

تمرين

1-6

التاريخ الميلادي:

التاريخ الهجري:

## مماس الدائرة

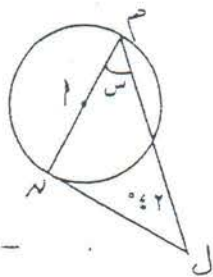
## Tangent of The Circle

## المجموعة الثمانية

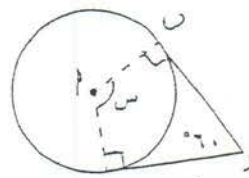
في التمرين (1-2)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، أوجد قيمة س.

∠ م ح س  
 ∠ م ح س نصف قطر  
 ∠ م (ل ك م) = 90°

$$\therefore 90 - 48 = 42$$



(2)

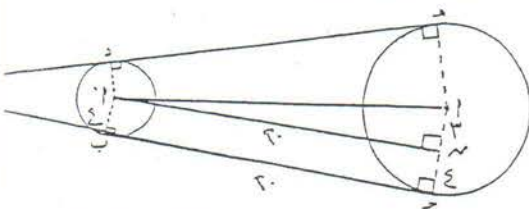


(1)  
 ∠ م ح س  
 ∠ م ح س نصف قطر  
 ∠ م (ل ك م) = 90°

$$\therefore \angle م (ل ك م) = 90 - 48 = 42$$

(3) يلف حزام حول الدائرتين كما في الشكل.

أثبت أن ب ج = د هـ.



الحل: ندر هـ ك، ح د ك حتى يتقاطعا في م

البرهان: ∠ م ح د، ∠ م ح د قطوعتان مماسات للدائرتين مركزهما P

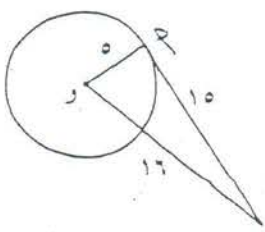
∠ م ح د، ∠ م ح د مماسات للدائرتين مركزهما P

بطرح ⑤ من ④ نرى د هـ = ح د

(4) في التمرين (3)، أوجد الم إذا كان أ ج = 7 سم، أ ب = 4 سم، ب ج = 20 سم.

$$\text{نرى } \overline{AP} \perp \overline{CH} \text{ في } \triangle PCH \text{ } \therefore \overline{PH} = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{360} = 18.97$$

في التمرين (5-6)، حدد ما إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التي مركزها O.



(6)

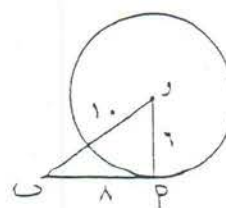
$$\angle م (ل ك م) + \angle م (ل ك م)$$

$$90 = 10 + 80$$

$$\angle م (ل ك م) = 80 = 10 + 70$$

$$\therefore \angle م (ل ك م) = 70 \neq 90$$

∴ المستقيم ليس مماساً للدائرة



(5)

$$\angle م (ل ك م) + \angle م (ل ك م)$$

$$100 = 18 + 82$$

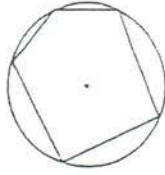
$$\angle م (ل ك م) = 82 = 18 + 64$$

$$\therefore \angle م (ل ك م) = 64 \neq 90$$

∴ المستقيم ليس مماساً للدائرة

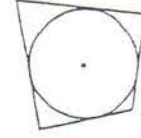
في التمرينين (٧-٨)، حدد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

(٨)



خارجي

(٧)



داخلي

في التمرينين (٩-١٠)، يحيط كل مضلع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

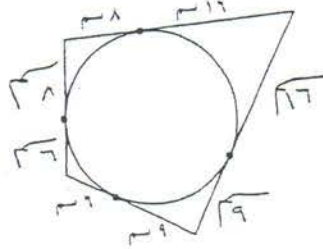
(١٠)

محيط المضلع

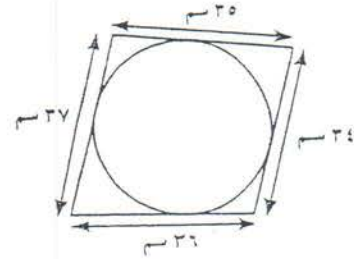
$$7+7+9+9=$$

$$11+11+8+8+$$

$$\sqrt{78}=$$



(٩)



$$\text{محيط المضلع} = 25+27+26+24 = 102$$

في التمرينين (١١-١٢)، ب ج مماس للدائرة. أوجد قيمة س (مقرئًا إجابتك لأقرب جزء من عشرة).

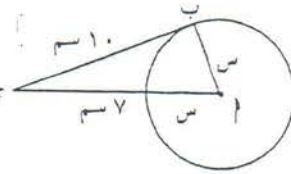
(١٢)

ب ج مماس، م نصف قطر

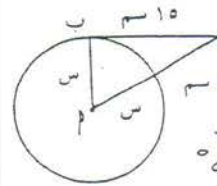
$$90^\circ = (\angle \text{ب ج م})$$

$$90^\circ = (\angle \text{ب ج م}) = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

$$90^\circ = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$



(١١)



ب ج مماس، م نصف قطر

$$90^\circ = (\angle \text{ب ج م})$$

$$90^\circ = (\angle \text{ب ج م}) = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

$$90^\circ = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

$$90^\circ = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

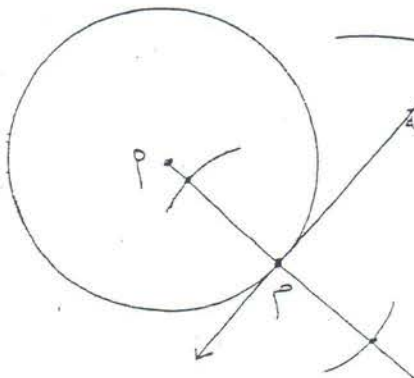
(١٣) يحيط شكل سداسي منتظم بدائرة طول قطرها ١٠ سم فإن محيط المضلع هو حوالي:

(د) ٥١,٧ سم

(ج) ٤٣,٣ سم

(ب) ٣٤,٦ سم

(أ) ٣٠ سم



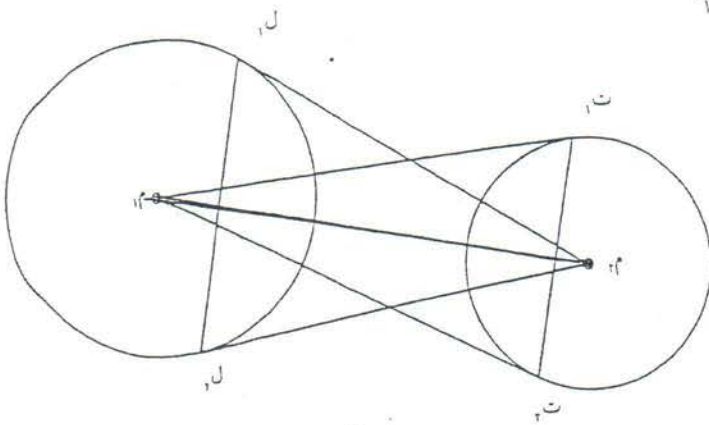
(١٤) الإنشاءات: ارسم دائرة مركزها م، ضع نقطة م على الدائرة.

أنشئ مماسًا على الدائرة في م مستخدمًا الفرجار ومسطرة غير مدرجة

م<sub>١</sub> ت<sub>١</sub> ، م<sub>١</sub> ت<sub>٢</sub> ماستان للدائرة التي مركزها م<sub>٢</sub>.

$\overline{M_1L_1}$ ،  $\overline{M_2L_2}$  مماسان للدائرة التي مركزها  $M$ .

أثبت أن  $T_1 T_2 // L_1 L_2$ .



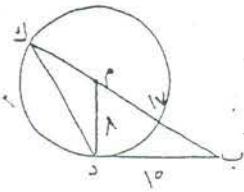
∴  $\overline{M_1} = \overline{M_2}$  محاسبه للدائره

$$m = \frac{0.01}{0.001} = 10$$
[illegible]
$$\frac{cd}{d} \parallel \overline{c_1 o_1} \therefore \angle c_1 n$$

(١٦) التحدي: ب د تمس الدائرة التي مركزها م. د ماس ماس ماس نصف قطر

ب د = ۱۵ سم، ب م = ۱۷ سم.      م (نقطه) = (۹۰)°

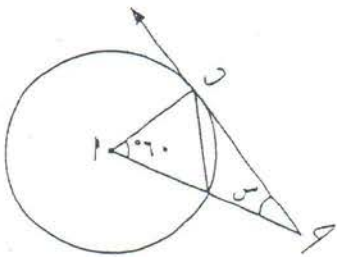
(أ) أوجد طول نصف قطر الدائرة.  $\therefore \text{نوع} = \sqrt{12^2 + 10^2} = 16$



(ب) أوجد مساحة المثلث ب ك د.  $\frac{1}{2} \times 5 \times 4$  له حاب

$$\lambda_{\lambda, \Sigma} = \frac{\lambda}{14} \times 50 \times 10 \times \frac{1}{c} =$$

المجموعه في بيان تحريريه



(١) المستقيم في الشكل المقابل مماس للدائرة، أوجد قيمة  $s$ .

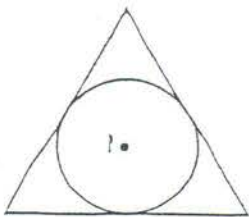
نہ ممانس ، مہ نصف قطر

$$^{\circ}9. = (D \cup P) \sim \therefore$$
$$^0r = ^6r - 9 = 5 \therefore$$

(٢) حدّد ما إذا كان المستقيم مماس للدائرة.

$$\Sigma_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^0} = \mathcal{C} + \mathcal{C}^0 = \mathcal{C}(D) \neq \mathcal{C}(P)$$
$$\Sigma \zeta, \zeta_0 = (\zeta, 0) = (\perp p),$$
$$^0q = (p \cup q) \therefore$$

(٣) حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمثلث (داخلية) أو محيطية بمثلث (خارجية).



