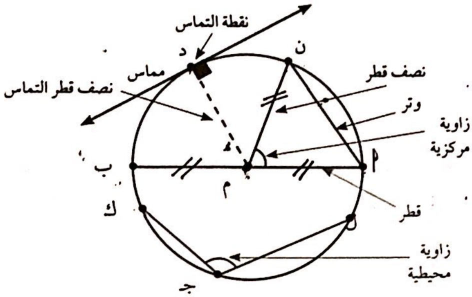
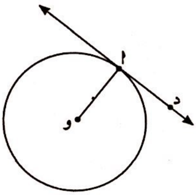
٦ ـ ١ (أ) الدائرة



نظرية (١) كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

مماس الدائرة



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

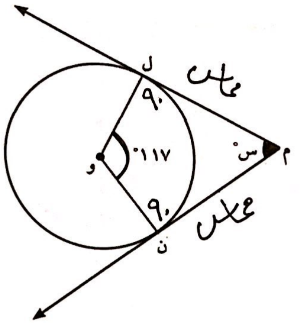
$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

نظرية (٢) المماس عمودي على نصف قطر التماس.

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل $\hat{\text{م}}$ ن.



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس ، $\overline{\text{و ل}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}} \perp \overline{\text{و ل}}$

∴ ق ($\hat{\text{ل}}$) = ٩٠° نظرية

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماس ، $\overline{\text{و ن}}$ نصف قطر التماس

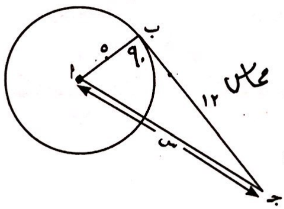
∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{و ن}}$

∴ ق ($\hat{\text{ن}}$) = ٩٠° نظرية

∴ ق ($\hat{\text{م}}$) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١١٧°) = ٦٣°

لأن مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس ، $\overline{\text{ب أ}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ب أ}}$

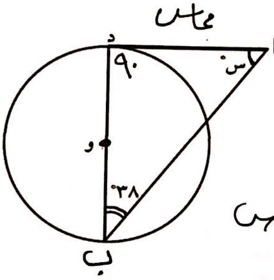
∴ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٩٠° نظرية

من نظرية فيثاغورث

أجـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$ = ١٣ سم .

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس ، دو نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{أد}} \perp \overline{\text{دو}}$

∴ ق (دَ) = ٩٠° نظرية

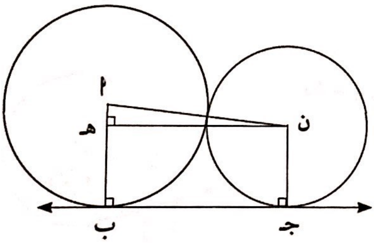
س° = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٨°) = ٥٢°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ إذا كانت الدائرتان متماستين

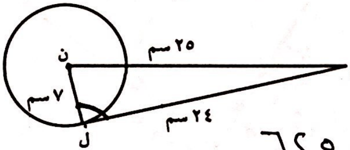
وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



90°

نظرية (٣) المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



البرهان

(م ن)^2 = (٢٥)^2 = ٦٢٥

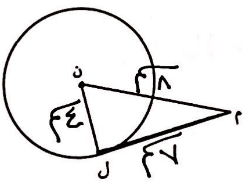
(م ل)^2 + (ل ن)^2 = (٢٤)^2 + (٧)^2 = ٦٢٥

∵ (م ن)^2 = (م ل)^2 + (ل ن)^2

∴ Δ م ل ن قائم الزاوية في ل

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة.

في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسّر إجابتك.



البرهان

(م ن)^2 = (٨)^2 = ٦٤

(م ل)^2 + (ل ن)^2 = (٧)^2 + (٤)^2 = ٦٥

∵ (م ن)^2 $\neq$ (م ل)^2 + (ل ن)^2

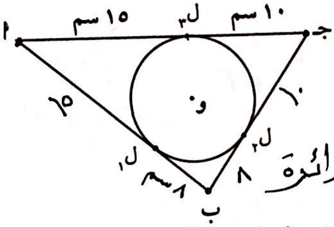
∴ Δ م ل ن ليس قائم الزاوية في ل.

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ليس مماساً للدائرة

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث ا ب جـ.



البرهان

∵ ال١ ، ال٣ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ال١ = ال٣ = ١٥ سم نظرية

∵ ب ل١ ، ب ل٢ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم نظرية

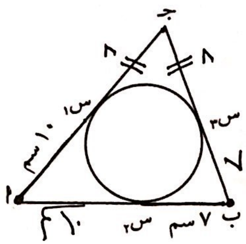
∵ جـ ل٢ ، جـ ل٣ قطعتان مماستان للدائرة

∴ جـ ل٢ = جـ ل٣ = ١٠ سم

∴ محيط △ ا ب جـ = ١٥ + ١٠ + ١٠ + ٨ + ٨ + ١٥

= ٦٦ سم .

