الإجابات :

Hala Labeeb

H.L.

٢٠٢١ - ٢٠٢٠

القائد

في

الرياضيات

حساب المثلثات

الصف العاشر الثانوي
الفصل الدراسي الثاني

إعداد / أ : إبراهيم عطية
ت : ٥٠٧٥٢٨٨٨

الوحدة الثامنة

١

يداً بيد نحو التميز في الرياضيات

هدية مجانية

الوحدة الثامنة

درس (٨ – ١)

$٩٠°$

الربع الأول: جا $\theta >$ ٠ + ، جتا $\theta >$ ٠ +

الربع الثاني: جا $\theta >$ ٠ + ، جتا $\theta <$ ٠ −

$١٨٠°$ $٠°$ ، $٣٦٠°$

الربع الثالث: جا $\theta <$ ٠ − ، جتا $\theta <$ ٠ −

الربع الرابع: جا $\theta <$ ٠ − ، جتا $\theta >$ ٠ +

$٢٧٠°$

{١} حـــدد إشارة جا θ ، جتـــا θ في كل مما يلي :

(أ) $\theta = ١٣٥°$

$٩٠° \leq \theta < ١٨٠°$

θ تقع في الربع الثاني

∴ جا $\theta >$ ٠

جتا $\theta <$ ٠

(ب) $\theta = ٣٠٥°$

$٢٧٠° \leq \theta < ٣٦٠°$

θ تقع في الربع الرابع

جا $\theta <$ ٠

جتا $\theta >$ ٠

(جـ) $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

$\pi < \theta < \frac{٣}{٢}\pi$

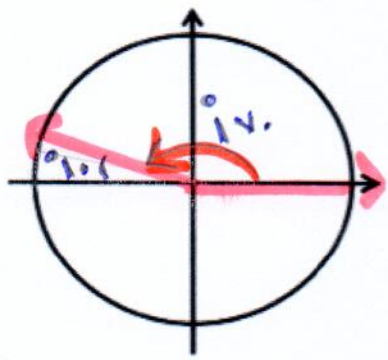
θ تقع في الربع الثالث

جا $\theta <$ ٠

جتا $\theta <$ ٠

{٢} ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ثم عين زاوية الإسناد ، وأوجـــد قياسهـــا .

(أ) $١٧٠°$



$\theta = ١٧٠°$

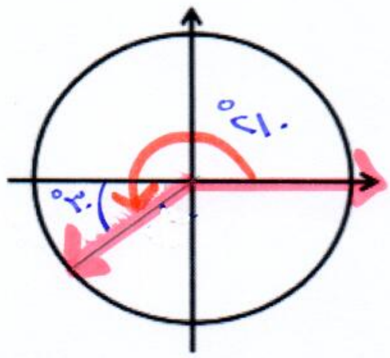
θ تقع في الربع الثاني

∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = ١٨٠° - \theta$

$= ١٨٠° - ١٧٠°$

$= ١٠°$

(ب) $٢١٠°$



$\theta = ٢١٠°$

θ تقع في الربع الثالث

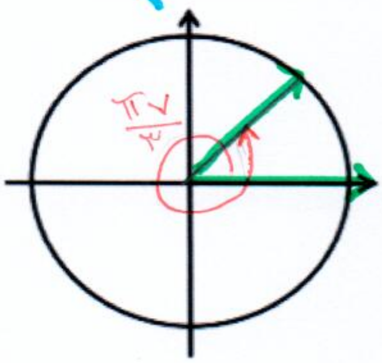
∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = \theta - ١٨٠°$

$= ٢١٠° - ١٨٠°$

$= ٣٠°$

H.L.

(جـ) $\frac{7\pi}{3}$



$\theta = \frac{7\pi}{3}$

θ تقع في الربع الأول

$\theta = \frac{7\pi}{3} - 2\pi$

$\theta = \frac{1}{3}\pi$

$\therefore \alpha = \theta = \frac{1}{3}\pi$

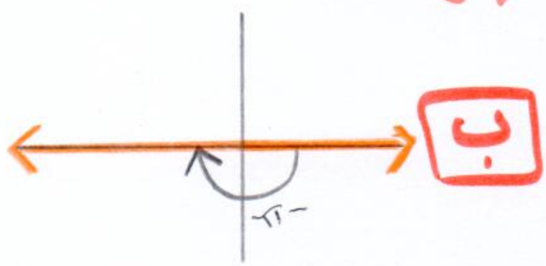
{٣} في أي ربع أو علي أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا التالية :