داخله




$${}^0q = (\hat{p} \cup p) \text{ و } \therefore$$

$$179 = {}^c_{15} + {}^c_0 = {}^c_0 \rightarrow \therefore$$

(٥) في الشكل المقابل، أوجد  $\angle$  (أ د ج)، و  $\angle$  (هـ أ د)

لے و محاسن و نصف قطر

$$\therefore m(\hat{P} \cup \hat{Q}) = 90^\circ \quad \text{اور} \quad m(\hat{P} \cap \hat{Q}) = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

∴  $\phi = 70^\circ$  بالتقابل بالرأس  
∴  $\phi = 70^\circ$   $\therefore \phi = 70^\circ$

$$^{\circ}o. = (\overset{\circ}{7}o + \overset{\circ}{7}o) - \overset{\circ}{1}A. = (5P\hat{e})_o.$$

(٦) في الشكل المقابل دائرة د، تحيط خارجاً بالمربع أب ج د ودائرة د،

محاطة خارجاً بالمربع أب ج د.

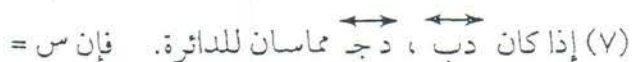
أثبت أن مساحة الدائرة د<sub>1</sub> تساوي مثل مساحة الدائرة د<sub>2</sub>.

نصف قطر الدائرة  $د = ١ =$  نصف  $٧ = ٧$

الدائرة د = نصف = ح

$$C = \frac{(\pi - \pi_0)}{\pi} = \frac{\pi_1 - \pi_0}{\pi_1 - \pi_0} = \frac{\text{صاحب لیا کرہ ۱۰}}{\text{صاحب لیا کرہ ۲۰}}$$

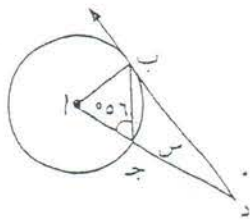
$$x = \frac{1}{2} \text{ صبر لائزہ دے}$$



٠١١٤ (د)      [ ٠٦٦ (ج) ]      ٠٥٧ (ب)      ٠٢٦ (ا)

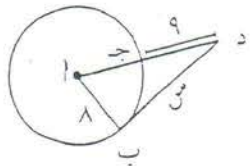






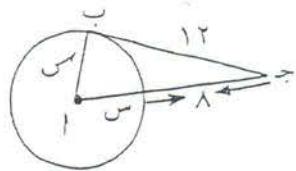
(٨) إذا كان  $\overleftrightarrow{DB}$  مماس للدائرة. فإن  $\overleftrightarrow{DB} =$

(أ) ٥٢٢ (ب) ٥٢٨ (ج) ٥٣٤ (د) ٥٤٠



(٩) إذا كان  $\overleftrightarrow{DB}$  مماس للدائرة. فإن  $\overleftrightarrow{DB} =$

(أ) ٨ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ١٧



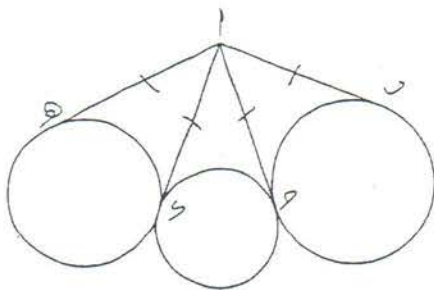
(١٠) إذا كان  $\overleftrightarrow{DB}$  مماس للدائرة. فإن  $\overleftrightarrow{DB} =$

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(١١) يبين الشكل ٤ قطع مماسية من نقطة مشتركة A إلى ٣ دوائر. ما الذي يمكنك استنتاجه حول أطوال القطع الأربع؟ فسر.

∴  $AP = CP = BP = DP$

∴  $AP = CP = BP = DP$



$\overline{AP}$  مماس،  $\overline{CP}$  مماس،  $\overline{BP}$  مماس،  $\overline{DP}$  مماس

∴  $AP = CP = BP = DP$  وباطل من (س)  $\hat{A} = 90^\circ$

(أ) أوجد قيمة س.

$$س = 360 - (90 + 90 + 90) = 81$$

(ب) أوجد محيط الرباعي BACD.

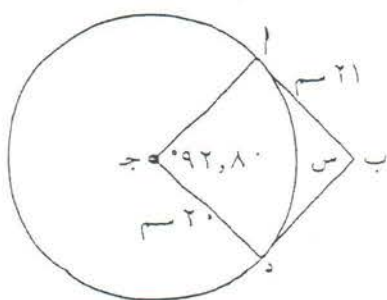
$$س = 81 + 81 + 81 + 81 = 324$$

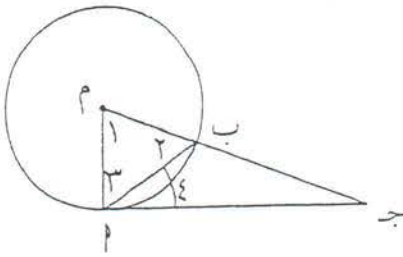
محيط الرباعي

(ج) أوجد B.

في  $\triangle ABC$

$$س = 180 - (90 + 90) = 0$$





في التمرينين (١٣ - ١٤). أوجد مماس للدائرة في أ. ن. (١) = ٥٧٠.

(١٣) أوجد ن. (٤). مماس مماس مماس نصف قطر

$$\therefore \text{ن. (ح. م. م)} = ٩٠$$

$$\text{ن. (أ)} = ٧٠$$

$$\therefore \text{ن. (ب)} = \frac{٧٠ - ١٨٠}{٢} = ٥٥$$

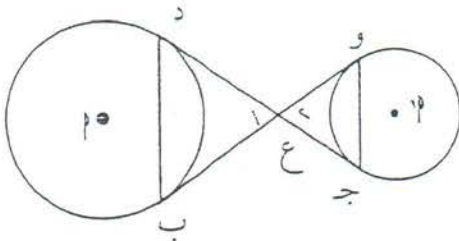
$$\therefore \text{ن. (ج)} = ٩٠ - ٥٥ = ٣٥$$

(١٤) إذا كان ن. (١) = س، فأوجد ن. (٤) بمعلومية س.

$$\text{ن. (أ)} = س$$

$$\text{ن. (ب)} = \frac{٧٠ - ١٨٠}{٢} = ٩٠ - \frac{٧٠}{٢}$$

$$\text{ن. (ج)} = \frac{٧٠}{٢} = \frac{٧٠}{٢} + ٩٠ - ٩٠ = \frac{٧٠}{٢}$$



(١٥) في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين ع ب د، ع وج.

$$\overline{ع و} \parallel \overline{ع د} \text{ مماسات للدائرتين}$$

$$\therefore \overline{ع و} = \overline{ع د} \quad \therefore \frac{ع و}{ع د} = ١$$

$$\overline{ع د} \parallel \overline{ع و} \text{ مماسات للدائرتين}$$

$$\therefore \overline{ع د} = \overline{ع و} \quad \therefore \frac{ع د}{ع و} = ١$$

فيها  $\Delta ع و د \sim \Delta ع د و$  بالتقابل بالرأس

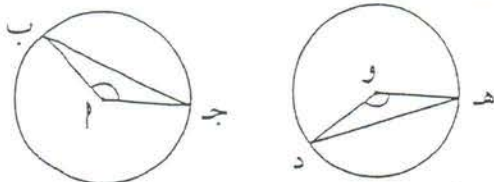
$$\frac{ع د}{ع و} = \frac{ع و}{ع د}$$

$$\therefore \Delta ع و د \sim \Delta ع د و$$

## الأوتار والأقواس Chords and Arcs

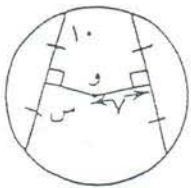
### المجموعة الأولى من التمارين

(١) ماذا تستنتج من تطابق الدائرتين وتطابق الزاويتين و، ١ في الشكل المقابل؟



نم (و) = نم (م)  $\therefore$  هـ د = ح ب  
نم (هـ) = نم (ح)  $\therefore$  هـ د = ح ب

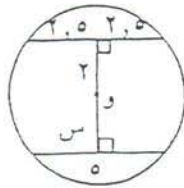
(٢) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:



(ج)

الموتر = الموتر  
للبعد = البعد

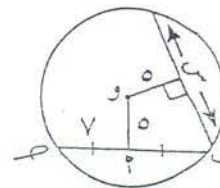
$$\therefore 10 = 7 + 3$$



(ب)

الموتر = الموتر  
للبعد = البعد

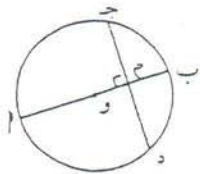
$$\therefore 2 = 5 - 3$$



(أ)

د م = ح ب  
و م  $\perp$  ح د  
للبعد = البعد

$$\therefore 10 = 7 + 3$$

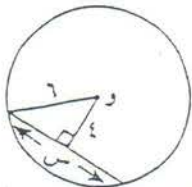


(٣) مستخدمًا الشكل المقابل أكمل ما يلي:

معطى: أ ب قطر الدائرة، أ ب  $\perp$  ج د. ماذا تستنتج؟

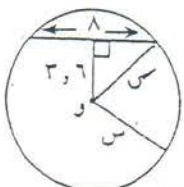
$$\widehat{د ب} = \widehat{ب د} \text{ ، } د م = م ح$$

(٤) أوجد قيمة س في كل من الأشكال التالية:



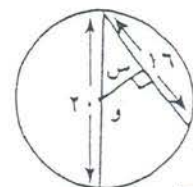
(ج)

$$س = 90 - 6 - 4 = 80$$



(ب)

$$س = 90 - 3 - 6 = 81$$



(أ)

$$س = 90 - 2 - 16 = 72$$

(٥) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أ ب.

$$\therefore \widehat{د ب} = 45^\circ$$

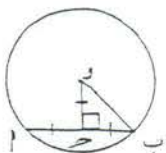
$$\therefore \widehat{م د} = 90^\circ$$

$$\therefore \widehat{م ب} = 90^\circ$$

$$\widehat{م د} \perp \widehat{م ب}$$

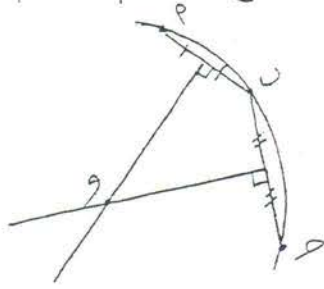
$$\therefore \widehat{م د} = \widehat{م ب}$$

$$\therefore \widehat{د ب} = \widehat{م د}$$





\* (٦) علم الآثار: وجد عالم آثار قطعاً صغيرة من طبق دائري الشكل. اشرح كيف يستطيع هذا العالم استخدام قطعة واحدة لإيجاد مركز وطول نصف قطر هذا الطبق الدائري.