في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم،
فأوجد طول ب جـ.



البرهان

∵ أ س$_1$ ، أ س$_2$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ س$_1$ = أ س$_2$ = ١٠ سم

∵ ب س$_2$ ، ب س$_3$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب س$_2$ = ب س$_3$ = ٧ سم

∵ جـ س$_1$ ، جـ س$_3$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ جـ س$_1$ = جـ س$_3$ = $\frac{٥٠ - (١٠ + ١٠ + ٧ + ٧)}{٢}$

= ٨ سم

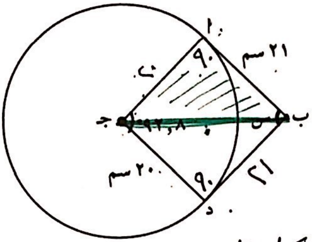
∴ ب جـ = ٨ + ٧ = ١٥ سم

$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس ، أجـ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

∴ ق($\hat{\text{أ}}$) = ٩٠° نظرية

∵ $\overleftrightarrow{\text{بد}}$ مماس ، جـد نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{جـد}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{بد}}$

∴ ق($\hat{\text{د}}$) = ٩٠°

∴ س = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٩٢,٨°) = ٨٧,٢°

∵ $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب أ = ب د = ٢١ سم نظرية

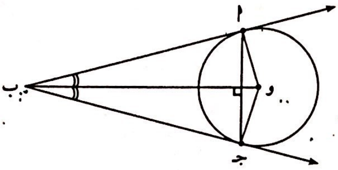
∵ جـد = جـأ = ٢٠ سم (أنصاف أقطار)

∴ محيط الشكل = ٢١ + ٢١ + ٢٠ + ٢٠ = ٨٢ سم

من نظرية فيثاغورث

ب جـ = $\sqrt{(٢١)^2 + (٢٠)^2}$ = ٢٩ سم

نتائج النظرية



Δب أجـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

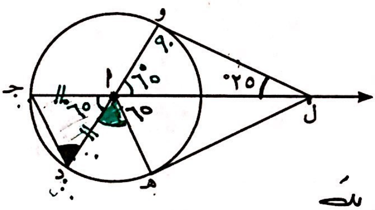
① ب و (شعاع) منصف الزاوية أ ب̂ جـ

② و ب (شعاع) منصف الزاوية أ و̂ جـ

③ و ب ⊥ أجـ

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ د̂ جـ)، ق(هـ أ̂ د)

إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.



البرهان

∵ ل و مماس ، أ و نصف قطر التماس

∴ ل و ⊥ أ و

∴ ق(و̂) = ٩٠° نظرية

∴ ق(و أ̂ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق(جـ أ̂ د) = ٦٥° بالتقابل بالرأس

∵ أجـ = أد (انصاف اقطار)

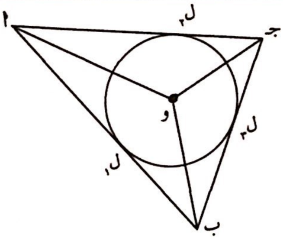
∴ ق(جـ̂) = ق(د̂) = (١٨٠° − ٦٥°) ÷ ٢ = ٥٧,٥°

∵ ل و ، ل هـ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ق(و أ̂ ل) = ق(هـ أ̂ ل) = ٦٥° نتيجة

∴ ق(هـ أ̂ د) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)



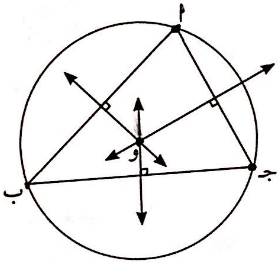
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

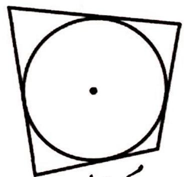
الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

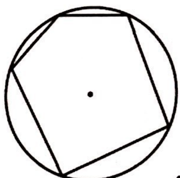
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

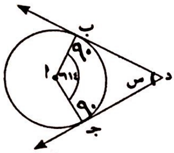


محاطة بمضلع
(داخلة)



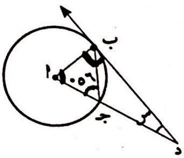
محيطة بمضلع
(خارجة)

في التمارين (٨–١١)، اختر الإجابة الصحيحة:



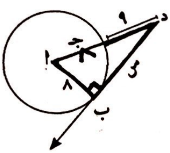
(٨) إذا كان $\overleftarrow{دب}$، $\overleftarrow{دجـ}$ مماسان للدائرة. فإن س =

(أ) ٢٦°　　٥٧°　　(جـ) ٦٦°　　(د) ١١٤°



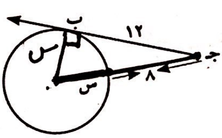
(٩) إذا كان $\overleftarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =

٢٢°　　(ب) ٢٨°　　(جـ) ٣٤°　　(د) ٤٠°



(١٠) إذا كان $\overleftarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س = $\sqrt{(١٧)^٢ - (٨)^٢} =$

