ العد
الشجرة البيانية
التباديل
التوافيق
التباين
الانحراف المعياري
العمليات على الأحداث
المتمم
الاتحاد
التقاطع

الانحراف المعياري

لقيم

إذا كانت $س_1، س_2، س_3، ...، س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\bar{س}$ فإن:

$$التباين = ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{ع^2}$

لقيم تكرارية

إذا كانت $س_1، س_2، س_3، ...، س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_1، ت_2، ت_3، ....، ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^2 = \frac{ت_1(س_1 - \bar{س})^2 + ت_2(س_2 - \bar{س})^2 + ... + ت_ن(س_ن - \bar{س})^2}{ت_1 + ت_2 + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$

والانحراف المعياري $= ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}}$

ذو فئات

لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر $س_ر$ هي مركز الفئة.

إذا كانت $س_1، س_2، س_3، ....، س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_1، ت_2، ت_3، ....، ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^2 = \frac{ت_1(س_1 - \bar{س})^2 + ت_2(س_2 - \bar{س})^2 + ... + ت_ن(س_ن - \bar{س})^2}{ت_1 + ت_2 + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$

والانحراف المعياري $= ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}}$

معلومة رياضية:

- $(س_ر - \bar{س})$ هي انحراف $س_ر$ عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي:
  هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

طرق العد

العد عن طريق القوائم

الشجرة البيانية

مبدأ العد

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي :

$ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، ... $ع_ن$ وإذا كانت:

$ع_1$ يمكن أن تحدث بـ $ر_1$ طريقة،

$ع_2$ يمكن أن تحدث بـ $ر_2$ طريقة،

$ع_ن$ يمكن أن تحدث بـ $ر_ن$ طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$ر_1 \times ر_2 \times \dots \times ر_ن$.

التباديل

قانون

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!} \text{ حيث } ر، ن \in ص^{+}، ر \le ن، \quad ل^{ن}_{0} = 1$$

التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≤ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

يستخدم الرمز $ق^{ن}_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{0} = 1$

(٢) $\binom{ن}{ن} = 1$

$$\text{عدد التوافيق} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

الاحتمال

الاحتمال لحدث ما

$$ل(\text{الحدث } أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } أ}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

1. $٠ \le ل(أ) \le ١$
2. إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ حدثًا مستحيلًا.
3. إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ حدثًا مؤكدًا.
4. مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

العمليات على الأحداث واحتمالاتها

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

ومنها $ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

$ل(\bar{أ}) = ١ - ل(أ)$

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$.

الاحتمال المشروط

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ حيث $ل(أ) \neq ٠$

وكذلك $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب|أ)$

في تجربة عشوائية أ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣، ل(ب) = ٠,٦، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: أ ل(ب|أ) ب ل(أ|ب)

الحل:

أ $ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$.

ب $ل(أ|ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

الأحداث المستقلة

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة ependent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

الحدث التابع

MATH