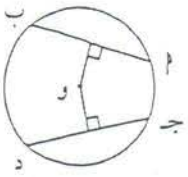
أختر ٣ نقاط P، Q، R على طرفي القطع

ثم نرسم محاوراً لكل من PQ، QP، ينقطعان في O

وهي مركز هذا القطع الدائري

طوله OM هو طول نصف قطر الدائرة

(٧) تحليل الخطأ: نظر سلطان إلى الشكل المقابل واستنتج أن  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ . ما الخطأ في استنتاجه؟  
الخطأ أن البعد  $\neq$  البعد



(٨) A، B مركزا دائرتين متطابقتين. جد وتر مشترك للدائرتين.

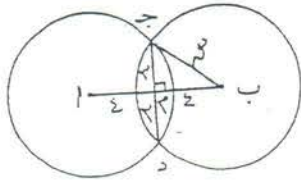
(أ) إذا كان  $\overline{AB} = 8$  سم،  $\overline{CD} = 6$  سم. فما طول نصف القطر؟

$$\overline{CP} \perp \overline{CD} \quad \text{،} \quad \overline{CP} = \overline{DP} = \overline{CP} = \overline{DP} = 3$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{CP} + \overline{DP} = 3 + 3 = 6$$

(ب) إذا كان  $\overline{AB} = 24$  سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول  $\overline{CD}$ ؟

$$\overline{CD} = 2 \times \sqrt{13^2 - 12^2} = 2 \times 5 = 10$$



(٩) في الشكل المقابل،  $\overline{AB} = 16$  سم،  $\overline{OS} = 6$  سم. أوجد:

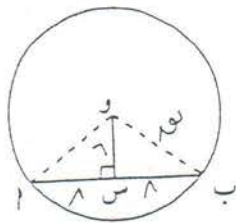
(أ) طول نصف قطر الدائرة؟  $\overline{OS} \perp \overline{CP}$   $\therefore \overline{OS} = \overline{OS} = \overline{OS} = \overline{OS} = 8$

$$\therefore \overline{CP} = \sqrt{16^2 - 6^2} = 15$$

(ب) قياس القوس الصغير  $\widehat{AB}$ .

$$\text{م (ب وس)} = \widehat{CPA} = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ \therefore \text{م (ب وس)} = 65^\circ + 65^\circ = 130^\circ$$

$$\therefore \text{م (ب وس)} = 130^\circ$$



(١٠) تفكير ناقد: طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم، وطول وترين لهذا القطر ٦ سم و ١٦ سم.

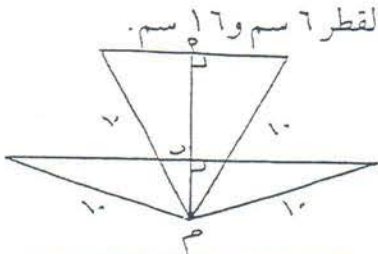
أوجد أقصر مسافة بين الوترين لأقرب جزء من عشرة من السمت.

(أ) إذا كان الوتران في جهة واحدة من المركز.

$$\overline{CP} = \sqrt{10^2 - 3^2} - \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 - 8 = 0$$

(ب) إذا كان الوتران في جهتين مختلفتين من المركز.

$$\overline{CP} = \sqrt{10^2 - 3^2} + \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 + 8 = 16$$



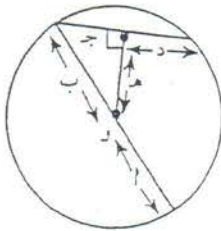
(١١) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريباً :

(أ) ٩ سم (ب) ٦, ٩ سم (ج) ١٨ سم (د) ٢, ١٩ سم

$$\text{البعد} = \sqrt{(\frac{25}{2})^2 - (\frac{16}{2})^2} = \sqrt{9} = 3$$

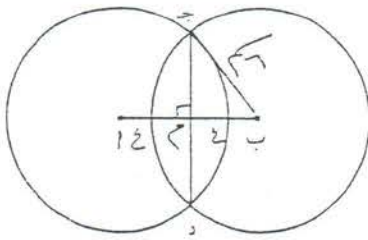
(١٢) البعد بين مركز الدائرة ووتر طوله ٩ سم يساوي ١١ سم تقريباً. أوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب عدد كلي.

$$\text{نصف قطر} = \sqrt{11^2 + (\frac{9}{2})^2} \approx 12 \text{ سم}$$



(١٣) أي مما يلي لا تستطيع استنتاجه من الرسم المقابل؟

(أ) ج = د (ب) ب = هـ (ج) ج = هـ + د (د) د = هـ



(١٤) دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين ج، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول أ ب يساوي ٨ سم.

$$\overline{CP} \perp \overline{AM} \text{ ونصفه}$$

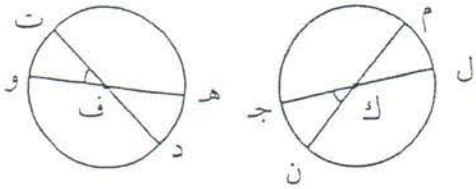
$$\overline{CP} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\sqrt{5} \times 2 = 4\sqrt{5}$$

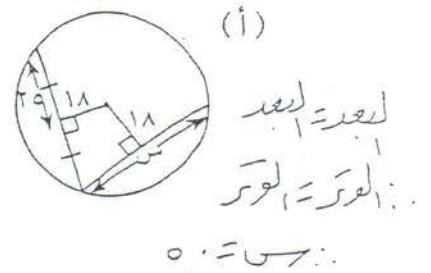
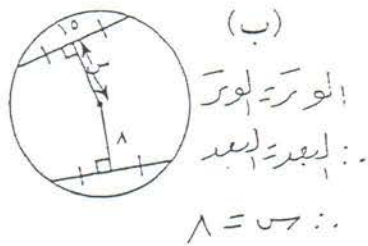
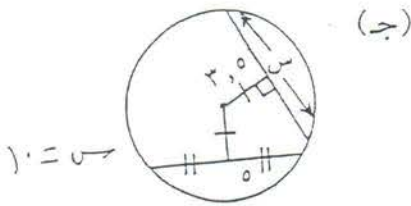
## المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) ماذا تستنتج من تطابق الدائرتين وتطابق الزاويتين كما في الشكل المقابل؟

و (م ن) = و (ل م) = و (ه ز) = و (و ع)



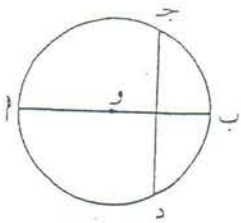
(٢) أوجد قيمة  $s$  في الأشكال التالية:



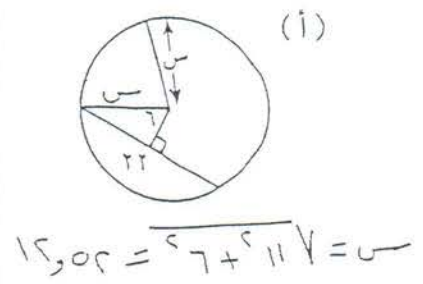
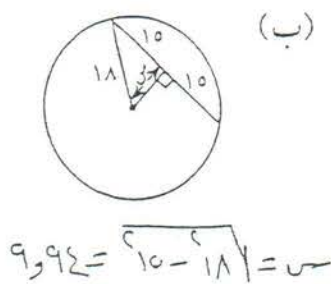
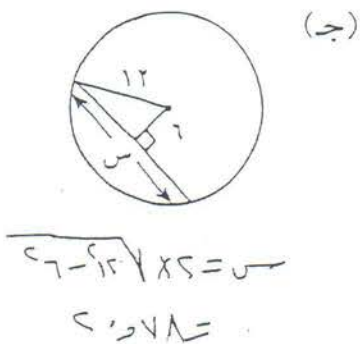
(٣) مستخدماً الشكل المقابل، املأ الفراغ بما هو مناسب.

معطی:  $\overline{AB}$  منصف عمودی  $\overline{AC}$ ۔

∴ یمر آب بہ حرکن الدارۃ



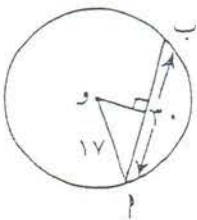
(٤) أوجد قيمة  $s$  في كل من الأشكال التالية:



(٥) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر  $\widehat{AB}$ .