(أ) ٨　　(ب) ٩　　١٥　　(د) ١٧



(١١) إذا كان $\overleftarrow{جـب}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　٥

٨+س

(س+٨)² = س² + (١٢)²

١٤٤ + ~~س²~~ = ٦٤ + ١٦س + ~~س²~~

١٤٤ = ٦٤ + ١٦س

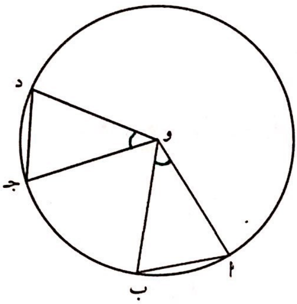
١٤٤ − ٦٤ = ١٦س

٨٠/١٦ = ١٦س/١٦

س = ٥

٦ – ٢ الأوتار والأقواس

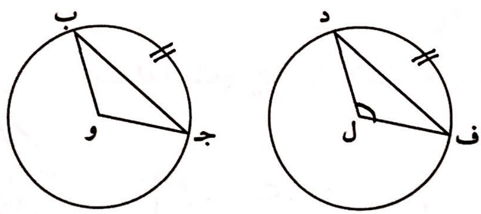
نظرية (١)



في دائرة أو في دوائر متطابقة:

1. **للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.**
2. **الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.**
3. **للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.**

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، ب⁀جـ ≅ د⁀ف. ماذا تستنتج؟



ق(لˆ) = ق(وˆ)

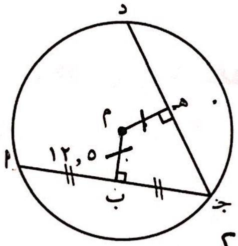
دف = باجـ

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر.



البرهان

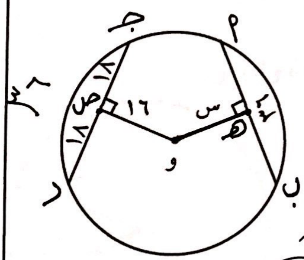
∵ م ب = م هـ

∴ أ جـ = د جـ نظرية

∴ د جـ = ١٢,٥ + ١٢,٥ = ٢٥

دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



البرهان

∵ أ ب = جـ د = ٣٦

∴ و هـ = و ص = ١٦

نظرية

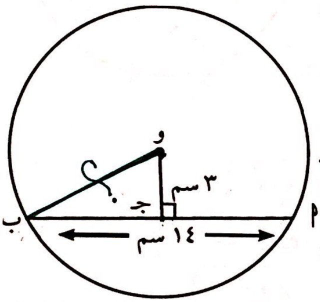
نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



البرهان

∵ $\overline{وج} \perp \overline{أب}$

∴ ج منتصف $\overline{أب}$

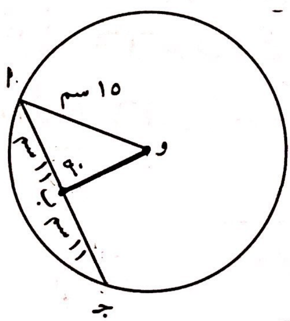
∴ أج = جب = ٧ سم نظرية

من نظرية فيثاغورث

وب = $\sqrt{(٧)^2 + (٣)^2} = \sqrt{٥٨}$

= ٧,٦ سم.

في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



البرهان

∵ ب منتصف $\overline{أج}$

∴ $\overline{وب} \perp \overline{أج}$

من نظرية فيثاغورث

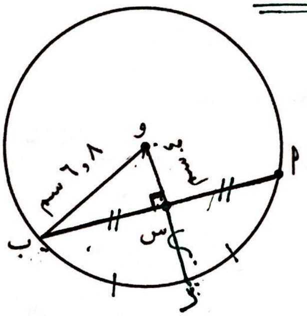
وب = $\sqrt{(١٥)^2 - (١١)^2} = ٢\sqrt{٢٦}$

= ١٠,١٩ سم

استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{\text{أب}}$.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.



البرهان

من نظرية فيثاغورث

$\text{ب س} = \sqrt{(٦,٨)^٢ - (٤)^٢} = ٥,٤٩$ سم

$\because \overline{\text{وس}} \perp \overline{\text{أب}}$

$\therefore$ س منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\text{أ س} = \text{س ب} = ٥,٤٩$ سم

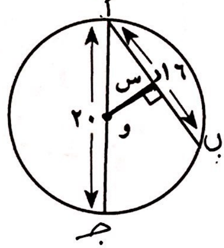
$\therefore \text{أب} = ٥,٤٩ + ٥,٤٩ = ١٠,٩٨$ سم

$\because$ و د $=$ و ب $= ٦,٨$ (انصاف أقطار)

$\therefore$ س د $= ٦,٨ - ٤ = ٢,٨$ سم

أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)