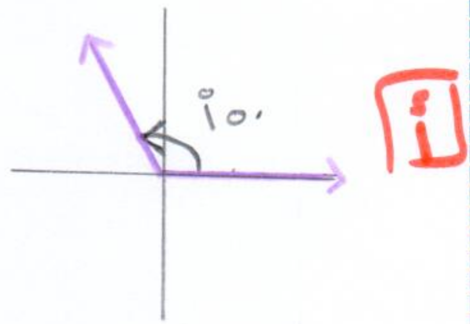
(أ) ١٥٠° الربع الثاني

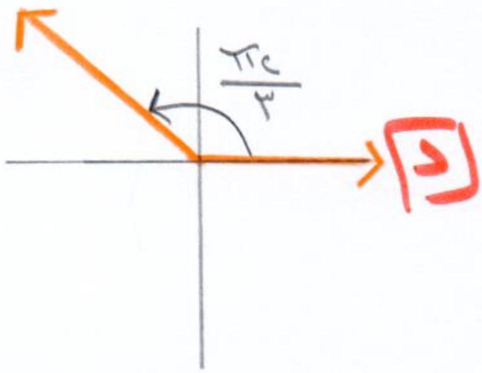
(ب) $-\pi$ على محور السينات السالب

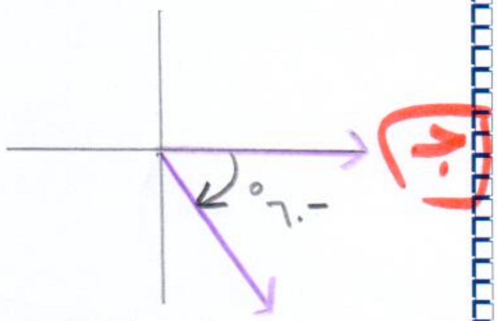
(جـ) − ٦٠° الربع الرابع

(د) $\frac{2\pi}{3}$ الربع الثاني









H.L.

درس (٨ □ ٢)

{١} أوجـــد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(أ) جـا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°)
= جا ٣٠°
= $\frac{١}{٢}$

(ب) ظـا (- ٢٢٥°) = - ظا ٢٢٥°
= - ظا (١٨٠° + ٤٥°)
= - ظا ٤٥°
= - ١

(جـ) جتـا (- ١٣٥°) = جتا ١٣٥°
= جتا (١٨٠° - ٤٥°)
= - جتا ٤٥°
= - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(د) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = جتا (π + $\frac{\pi}{٦}$)
= - جتا $\frac{\pi}{٦}$
= - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) جا $\left(- \frac{٢\pi}{٣}\right)$ = - جا (π - $\frac{\pi}{٣}$)
= - جا ($\frac{\pi}{٣}$)
= - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(و) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ = ظا (٢π - $\frac{\pi}{٦}$)
= - ظا ($\frac{\pi}{٦}$)
= - $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(ح) جـا ٣٩٠° = جا (٣٦٠° + ٣٠°)
= جا ٣٠°
= $\frac{١}{٢}$

(ي) قتـا ٤٥٠° = قتا (٣٦٠° + ٩٠°)
= قتا ٩٠°
= ١

{٢} اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدي النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ :

(أ) جـا $(\pi + \theta)$ = ـ جا θ

(ب) جتـا $(\pi - \theta)$ = ـ جتا θ

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتا θ

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جا θ

(هـ) ظـا $(١٨٠^\circ - س)$
= ـ ظا س

(و) جتـا $(١٨٠^\circ + س)$
= ـ جتا س

(ح) جـا (ـ س) = ـ جا س

(ي) ظتـا $(\pi + \theta)$ = ظتا θ

(م) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = قا θ

(س) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = ـ ظا θ

H.L.

{٣} بسط التعبير التالي لأبسط صورة :

(أ) جا س + جا (٩٠° + س) + جا (١٨٠° + س) + جا (٩٠° − س)

= جاس + جتاس − جاس + جتاس

= ٢ جتاس

(ب) جتا($\pi - \theta$) − جتا($-\theta$) + جا($\pi + \theta$) + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

= − جتاθ − جتاθ − جاθ + جاθ

= −٢ جتاθ

(جـ) جا($\pi + \theta$) − جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا($\pi - \theta$) + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

− جاθ + جاθ − جتاθ + جتاθ

= صفر

H.L.