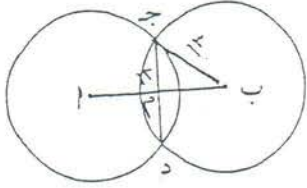
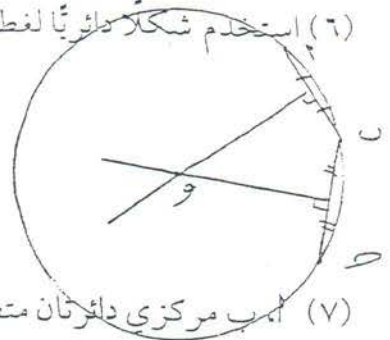
$$^0 1 \text{ r } 10 = \frac{10^1}{1} \bar{c} \times r = (\hat{c} p) \sim$$

$$123, 10 = (10P) \therefore$$





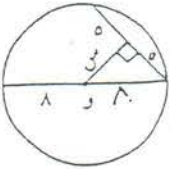
(٦) استخدم شكلاً دائرياً لغطاء عبوة مشروب غازي لرسم دائرة، حدّد مركز هذه الدائرة.  
 نأخذ ٣ نقاط  $P, C, D$  على محيط لغطاء (الدائرة)  
 نرسم ٣ محاور لكل من  $PC, CD, DP$ ،  $PC$  يتقاطعا في  $O$   
 وهي مركز الدائرة



(٧)  $AB$  مركزية دائرتان متطابقتان. جد وتر مشترك لكلا الدائرتين.  
 إذا كان طول نصف القطر يساوي ١٣ سم، جد  $AB = ٢٤$  سم. فما طول  $AB$ ؟  
 $CP \perp AB$

$$CP = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore AB = 5 \times 2 = 10 \text{ سم}$$



(٨) في الشكل المقابل، أوجد قيمة  $s$  إلى أقرب جزء من عشرة.

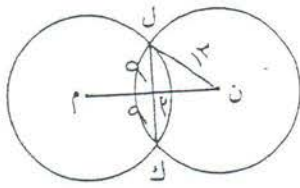
$$s = \sqrt{50 - 48} = 2$$

(٩) طول نصف قطر دائرة يساوي ٨، ١٠ سم، وطول الوتر ١٢ سم. ما البعد بين مركز الدائرة والوتر؟

$$\text{البعد} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

(١٠) في الشكل أدناه،  $N$  مركزية دائرتان متطابقتان. طول نصف قطر كل دائرة يساوي ١٣ سم،  $L$  ك وتر مشترك للدائرتين، حيث  $LK = ١٨$  سم. أوجد طول  $MN$

علّمنا بأن القطعة  $LK \cap MN = \{O\}$ .



$$MN \perp LO$$

$$MN = \sqrt{13^2 - 9^2} = 10$$

$$MN = 10 \times 2 = 20$$

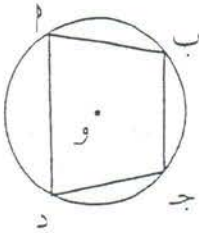
تمرّن  
٣-٦

التاريخ الميلادي:

التاريخ الهجري:

## الزوايا المركزية والزوايا المحيطية Central Angles and Inscribed Angles

### المجموعة ١: تمارين أساسية



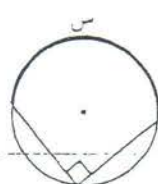
(١) في الشكل المقابل، سمّ الزوايا المحيطية.

(A, B, C, D), (A, C, D), (A, B, D), (B, C, D)

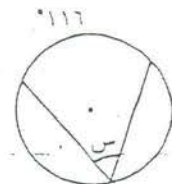
(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:



(ج)



(ب)



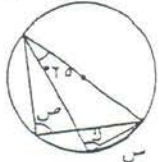
(أ)

$$\text{س} = 36 - (60 + 82) = 118$$

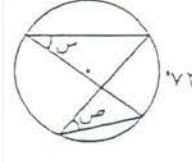
$$\text{س} = 109 - 118 \times \frac{1}{2} = 109$$

$$\text{س} = 90 \times \frac{1}{2} = 45$$

$$\text{س} = 116 \times \frac{1}{2} = 58$$



(هـ)



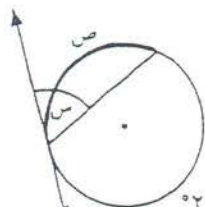
(د)

$$\text{س} = 90$$

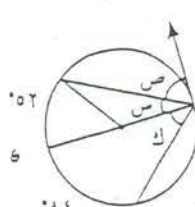
$$\text{س} = 50 \times \frac{1}{2} = 25$$

$$\text{س} = 72 \times \frac{1}{2} = 36$$

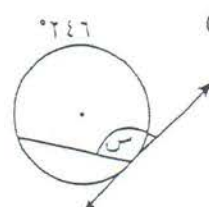
(٣) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن المستقيم في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.



(ج)



(ب)



(أ)

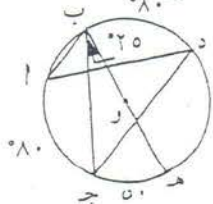
$$\text{س} = 36 - 230 = 130$$

$$\text{س} = 130 - 130 \times \frac{1}{2} = 130$$

$$\text{س} = 84 \times \frac{1}{2} = 42$$

$$\text{س} = 84 - 90 = 6$$

$$\text{س} = 123 - 246 \times \frac{1}{2} = 123$$



(٤) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:

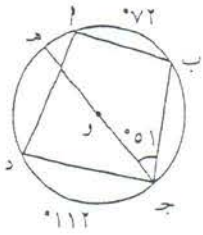
$$\text{س} = 40$$

$$\text{س} = 50$$

$$\text{س} = 40$$

$$\text{س} = 130 \times \frac{1}{2} = 65$$

$$\text{س} = 60$$



(٥) في الشكل المقابل، أوجد قياس: القوس الأصغر بـ جـ ، نـ (بـ) ، نـ (بـ جـ د) .

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2}(112 + 72) = 92^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180 - 92 = 88^\circ$$

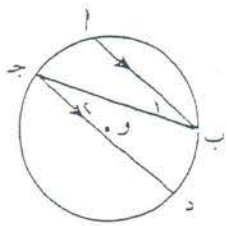
$$\widehat{AC} = 100^\circ$$

$$\widehat{BD} = 180 - 100 = 80^\circ$$

$$\widehat{BC} = \frac{1}{2}(92 + 88) = 90^\circ$$

$$\widehat{AD} = 360 - (92 + 88 + 80 + 80) = 120^\circ$$

$$80 =$$



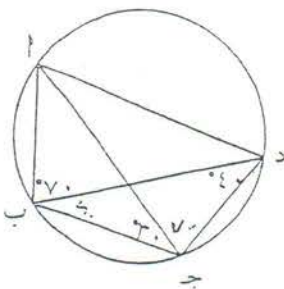
(٦) ارسم الوتر بـ جـ . اشرح لماذا  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$  .  
 $\widehat{AB} \parallel \widehat{CD}$   $\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}$  بالتبادل

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$$

(٧) ما نوع شبه المنحرف المحاط بدائرة؟ اشرح.

شبه منحرف متساوي الساقين لأن كوازي القاعدتين يعني كذا هو الساقين



(٨) أوجد نـ (جـ بـ د) .

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} = 70^\circ$$

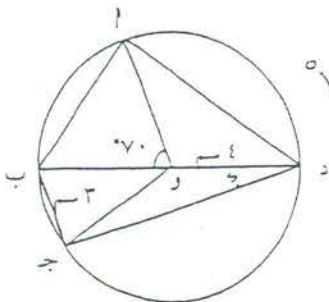
$$\widehat{AC} = 180 - (70 + 70) = 40^\circ$$

(٩) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة. أوجد:

$$\widehat{AB} = 70 \times \frac{1}{2} = 35^\circ$$

$$\widehat{CD} = 70^\circ, \widehat{AD} = 110^\circ$$

$$\widehat{BC} = \frac{360 - 70 - 70 - 110}{2} = 55^\circ$$

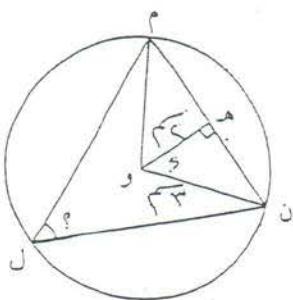


(١٠) مستخدمًا معطيات الشكل، حيث و هي مركز الدائرة،

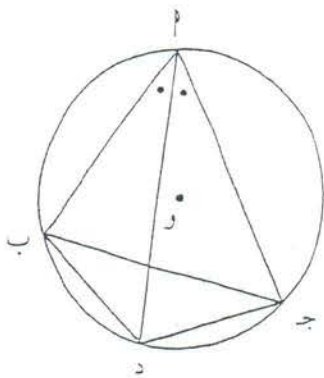
و هـ = ٢ سم، ن و = ٣ سم. أوجد:

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} = 48^\circ$$

$$\widehat{AC} = \frac{1}{2}(48 + 48) = 48^\circ$$

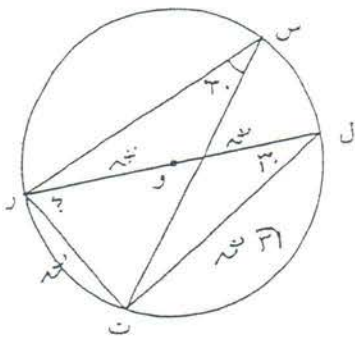






١١) في الشكل المقابل،  $\widehat{AP}$  منصف الزاوية  $\widehat{A}$ .  
 (أ) أثبت أن المثلث ب ج د متطابق الضلعين.  
 (ب) ماذا يمكننا أن نقول عن  $\Delta$  ب ج د إذا كان  $\Delta$  ب ج قائم الزاوية في أ؟  
 $\Delta$  ب ج د متساوي الساقين.

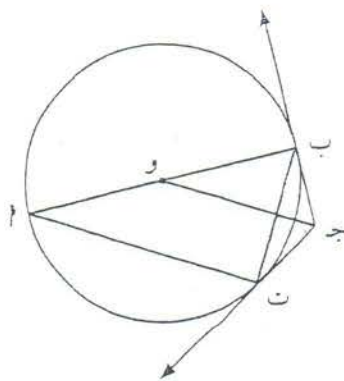
$\Delta$  ب ج د قائم الزاوية في د



١٢) مستخدماً معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:  
 (أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟ كائمه الزاوية في ت  
 (ب) أوجد  $\angle$  (ل ر ت). قوس (ل ر ت) = ٣٠°  
قوس (ل ر ت) = ٦٠°

(ج) أوجد محيط  $\Delta$  ر ل ت بدلالة قوس.