البرهان

$\because \overline{\text{ود}} \perp \overline{\text{أب}}$

$\therefore$ د منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\therefore$ أد $=$ د ب $= ٨$ سم نظرية

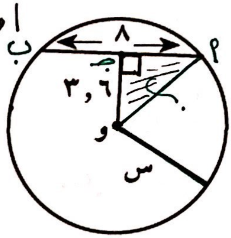
$\because$ أ و $=$ و جـ $= ١٠$ سم انصاف أقطار

من نظرية فيثاغورث

$\therefore \text{ود} = \sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢} = ٦$ سم

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(ب) اوجد قيمة س



البرهان

∵ $\overline{\text{وجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ أجـ = جـب = ٤ سم

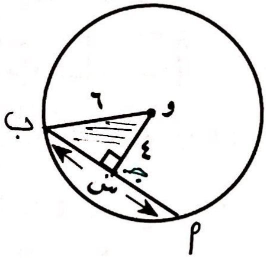
نظرية

من نظرية فيثاغورث

أو = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣,٦)^{٢}}$ = ٥,٣٨ سم

∴ س = ٥,٣٨ سم

(جـ)



البرهان

من نظرية فيثاغورث

باجـ = $\sqrt{(٦)^{٢} - (٤)^{٢}}$

= ٤,٤٧ سم

∵ $\overline{\text{وجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

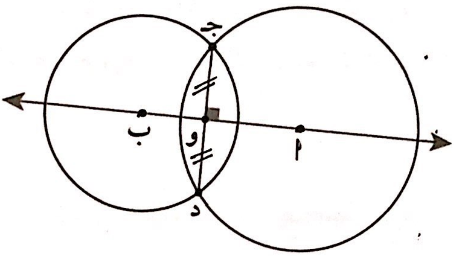
∴ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ أجـ = جـب = ٤,٤٧ سم

∴ أب = ٤,٤٧ + ٤,٤٧ = ٨,٩٤ سم

نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



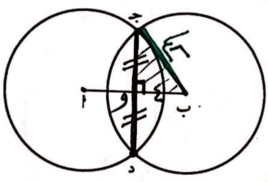
$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overline{\text{جـد}}$

، جـو = و د

دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول أب يساوي ٨ سم.



البرهان

∵ الدائرتان متقاطعتان

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{جـد}}$ وينصفه

∵ الدائرتان متطابقتان

∴ أو = وب = ٤ سم

من نظرية فيثاغورث

∴ جـو = $\sqrt{(٦)^2 - (٤)^2}$ ≈ ٤٫٤٧

∴ جـد = ٤٫٤٧ + ٤٫٤٧ = ٨٫٩٤ سم

٦ ـ ٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

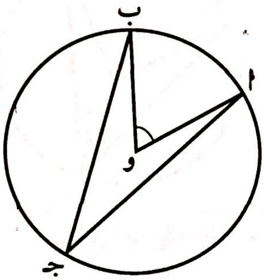
تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

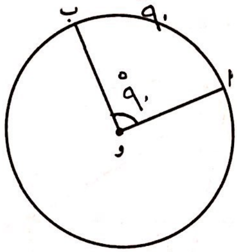


نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

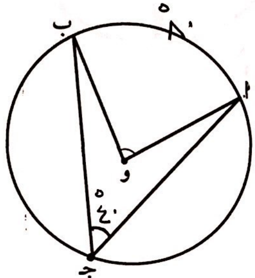
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(⌒أب) = ٩٠°.



ق(∠أوب) المركزية = ق(⌒أب) = ٩٠°

في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(∠أجـب).

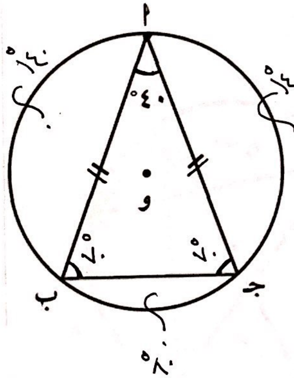


ق(∠أجـب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب)

∴ ق(∠أجـب) = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠°

في الشكل المقابل أب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(∠ب أ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس ⌒أب، ⌒ب جـ، ⌒أجـ .



البرهان

∵ أب = أجـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$

= ٧٠°

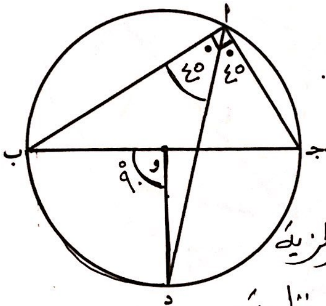
ق(∠أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(⌒بجـ)

∴ ق(⌒بجـ) = ٤٠° × ٢ = ٨٠°

بالمثل ق(⌒أجـ) = ٧٠° × ٢ = ١٤٠°

ق(⌒أب) = ٧٠° × ٢ = ١٤٠°

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{دو} \perp \overline{بجـ}$.