{٤} حل كلاً من المعادلات التالية :

(أ) جتاس $= \frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

أو

س = $-\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

(ك ∈ ص)

(ب) ٢ جاس $= \sqrt{٢}$

$\frac{٢ \text{ جا س}}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π

أو س = $(\pi - \frac{\pi}{٤})$ + ٢ك π

س = $\frac{٣}{٤}\pi$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

(جـ) $\sqrt{٣}$ ظاس = ١

$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٦}$

∵ ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ك π

أو

س = $(\pi + \frac{\pi}{٦})$ + ك π

س = $\frac{٧}{٦}\pi$ + ك π

(ك ∈ ص)

(د) ظتاس $= \sqrt{٣}$

ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٦}$

∵ ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ك π

أو

س = $(\pi + \frac{\pi}{٦})$ + ك π

س = $\frac{٧}{٦}\pi$ + ك π

(ك ∈ ص)

H.L.

درس (٨ – ٣)

{١} اذا كانت : جتـــا $\theta = \frac{١}{٣}$ ، جـــا $\theta <$ ٠ ، أوجـــد : جـــاθ ، ظتـــا θ

جا²θ + جتا²θ = ١ (متطابقة فيثاغورث)

جا²θ + $(\frac{١}{٣})^2$ = ١

جا²θ + $\frac{١}{٩}$ = ١

جا²θ = ١ − $\frac{١}{٩}$

جا²θ = $\frac{٨}{٩}$

جاθ = $\sqrt{\frac{٨}{٩}}$

جاθ = $\pm\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

∵ جاθ < ٠

∴ جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

= $\frac{\frac{١}{٣}}{\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}}$

= $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

{٢} اذا كانت : جـــا $\theta = \frac{١}{٥}$ ، ٠ $< \theta < \frac{\pi}{٢}$

أوجـــد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ

جا²θ + جتا²θ = ١ (متطابقة فيثاغورث)

$(\frac{١}{٥})^2$ + جتا²θ = ١

$\frac{١}{٢٥}$ + جتا²θ = ١

جتا²θ = ١ − $\frac{١}{٢٥}$

= $\frac{٢٤}{٢٥}$

جتاθ = $\sqrt{\frac{٢٤}{٢٥}}$

= $\pm\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

∵ ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$

∴ جتاθ > ٠

جتاθ = $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$

= ٥

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{٥\sqrt{٦}}{١٢}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}}$

= $\frac{\sqrt{٦}}{١٢}$

ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$

= $\boxed{٢\sqrt{٦}}$

{٣} اذا كان : ظا θ = ٣/٤ ، جا θ < ٠ ، أوجد : جا θ ، جتا θ

ظا θ = ٣/٤

قا² θ = ١ + ظا² θ

قا² θ = ١ + (٣/٤)²

قا² θ = ٢٥/١٦

قا θ = √(٢٥/١٦)

∴ قا θ = ٥/٤ أو قا θ = -٥/٤

١/جتا θ = ٥/٤ أو ١/جتا θ = -٥/٤

جتا θ = ٤/٥ أو جتا θ = -٤/٥

∵ ظا θ > ٠

، جا θ < ٠

∴ جتا θ = -٤/٥

جا θ / جتا θ = ٣/٤

٤ جا θ = ٣ جتا θ

٤ جا θ = ٣ × -٤/٥

٤ جا θ = -١٢/٥

جا θ = (-١٢/٥) / ٤

جا θ = -٣/٥

{٤} اذا كان : ظا θ = ٢٤/٧ ، جتا θ < ٠ ، أوجد : جا θ ، جتا θ

ظا θ = ٢٤/٧

جا θ / جتا θ = ٢٤/٧

جا θ = ٢٤/٧ جتا θ —— (١)

∵ جا² θ + جتا² θ = ١ (متطابقة فيثاغورث)

(٢٤/٧ جتا θ)² + جتا² θ = ١

٥٧٦/٤٩ جتا² θ + جتا² θ = ١

٦٢٥/٤٩ جتا² θ = ١

جتا² θ = ١ / (٦٢٥/٤٩)

H.C.

جتا² θ = $\frac{٤٩}{٦٢٥}$

جتا θ = $\sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}}$

جتا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ أو جتا θ = $-\frac{٧}{٢٥}$ (مرفوضة)

∵ جتا θ > ٠

∴ جتا θ = $\frac{٧}{٢٥}$

س ① :

جا θ = $\frac{٢٤}{٧}$ جتا θ

جا θ = $\frac{٢٤}{٧} \times \frac{٧}{٢٥}$

∴ جا θ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

H.C.