محيط  $\Delta$  ر ل ت = قوس ر + قوس ل + قوس ت = ٣٦ + ٣٠ = ٦٦ قوس

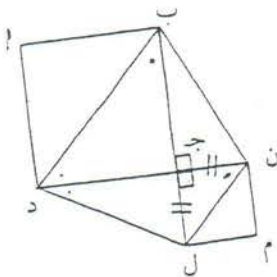


١٣)  $\overline{AB}$  قطر في دائرة مركزها و. ج ب، ج ت مماسان للدائرة يتقاطعان في ج.  
 أثبت أن  $\overline{AT} \parallel \overline{OJ}$ . (إرشاد: صل و ت أ و ب ت)  
 $\overline{AT} \perp \overline{OT}$ ،  $\overline{AT} \perp \overline{OT}$ ،  $\overline{AT} \perp \overline{OT}$ ،  $\overline{AT} \perp \overline{OT}$   
قوس (ب ت ق) = ٩٠°،  $\overline{AT} \perp \overline{OT}$ ،  $\overline{AT} \perp \overline{OT}$

١٤) التفكير المنطقي: أ ب ج د، م ن ج ل مربعان حيث ج  $\exists$  ن د.

هل ب د ل ن هو رباعي دائري؟

فتر إجابتك.



قوس (ل ر ت) = قوس (ل ر ت) = ٩٠°

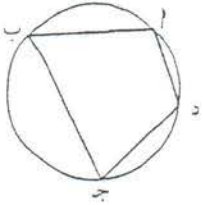
وهما مربع متساوي الساقين (مماسين على الدائرة)

الشكل ب د ل ن هو رباعي دائري

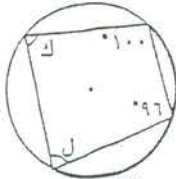
## المجموعة ب تمارين تعريزية

(١) في الشكل المقابل، سمّ زوجاً من الزوايا المتكاملة.


$\hat{A}$  و  $\hat{C}$  ،  $\hat{B}$  و  $\hat{D}$  متكاملتان



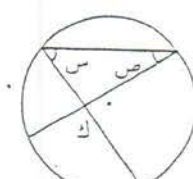
(٢) أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كل من الأشكال الهندسية التالية:

(ج) 

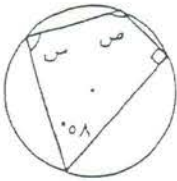
$$\begin{aligned} \text{ل} &= 80^\circ \\ \text{د} &= 84^\circ \\ \text{س} &= 99 - 90 = 9^\circ \\ \text{ص} &= 96 - 84 \times 2 = 6^\circ \end{aligned}$$

(ب) 

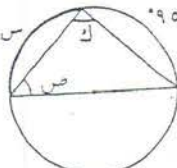
$$\begin{aligned} \text{س} &= 180 - 78 = 102^\circ \\ \text{ص} &= 112^\circ \\ \text{ص} &= 120 - (78 \times 2 + 104) = 12^\circ \\ \text{ل} &= 38^\circ = 102 - 71 \times 2 \end{aligned}$$

(أ) 

$$\begin{aligned} \text{س} &= \frac{108}{2} = 54^\circ \\ \text{ص} &= \frac{60}{2} = 30^\circ \\ \text{ل} &= (30 + 54) - 180 = 96^\circ \end{aligned}$$

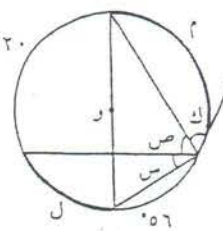


(هـ)  $\text{س} = 90^\circ$   
 $\text{ص} = 180 - 58 = 122^\circ$

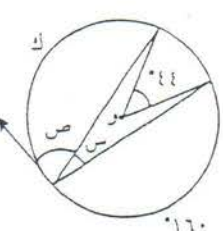
(د) 

$$\begin{aligned} \text{ل} &= 90^\circ \\ \text{ص} &= 270 - 90 = 180^\circ \\ \text{س} &= 90 - 180 = 90^\circ \end{aligned}$$


(٣) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل شكل يمثل مماساً للدائرة.

(ج) 

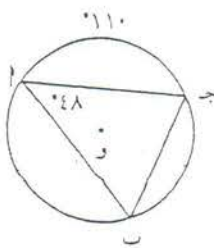
$$\begin{aligned} \text{ص} &= 60^\circ \\ \text{س} &= 30^\circ \\ \text{م} &= 360 - (120 + 56 + 60) = 124^\circ \\ \text{ل} &= 60 - 30 \times 2 = 0^\circ \\ \text{ل} &= 124 \times \frac{1}{2} = 62^\circ \end{aligned}$$

(ب) 

$$\begin{aligned} \text{س} &= 22 \times \frac{1}{2} = 11^\circ \\ \text{ص} &= 90 - 11 = 79^\circ \\ \text{ل} &= 106^\circ = 79 \times 2 \end{aligned}$$

(أ) 

$$\begin{aligned} \text{س} &= 180 - 110 = 70^\circ \\ \text{ص} &= 60 \times 2 = 120^\circ \end{aligned}$$



(٤) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدماً الشكل المقابل.

(أ)  $\text{ص}(\widehat{B}) = 96^\circ$  (ب)  $\text{ص}(\widehat{B}) = 110 \times \frac{1}{2} = 55^\circ$   
 (ج)  $\text{ص}(\widehat{C})$  (د)  $\text{ص}(\widehat{A}) = 44 \times 2 = 88^\circ$   
 $\text{ل} = 104^\circ$   
 $\text{ل} = (55 + 88) - 180 = 47^\circ$

(٥) في الشكل المقابل،  $\angle (أ ب) = ٥٧٢^\circ$ ،  $\angle (ب ج هـ) = ٥٥١^\circ$  أوجد قياس القوس هـ أ.

$$\text{م (هـ أ)} = ٣٦٠ - ٥١٨٢ = ٤٩^\circ$$



(٦) هل كل متوازي أضلاع يكون رباعي دائري؟ فسر إجابتك..

لا، لأنه في متوازي الأضلاع كل زاوية متساوية لبعدها، ولأنه يلزم تساوي الأضلاع

رباعي دائري، والزاوية تكون كل زاوية متساوية = ٩٠°

(٧) في الرسم المقابل،  $\angle (ب د) = ١٤٠^\circ$  أوجد  $\angle (أ ب ج)$ .

$$\text{م (ب د)} = ٧^\circ \quad \text{م (أ ب ج)} = ١٨^\circ - (٧^\circ + ٥٤^\circ) = ٥٦^\circ$$

$$\text{م (أ ب ج)} = ٥٦^\circ$$

(٨) أوجد قيمة كل من الزاوية المجهولة في الشكل المقابل.

$$\text{س} = ١٤٠^\circ$$

$$\text{ص} = ٧٠^\circ$$

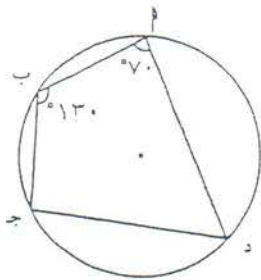
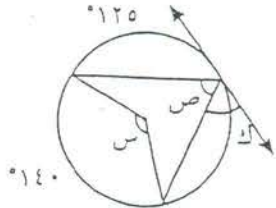
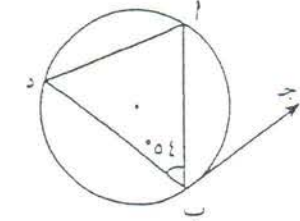
$$\text{ل} = ٩٥^\circ \times \frac{١}{٢} = ٤٧^\circ ٥٠'$$

(٩) أ ب ج د رباعي دائري (محوط بدائرة).  $\angle (أ ب) = ٧٠^\circ$ ،  $\angle (ب ج) = ١٣٠^\circ$ .

أوجد  $\angle (ج د)$ ،  $\angle (د أ)$ .

$$\text{م (ج د)} = ١٨٠^\circ - ٧٠^\circ = ١١٠^\circ$$

$$\text{م (د أ)} = ١٨٠^\circ - ١٣٠^\circ = ٥٠^\circ$$



(٣)  $\Delta$  أ ب ج متطابق الأضلاع تحيط به دائرة. أثبت أن المماسات على

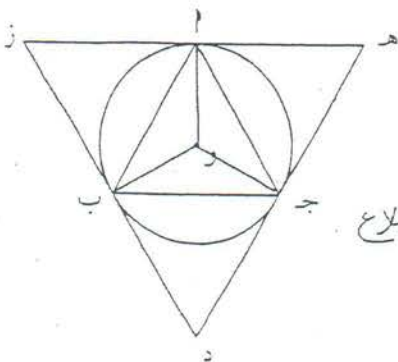
الدائرة في النقاط أ، ب، ج تشكل مثلثاً متطابق الأضلاع.

$$\text{م (أ ب)} = \text{م (ب ج)} = \text{م (ج أ)} = ٦٠^\circ \quad \text{زاوية المثلث أ ب ج}$$

$$\text{م (أ ب ج)} = \text{م (ب ج د)} = \text{م (ج د أ)} = ١٢٠^\circ \quad \text{م (أ ب ج د) متطابق الأضلاع}$$

$$\text{م (أ ب ج د)} = \text{م (ب ج د أ)} = \text{م (ج د أ ب)} = ٦٠^\circ$$

$$\Delta \text{ هـ ز د متطابق الأضلاع}$$

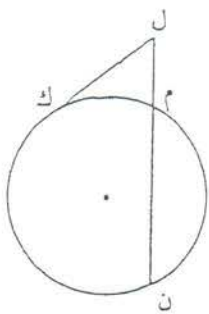




الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

المجموعة / تمارين أساسية



(٢) في الشكل المقابل لك مماس

الدائرة

ل ك = ٨ ؛ ل م = ٤ .