البرهان

∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ب $\hat{أ}$ جـ

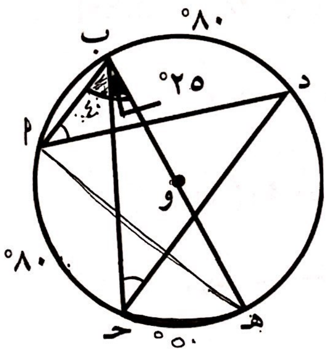
∴ ق (ب $\hat{أ}$ د) = ق (جـ $\hat{أ}$ د) = ٤٥°

∵ ق (ب $\hat{أ}$ د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب $\hat{و}$ د) المركزية

∴ ق (ب $\hat{و}$ د) = ٤٥° × ٢ = ٩٠° نظرية

∴ $\overline{ود} \perp \overline{بجـ}$

أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:



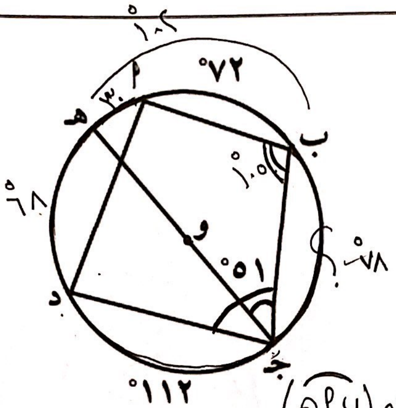
(أ) ق($\hat{أ}$). = ٤٠°

(ب) ق($\overset{\frown}{جـهـ}$). = ٥٠°

(جـ) ق($\hat{جـ}$). = ٤٠°

(د) ق(أ$\hat{ب}$هـ). = ٦٥°

في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:



(أ) القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$.

(ب) ق($\hat{\text{ب}}$).

(ج) ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د).

البرهان

∵ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ هـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ هـ}}$)

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ هـ}}$) = ٥١° × ٢ = ١٠٢° نظرية

∵ $\overline{\text{جـ هـ}}$ قطر

∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ب هـ}}$) = ١٨٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ١٨٠° − ١٠٢° = ٧٨° (١)

∵ ق($\hat{\text{ب}}$) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ جـ}}$)

∴ ق($\hat{\text{ب}}$) = $\frac{٢١٠}{٢}$ = ١٠٥° (٢)

∵ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ د}}$)

∴ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د) = $\frac{١٧٠}{٢}$ = ٨٥° (٣)

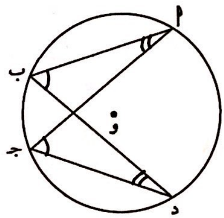
نتائج

١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

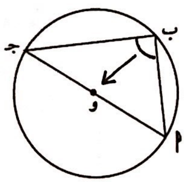
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂، د̂ المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.



أب̂د ، أج̂د تحصران أد⌒

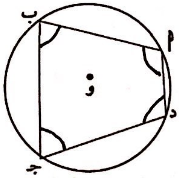
∴ ق(أب̂د) = ق(أج̂د)



أب̂جـ تحصر أجـ⌒ (نصف دائرة)

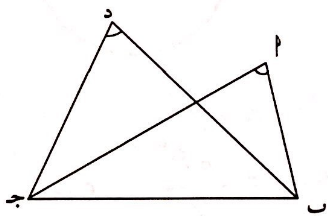
∴ ق(أب̂جـ) = ٩٠°

(أب̂جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



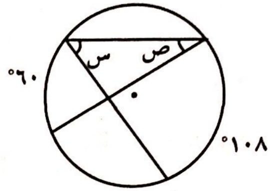
ق(أ̂) + ق(ج̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°



أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

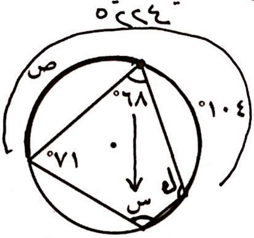
(أ)



س = $\frac{١٠٨^\circ}{٢}$ = ٥٤°

ص = $\frac{٦٠^\circ}{٢}$ = ٣٠°

(ب)

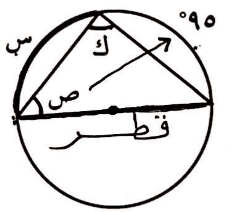


س = ١٨٠° − ٦٨° = ١١٢°

ك = ١٨٠° − ٧١° = ١٠٩°

ص = ٢٢٤ − ١٠٤ = ١٢٠°

(جـ)

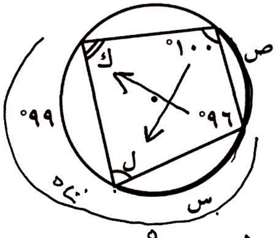


ك = ٩٠°

ص = $\frac{٩٥^\circ}{٢}$ = ٤٧,٥°

س = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

(د)