{٥} اذا كان : جـا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتـا $\theta > ٠$ ، أوجـــد : ظتـاθ ، ظـا θ

باستخدام متطابقة فيثاغورث :

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

$(\frac{٣}{٧})^{٢}$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

$\frac{٩}{٤٩}$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

جتا$^{٢}\theta$ = ١ − $\frac{٩}{٤٩}$

جتا$^{٢}\theta$ = $\frac{٤٠}{٤٩}$

جتاθ = $\sqrt{\frac{٤٠}{٤٩}}$

جتاθ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$ أو جتاθ = $-\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$ (مرفوضة)

$\because$ جتا$\theta > ٠$

$\therefore$ جتاθ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

ظتاθ = $\frac{\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}}{\frac{٣}{٧}}$

ظتاθ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

ظاθ = $\frac{١}{\text{ظتا}\theta}$

= $\frac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$

{٦} **أثبت صحـــة كل من المتطابقات التالية :**

إبراهيم

(أ) جتـا^{٤}س + جـا^{٢}س × جتـا^{٢}س = جتـا^{٢}س

(ب) أثبت صحة المتطابقـــة : $\frac{(\text{قـا}\theta + ١)(\text{قـا}\theta - ١)}{\text{جـا}^{٢}\theta}$ = قـا$^{٢}\theta$ ، حيث المقام ≠ ٠

الإجابات

H.C.

٦ أ) $\text{جتا}^{4}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س} \times \text{جتا}^{2}\text{س} = \text{جتا}^{2}\text{س}$

الطرف الأيمن:

$$\text{جتا}^{4}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س} \times \text{جتا}^{2}\text{س} = \text{جتا}^{2}\text{س}\,(\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س})$$

$$= \text{جتا}^{2}\text{س} \times 1$$

$$= \text{جتا}^{2}\text{س}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

٦ ب) $\dfrac{(\text{قا}\,\theta + 1)(\text{قا}\,\theta - 1)}{\text{جا}^{2}\theta} = \text{قا}^{2}\theta$

الطرف الأيمن:

$$\frac{(\text{قا}\,\theta + 1)(\text{قا}\,\theta - 1)}{\text{جا}^{2}\theta} = \frac{\text{قا}^{2}\theta - \cancel{\text{قا}\,\theta} + \cancel{\text{قا}\,\theta} - 1}{\text{جا}^{2}\theta}$$

$$= \frac{\text{قا}^{2}\theta - 1}{\text{جا}^{2}\theta}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{2}\theta}{\text{جا}^{2}\theta}$$

$$= \text{ظا}^{2}\theta \times \frac{1}{\text{جا}^{2}\theta}$$

$$= \frac{\cancel{\text{جا}^{2}\theta}}{\text{جتا}^{2}\theta} \times \frac{1}{\cancel{\text{جا}^{2}\theta}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتا}^{2}\theta}$$

$$= \text{قا}^{2}\theta$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

H.L.

(جـ) $(\text{قا}^2\theta + \text{قتا}^2\theta) - (\text{ظا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta) = 2$

$\text{قا}^2\theta + \text{قتا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta = ?$

الطرف الأيمن:

$\text{قا}^2\theta + \text{قتا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta =$

$= \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{1}{\text{جا}^2\theta} - \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} - \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

$= \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} - \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{1}{\text{جا}^2\theta} - \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

$\frac{1-\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{1-\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} = 1+1 = 2$

∴ الطرفان متساويان

(د) $(1 - \text{جتا}^2\theta)(1 + \text{ظتا}^2\theta) = 1$

الطرف الأيمن:

$(1-\text{جتا}^2\theta)(1+\text{ظتا}^2\theta) = \text{جا}^2\theta \times \text{قتا}^2\theta$

$= \cancel{\text{جا}^2\theta} \times \frac{1}{\cancel{\text{جا}^2\theta}} = 1$

∴ الطرفان متساويان

(هـ) $1 + \text{ظتا}^2(-\theta) = \text{قتا}^2\theta$

الطرف الأيمن:

$1 + \text{ظتا}^2(-\theta) = 1 + \text{ظتا}^2\theta$

$= \text{قتا}^2\theta$

∴ الطرفان متساويان