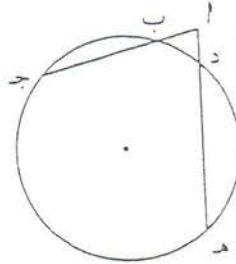
أوجد: م ن .

(ل م) = ل م × م ن

٨ × ٤ = م ن

١٢ = م ن

١٦ = م ن



(١) في الشكل المقابل:

أ ب = ٢٠ ، ب ج = ١٥

أ د = ٢٥

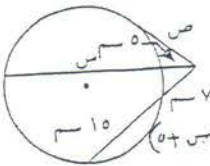
أوجد: د ه .

أ ب × س ب = أ د × س د

٢٥ × س ب = ٢٠ × ٥

٢٥ = ٢٠ × ٥ / س ب = ٤

في التمارين (٣-٥)، أوجد قيمة كل متغير.

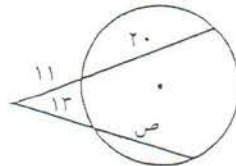


(٥)

(٥ + س) × ٥ = ٢٢ × ٧

س = ٨ و ٥

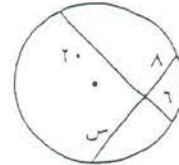
س = ٨ و ٥



(٤)

٢٣ × ١١ = (س + ١٣) × ١٣

س = ٩ و ١٣

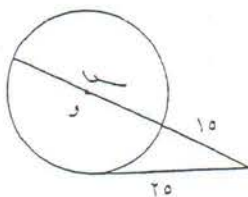


(٣)

٢٠ × ٦ = ٨ × س

س = ١٥

في التمرينين (٦-٧)، أوجد طول قطر كل دائرة.

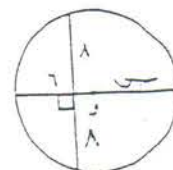


(٧)

(٢٥) = (س + ١٥) × ١٥

س + ١٥ = ٢٦

س = ١١

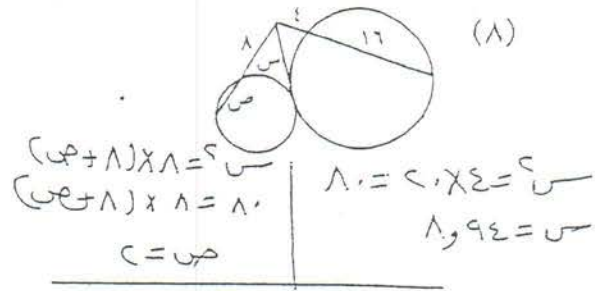
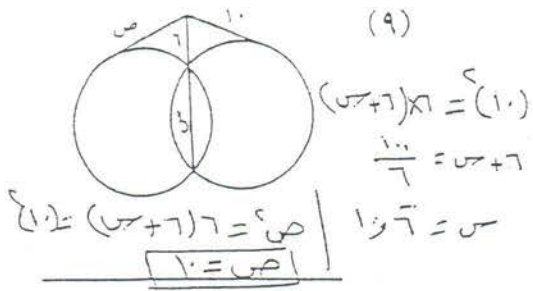


(٦)

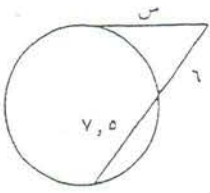
٨ × ٨ = س × ٦

س = ١٠

في التمرين (٨-٩)، استخدم معطيات الشكل لإيجاد قيمة كل من س، ص.



(١٠) تحليل الخطأ: لإيجاد قيمة س كتب أحد الطلاب المعادلة التالية:

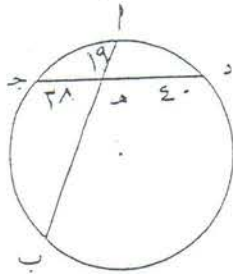


$س = ٦ \times ٧,٥$  فما الخطأ الذي وقع به؟

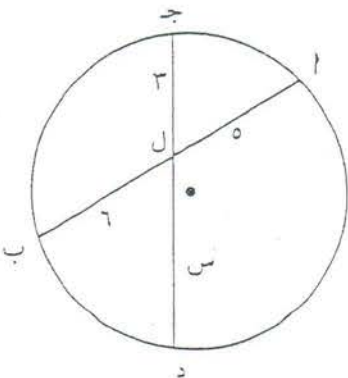
الخطأ من كتابة  $س = ٦ \times ١٣,٥$

(١٢) في الشكل أدناه:

أه = ١٩، هـ د = ٤٠، هـ ج = ٣٨  
أوجد هـ ب.



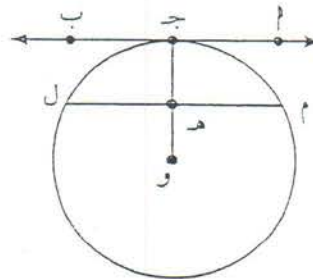
$٣٨ \times ٤٠ = ١٩ \times هـ ب$   
 $هـ ب = \frac{٣٨ \times ٤٠}{١٩} = ٨٠$



(١١) أ ب مماس للدائرة عند ج

هـ منتصف الوتر م ل.

أثبت أن:  $م ل \parallel أ ب$ .



هـ منتصف م ل

وهـ  $\perp م ل$  (وهـ  $\perp م ل$ )

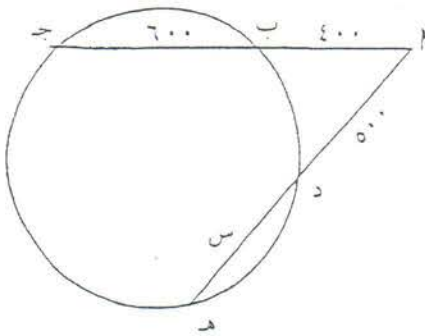
وهـ  $\parallel م ل$  (وهـ  $\parallel م ل$ )

وهـ  $\parallel م ل$  (وهـ  $\parallel م ل$ )

وهـ في وضع تناظر  $\therefore م ل \parallel أ ب$

(١٣) أوجد قيمة س.

$س = ١٠$



(١٤) أوجد قيمة س.

$$1000 \times 400 = (500 + س) \times 500$$

$$800 = س + 500$$

$$300 = س$$

(١٥) في الشكل المقابل: AB مماس للدائرة

$$لج = ١٠، له = ٨، هل = ١٢.$$

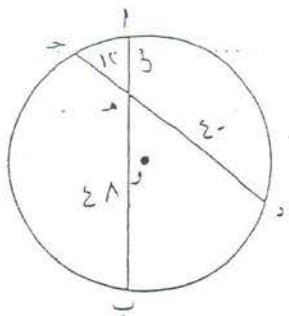
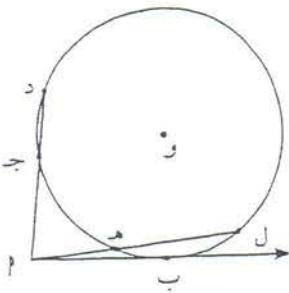
$$(أ) \text{ أوجد ج د. } ٩ \times ٨ = س د \times ١٠$$

$$١٦ = س د$$

$$٦ = س د$$

$$(ب) \text{ أوجد اب. } (٥ د) = ٩ \times ٨ = ١٦٠$$

$$١٩٦٤ = ٥ د$$



(١٦) في الشكل المقابل أوجد قيمة س إذا كان: ج د = ١٢، ه د = ٤٠، ه ب = ٤٨.

$$٤٠ \times ١٢ = ٤٨ \times س$$

$$١٠ = س$$

### المجموعة ب تمارين تعريزية

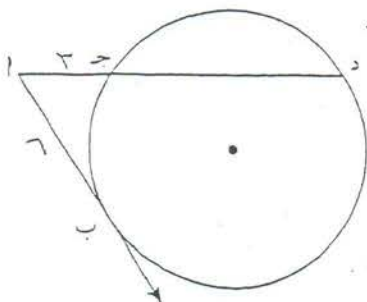
(٢) في الشكل أدناه:

AB مماس للدائرة

$$٦ = اب$$

$$٣ = اج$$

أوجد اد، ج د.



$$٩ \times ٣ = ٦$$

$$١٢ = س د$$

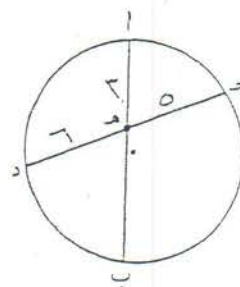
$$٩ = س د$$

(١) في الشكل أدناه:

$$ه ج = ٥، ه ا = ٣،$$

$$ه د = ٦.$$

أوجد ه ب.



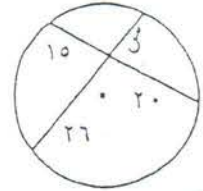
$$٦ \times ٥ = ٥ ه ب \times ٣$$

$$١٠ = ه ب$$



في التمارين (٣-٥)، أوجد قيمة كل من س، ص.