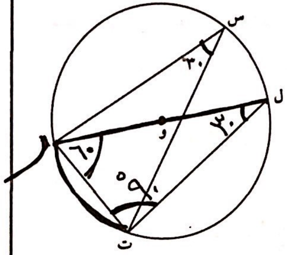
ل = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

ك = ١٨٠° − ٩٦° = ٨٤°

س = ٢٠٠ − ٩٩° = ١٠١°

ص = ١٦٨ − ١٠١
= ٦٧°

مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:



(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟ ثلاثيني ستيني

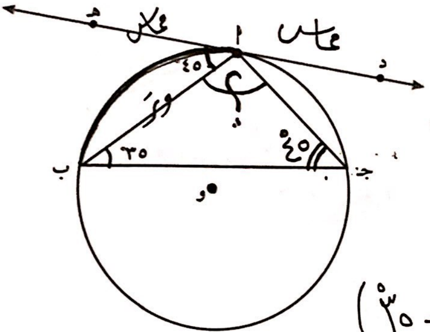
(ب) أوجد ق(ل رَت). ٦٠°

(جـ) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة نق. ٣٧ نق

نظرية (٣) (١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماسًا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أ ب).



البرهان

ق (جـ) = ق (هـ أ ب) = ٤٥°

مشتركتان في أ ب

∴ ق (جـ أ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°)

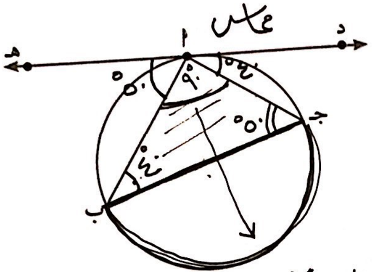
= ١٠٠°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أ̂ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ̂ ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث اب جـ.

ب أثبت أن جـ ب قطر للدائرة.



البرهان

ق(ب̂) = ق(د أ̂ جـ) = ٤٠°

مشتركتان في أجـ نظرية

ق(جـ̂) = ق(هـ أ̂ ب) = ٥٠°

مشتركتان في أب

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٤٠°) = ٩٠°

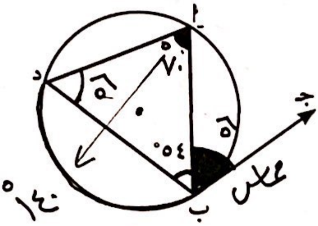
لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∵ ق(جـ أ̂ ب) = ½ ق(ب جـ)

∴ ق(ب جـ) = ٩٠° × ٢ = ١٨٠°

∴ ب جـ قطر في الدائرة.

في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب⁀د) = ١٤٠°، فإن ق(∠أ ب جـ) =



البرهان

ق(أ̂) = $\frac{1}{2}$ ق(ب⁀د)

ق(أ̂) = $\frac{١٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

ق(د̂) = ١٨٠° − (٧٠° + ٥٤°) = ٥٦°

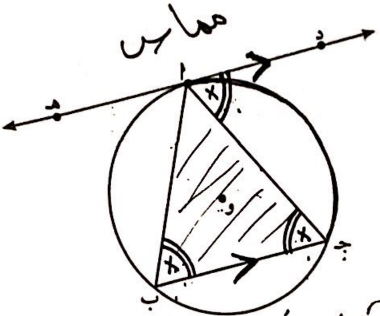
لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق(∠أ ب جـ) = ق(د̂) = ٥٦° مشتركتان في أ⁀ب

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماس للدائرة عند النقطة أ،

ب جـ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{دهـ}$.

أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.



البرهان

∵ ق(ب̂) = ق(د أ̂ جـ) مشتركتان في أ جـ

∵ ق(جـ̂) = ق(د أ̂ جـ) بالتبادل والتوازي

∴ ق(ب̂) = ق(جـ̂)

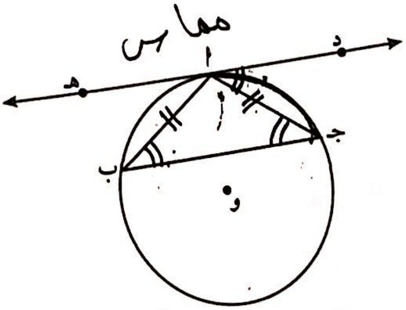
∴ أ جـ = أ ب

∴ △ أ ب جـ متطابق الضلعين

في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



البرهان

∵ ق (د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق ($\hat{\text{ب}}$) مشتركتان في أجـ

∵ أب = أجـ

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ق ($\hat{\text{ب}}$)

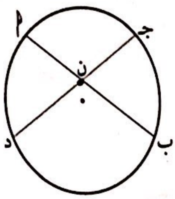
∴ ق (د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) وهما متبادلتان

∴ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

٦ – ٤ الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

تقاطع الأوتار داخل الدائرة

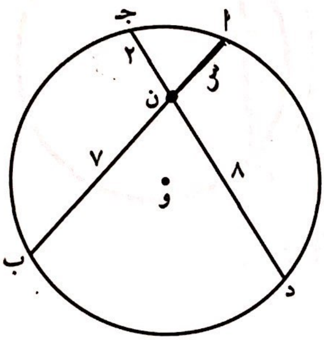
نظرية (١)



إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



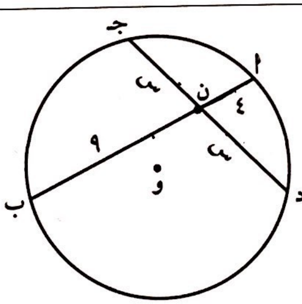
في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

س × ٧ = ٢ × ٨

$\frac{\cancel{٧}\,س}{\cancel{٧}} = \frac{١٦}{٧}$

س = $\frac{١٦}{٧}$ = ٢٫٢٨٥



في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

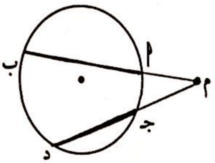
٤ × ٩ = س × س

٣٦ = س²

س = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة (١)



إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.

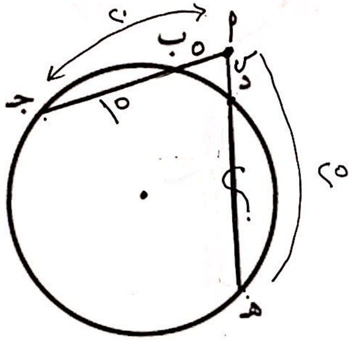
م أ × م ب = م جـ × م د

في الشكل المقابل:

أجـ = ٢٠، ب جـ = ١٥

أهـ = ٢٥.

أوجد: د هـ.



أ د × أ هـ = أ ب × أ جـ

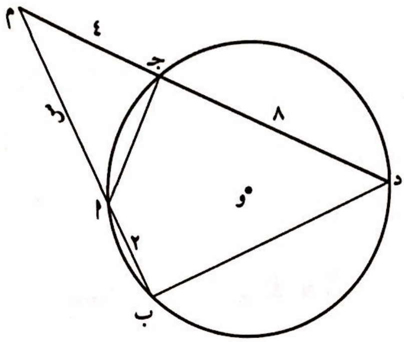
س × ٢٥ = ٥ × ٢٠

$\frac{\cancel{٢٥}\,س}{\cancel{٢٥}} = \frac{١٠٠}{٢٥}$

س = ٤

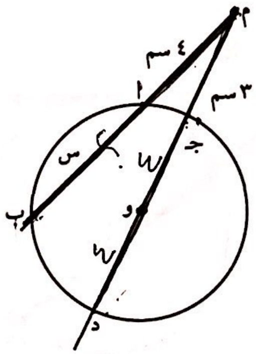
∴ د هـ = ٢٥ − ٤ = ٢١

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



معلق
وغير مقرر

في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.
أوجد قيمة س.



م أ × م ب = م جـ × م د

٤ × (٤ + س) = ٣ × ١١

١٦ + ٤س = ٣٣

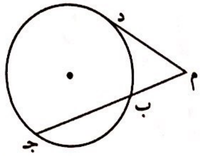
٤س = ٣٣ − ١٦

٤س / ٤ = ١٧ / ٤

س = ١٧ / ٤ =

تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

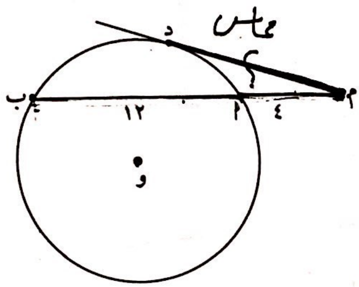
نتيجة (٢)



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ .

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علمًا بأن: أم = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.



(م د)^{٢} = م أ × م ب

س^{٢} = ٤ × ١٦

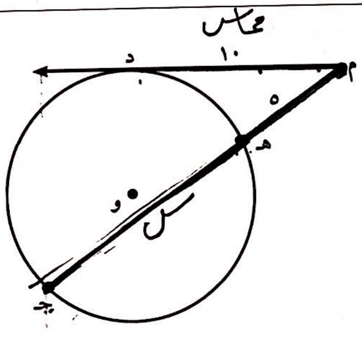
س^{٢} = ٦٤

س = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥.

أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.



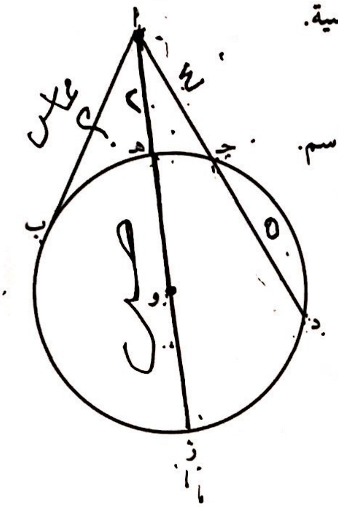
(م د)^{٢} = م هـ × م جـ

(١٠)^{٢} = ٥ × (س + ٥)

١٠٠ = ٥س + ٢٥

١٠٠ − ٢٥ = ٥س

$\frac{٧٥}{٥} = \frac{\cancel{٥}\text{س}}{\cancel{٥}}$ ← س = ١٥



المعطيات: أجـ = ٤سم، أد = ٩سم، أب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول أب.

أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أهـ = ٢سم.

$$(\text{أب})^{٢} = \text{أجـ} \times \text{أد}$$

$$\text{س}^{٢} = ٤ \times ٩$$

$$\text{س}^{٢} = ٣٦$$

$$\text{س} = \sqrt{٣٦} = ٦$$

$$\text{أجـ} \times \text{أد} = \text{أهـ} \times \text{أز}$$

$$٤ \times ٩ = ٢ \times (\text{ص} + ٢)$$

$$٣٦ = ٢\text{ص} + ٤$$

$$٣٦ - ٤ = ٢\text{ص}$$

$$\frac{٣٢}{٢} = \frac{\cancel{٢}\text{ص}}{\cancel{٢}}$$

$$\text{ص} = ١٦$$

الوحدة السابعة (المصفوفات) ← مصفوفة

٧–١ تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب أ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

المصفوفة أ **هي من الرتبة ٢ × ٣.**

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٣ × ٣

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{٢}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$

٣ × ١

$\underline{ج} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

١ × ٤

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & -٢ \end{bmatrix}$

٣ × ٢

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & -٨ \end{bmatrix}$

٣ × ١

$\underline{ج} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ -٥ & -١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$

٢ × ٣

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$ العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

في المصفوفة: $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢} = ٦$

ب $ب_{١٣} = ١$

ج $ب_{١١} = ١٢$

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ مربعة

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$ عمودية

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ أفقية

$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$ مستطيلة

المصفوفات المتساوية :

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٢س − ٥} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{٣ص + ١٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٢٥} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{ص + ١٨} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

٢س − ٥ = ٢٥

٢س = ٢٥ + ٥

$\frac{\cancel{\text{٢}}\text{س}}{\cancel{\text{٢}}} = \frac{\text{٣٠}}{\text{٢}}$

س = ١٥

٣ص + ١٢ = ص + ١٨

٣ص − ١ص = ١٨ − ١٢

$\frac{\cancel{\text{٢}}\text{ص}}{\cancel{\text{٢}}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}}$

ص = ٣

إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{٣٨} & \text{٥} \\ \text{٣} & \text{٤ص − ١٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س + ٨} & \text{٥} \\ \text{٣} & \text{−ص} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص؛

س + ٨ = ٣٨

س = ٣٨ − ٨

س = ٣٠

٤ص − ١٠ = −ص

٤ص + ص = ١٠

$\frac{\cancel{\text{٥}}\text{ص}}{\cancel{\text{٥}}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٥}}$

ص = ٢

٣×١ ٣×١

إذا كانت [٣س س + ص س − ص] = [−٩ ٤ −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

$\frac{٣س}{٣} = \frac{-٩}{٣}$

س = −٣

س + ص = ٤

−٣ + ص = ٤

ص = ٤ + ٣

ص = ٧

أوجد قيم كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٩ \\ ٥ص & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & س^{٢} \\ ص^{٢} & -٢ \end{bmatrix}$$

س² = ٩

س = ±$\sqrt{٩}$

س = ±٣

ص² = ٥ص

ص² − ٥ص = ٠

أ = ١   ب = −٥   جـ = ٠

الحاسبة

ص = ٥ أو ص = ٠

٧-٢ جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢- & ١ \\ ٧ & ٥- & ٣ \end{bmatrix}$ ٣×٢ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٤- & ٢ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ٢×٣ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٣- & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & ٩- \end{bmatrix}$ ٣×٢

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب لا يمكن ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

$$أ + جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢- & ١ \\ ٧ & ٥- & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & ٩- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣- & ٧ & ٤ \\ ١٩ & ١ & ٦- \end{bmatrix}$$

$$أ - جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢- & ١ \\ ٧ & ٥- & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣- & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & ٩- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ١١- & ٢- \\ ٥- & ١١- & ١٢ \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ٢٤ & ١٢- \\ ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٤ & ٥- \\ ٧- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ & ١٥- \\ ٩ & ٨- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال **Commutative**
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع **Associative**
- $\underline{٠}_{م×ن}$ + أ = أ + $\underline{٠}_{م×ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = $\underline{٠}_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد أ − ب ، ب − أ

أ − ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

ب − أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ & -١ \\ -١ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أ − ب ≠ ب − أ

أ + ب = ب + أ

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -١٢ & ٧ \\ -٨ & -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ١٠ \\ ١ & ١٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ -٤ & ١٢ \\ -٢ & ١٠ \end{bmatrix}$$

حل المعادلات المصفوفية

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$$

أوجد س̲ حيث:

$$\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١١ & ٧ \\ -٦ & -١ \end{bmatrix}$$