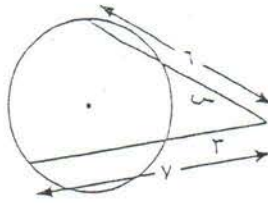
(٣)



$$15 \times 20 = 3 \times 26$$

$$11 \text{ و } 52 = \text{س}$$

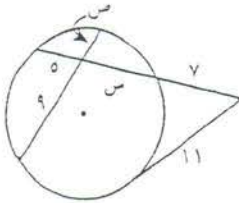
(٤)



$$6 \times 3 = 7 \times 3$$

$$3 \times 5 = \text{س}$$

(٥)



$$(5+9) \times 7 = 11 \times \text{س}$$

$$\frac{147}{11} = \text{س} + 12$$

$$9 \times 8 = \text{س}$$

$$\text{ص} \times 5 = 9 \times \text{ص}$$

$$\frac{5 \times 8 \times 5}{9} = \text{ص}$$

$$\text{ص} = 9 \times 3$$

\*(٦) أوجد طول قطر الدائرة، استخدم الشكل المقابل للإجابة.

$$\text{س} \times 12 = 13 \times \text{س}$$

$$\text{س} \times 12 = 13 \times \text{س}$$

$$\text{س} = 12 \text{ و } 18 = \text{س}$$

$$12 = \sqrt{20 - 13} = 5$$

(٧) أوجد قيمة س.

$$6 \times 5 = 2 \times \text{س}$$

$$18 \times 5 = \frac{2 \times 5}{2} = \text{س}$$

(٨) أوجد قيمة س.

$$9 \times \text{س} = 6 \times (9 + \text{س})$$

$$9 \times \text{س} = 54 - 6 \times \text{س}$$

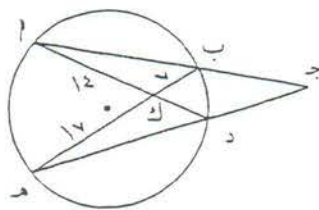
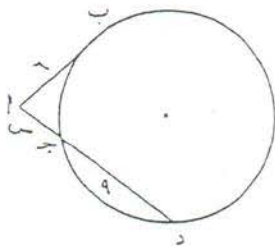
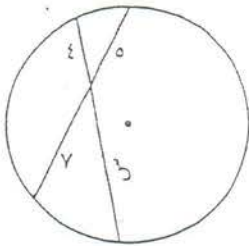
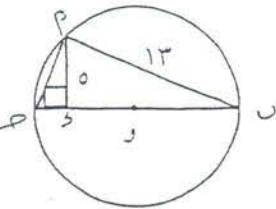
$$15 \times \text{س} = 54 - 6 \times \text{س}$$

(٩) في الشكل المقابل، إذا كان  $\angle \text{ك} = 14^\circ$ ،  $\angle \text{هـ} = 17^\circ$ ،  $\angle \text{ب} = 7^\circ$ .

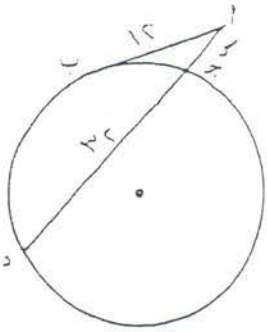
فأوجد  $\angle \text{د}$ .

$$14 \times 7 = 12 \times \angle \text{د}$$

$$180 = \frac{14 \times 7}{12} = \angle \text{د}$$



(١٠) في الشكل المقابل،



أب مماس للدائرة.  $AB = 12$ ،  $AC = 32$ . أوجد  $AD$ .

$$(12)^2 = x(x + 32) \quad \because \text{مس} = \text{مس}$$

$$144 = x^2 + 32x \quad \because \text{مس} = \text{مس}$$

$$0 = x^2 + 32x - 144$$

$$0 = (x - 4)(x + 36)$$

(١١) في الشكل المقابل، ب هـ، د ج يتقاطعان في ل.

ج ب، هـ د يتقاطعان في أ.

أثبت أن:

(أ)  $ل ج = ل هـ$ ، علماً إن:  $ل د = ل ب$ .

$$ل ج \times ل هـ = ل د \times ل ب \quad \text{ل د} = ل د$$

$$ل ج = ل هـ$$

(ب)  $ب ج = د هـ$  علماً إن:  $أ ب = أ د$

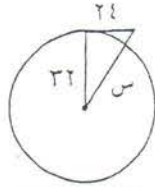
$$ب ج \times د هـ = أ ب \times أ د \quad \text{ل د} = ل د$$

$$ب ج \times د هـ = أ ب \times أ د$$

$$ب ج = د هـ$$

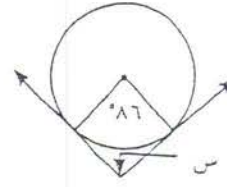
## اختبار الوحدة السادسة

في التمرين (١ - ٢)، لنفرض أن الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة، أوجد قيمة س.



(٢)

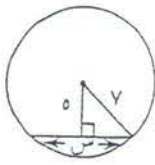
$$S = \sqrt{32 + 24} = 7.6$$



(١)

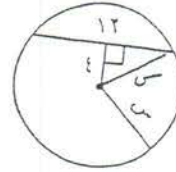
$$S = \sqrt{(16 + 90 + 90) - 36} = 9.4$$

في التمرين (٣ - ٤)، أوجد قيمة س.



(٤)

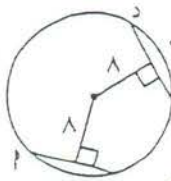
$$S = \sqrt{5 + 12} = 4.1$$



(٣)

$$S = \sqrt{5 + 12} = 4.1$$

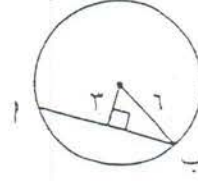
في التمرين (٥ - ٦)، أوجد قياس القوس AB.



(٦)

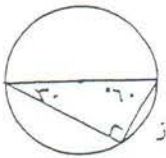
اللبنة البعيدة  
اللبنة القريبة

$$S = \sqrt{1 + 3} = 2.0$$



(٥)

$$S = \sqrt{1 + 3} = 2.0$$



(٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ز.

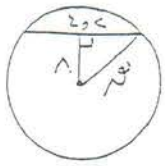
$$Z = 30 \times 2 = 60$$

(٨) الكتابة: المعين المحاط بدائرة خارجة هو مربع.

(أ) صح

(ب) خطأ

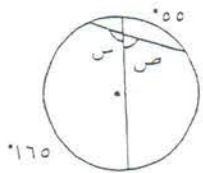




(٩) وتر في دائرة طوله ٢٠، ٤ سم ويبعد ٨ سم عن مركز الدائرة. فما طول نصف قطر الدائرة؟

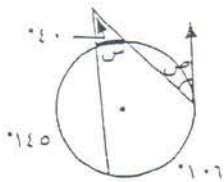
$$\sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

في التمارين (١٠ - ١٥)، الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة. أوجد قيمتي س، ص في كل مما يلي:

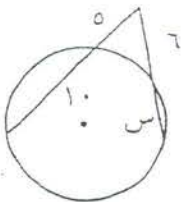


$$(10) \quad 110 = \frac{1}{2}(160 + 170) \Rightarrow 110 = 165 \Rightarrow \text{ص} = 110$$

$$170 = 110 + 180 \Rightarrow \text{ص} = 170$$

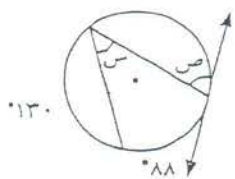


$$(11) \quad \begin{aligned} 100 &= \frac{1}{2}(140 + 170) \Rightarrow 100 = 155 \Rightarrow \text{ص} = 100 \\ 170 &= 100 + 180 \Rightarrow \text{ص} = 170 \end{aligned}$$



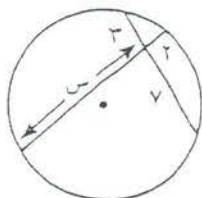
$$(12) \quad 10 \times 7 = (17 + 7) \times 7 \Rightarrow 70 = 17 \times 7 \Rightarrow \text{ص} = 70$$

$$170 = 7 + 180 \Rightarrow \text{ص} = 170$$



$$(13) \quad 88 = \frac{1}{2}(130 + 170) \Rightarrow 88 = 150 \Rightarrow \text{ص} = 88$$

$$170 = 88 + 180 \Rightarrow \text{ص} = 170$$



$$(14) \quad 3 \times 4 = 5 \times 5 \Rightarrow 12 = 25 \Rightarrow \text{ص} = 12$$

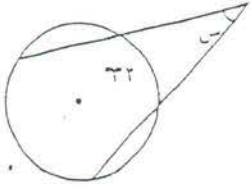
$$170 = 12 + 180 \Rightarrow \text{ص} = 170$$

$$(15) \quad 17 \times 2 = 5 \times 5 \Rightarrow 34 = 25 \Rightarrow \text{ص} = 34$$

$$170 = 34 + 180 \Rightarrow \text{ص} = 170$$

(١٦) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

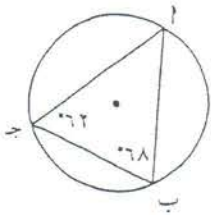
$$س = \frac{1}{2} [٣٢ - ١٠٠] = ٣٤$$



(١٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ب ج.

$$مه (ك) = ١٨٠ - (٦٨ + ٦٢) = ٥٠$$

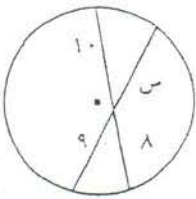
$$مه (ب) = ١٠٠ = ٥٠ \times ٢$$



(١٨) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

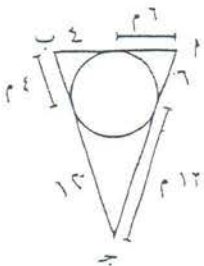
$$س \times ٩ = ١٠ \times ٨$$

$$س = \frac{١٠ \times ٨}{٩} = ٨ \frac{٨}{٩}$$



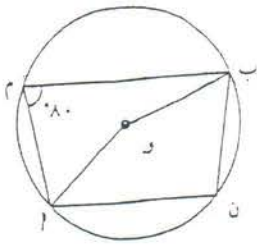
(١٩) أوجد محيط المثلث أ ب ج.

$$محيط \Delta \text{ أ ب ج} = ٦ + ٦ + ١٢ + ١٢ + ٤ + ٤ = ٤٤$$



(٢٠) أوجد  $\angle \text{ن}$ .

$$\angle \text{ن} = 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$



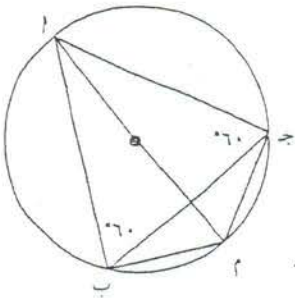
(٢١) في الشكل المقابل،  $\Delta \text{أ ب ج}$  متطابق الأضلاع. أوجد:

$$\angle \text{أ م ب} = \angle \text{ب م ج} = 60^\circ$$

$$\angle \text{ب م ج} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

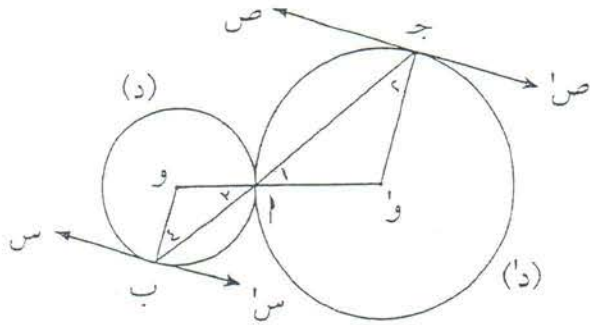
$$\angle \text{م ج ب} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle \text{أ م ج} = \angle \text{ب م ج} = 60^\circ$$





## تمارين إثرائية



(١) (د)، (د') دائرتان لهما نقطة تماس خارجية.

ب ج قاطع يمر بالنقطة ج ويقطع الدائرة (د) بالنقطة

ب ويقطع الدائرة (د') بالنقطة ج.

أثبت أن المماس من النقطة ب للدائرة (د) مواز للمماس

من النقطة ج للدائرة (د').

نمر (١) = نمر (٢) ، نمر (٣) = نمر (٤) ، نمر (١) = نمر (٢) بالتقابل بالرأس

نمر (٣) = نمر (٤) = نمر (١) = نمر (٢)

وهي في وضع كبدل

∴ هي في //

نمر (١) = نمر (٢) ، نمر (٣) = نمر (٤) ، نمر (١) = نمر (٢)

نمر (٣) = نمر (٤) ، نمر (١) = نمر (٢) ، نمر (٣) = نمر (٤)

نمر (٣) = نمر (٤) ، نمر (١) = نمر (٢) ، نمر (٣) = نمر (٤)

نمر (٣) = نمر (٤) ، نمر (١) = نمر (٢) ، نمر (٣) = نمر (٤)

(٢) (د)، (د')، (د'') ثلاث دوائر متطابقة ومراكزها على الترتيب أ، ب، ج. تتقاطع الدوائر الثلاث في النقطة

(د'')

المشتركة هـ .

ماذا تمثل النقطة هـ بالنسبة إلى المثلث أ ب ج؟ اشرح.

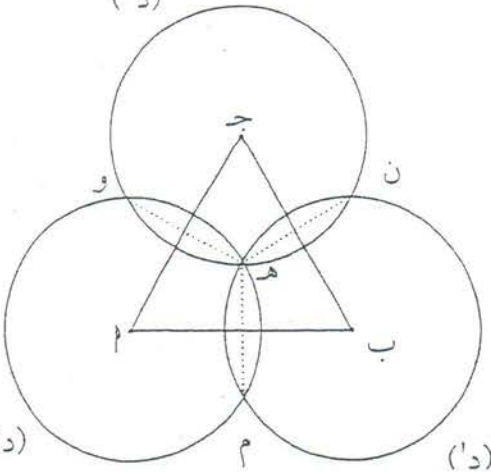
هـ = أ ب ج ونصفه

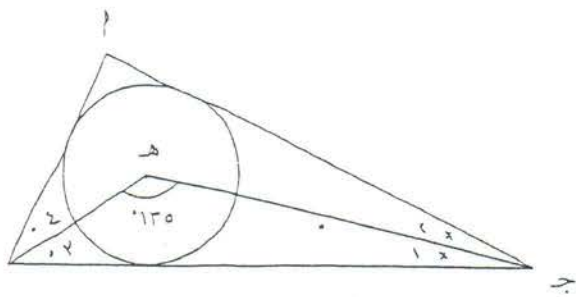
هـ = أ ب ج ونصفه

هـ = أ ب ج ونصفه

∴ تقاطع هـ تقاطع حوا والأضلاع للمثلث أ ب ج

∴ هـ هي مركز الدائرة الخارجة للمثلث أ ب ج





(٤) أ ب ج مثلث. ه مركز الدائرة المحاطة بالمثلث أ ب ج

(نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

أ ب ج).

$$\angle \text{ب ه ج} = 135^\circ$$

أثبت أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية في أ.

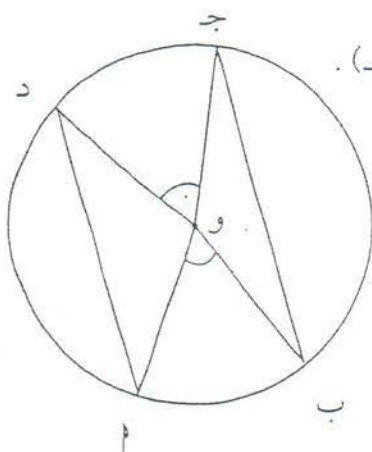
$$\angle \text{ه}(\text{أ}) + \angle \text{ه}(\text{ب}) + \angle \text{ه}(\text{ج}) = 180^\circ = 135^\circ + 20^\circ + 25^\circ$$

$$\therefore 90^\circ = [\angle \text{ه}(\text{ب}) + \angle \text{ه}(\text{ج})]$$

$$\therefore \angle \text{ه}(\text{ب}) + \angle \text{ه}(\text{ج}) = 90^\circ$$

$$\therefore \angle \text{ه}(\text{أ}) = 90^\circ$$

$\therefore \triangle \text{أ ب ج}$  قائم الزاوية في أ



(٥) أ، ب، ج، د نقاط على الدائرة مركزها و، حيث  $\angle \text{أ و ب} = \angle \text{د و ج}$ .

أثبت أن:  $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$ .

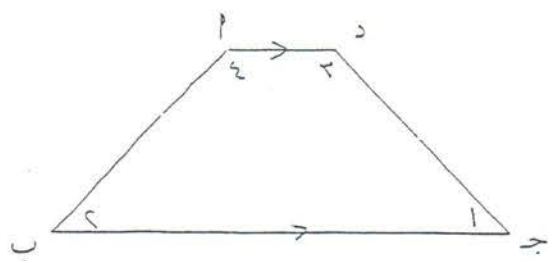
$$\therefore \angle \text{ه}(\text{أ و ب}) = \angle \text{ه}(\text{د و ج})$$

$$\therefore \angle \text{ه}(\text{أ و ب}) = \angle \text{ه}(\text{د و ج})$$

$$\therefore \overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$$

(٦) في الشكل المقابل أ ب ج د شبه منحرف متطابق الضلعين.

أثبت أنه رباعي دائري:



$$\angle \text{ه}(\text{أ}) + \angle \text{ه}(\text{ج}) = 180^\circ$$

$$\angle \text{ه}(\text{أ}) + \angle \text{ه}(\text{ج}) = 180^\circ$$

$$\angle \text{ه}(\text{ب}) + \angle \text{ه}(\text{د}) = 180^\circ$$

$$\therefore \text{المثلث أ ب ج د رباعي دائري}$$

## تنظيم البيانات في مصفوفات Organising Data in Matrices

### المجموعة ١: تمارين أساسية

في التمرينين (١-٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

$$9 \times 1$$

$$(1) \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 3$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 2- & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7- & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

حدّد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

لا لأن الرتب مختلفة

$$(3) \begin{bmatrix} 4 \\ 7- \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر  $a_{ij}$ .

$$7- = 3 \times 2$$

$$3 \times 2$$

$$(4) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7- & 3- & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$[س - ص] = [ب] \quad ؟$$

$$(ب) \quad س = 1, \quad ص = 1 \Rightarrow س + 1 = ب$$

$$(د) \quad س = 2, \quad ص = 1 \Rightarrow س + 1 = ب$$

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقق ما يلي: [٢س]

$$(أ) \quad س = 2, \quad ص = 1 \Rightarrow س - 1 = ب$$

$$(ب) \quad س = 1, \quad ص = 1 \Rightarrow س - 1 = ب$$

في التمرينين (٦-٧)، أوجد قيم كل من س، ص.

$$(٧) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4س - 6 & 10ص + 5س \\ 4س & 10ص + 7س \end{bmatrix}$$

$$4س - 6 = 10ص + 5س$$

$$4س = 10ص + 11$$

$$ص = 7$$

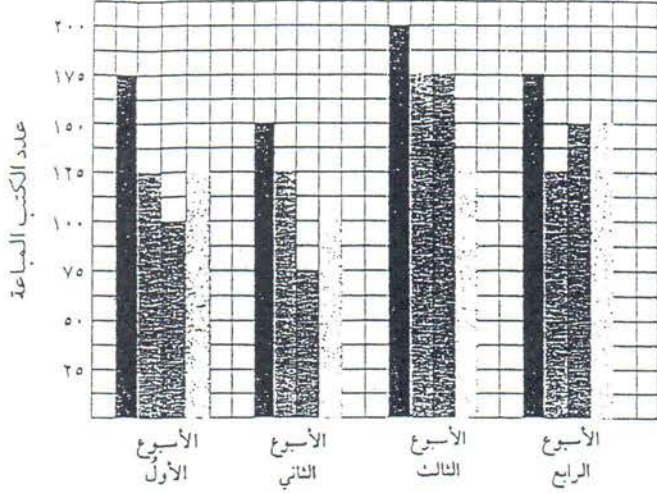
$$(٦) \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5ص & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2س \\ 2- & 2س \end{bmatrix}$$

$$4 = 4, \quad 9 = 2س \Rightarrow س = 4.5$$

$$5ص = 2- \Rightarrow ص = 0.4$$



(٨) يوضح التمثيل البياني المبيعات في شهر أغسطس لإحدى المكتبات. مبيعات المكتبة



(أ) سجّل البيانات في جدول.

	فقر	تاريخ	علوم	رياضيات
الأسبوع الأول	170	120	100	170
الأسبوع الثاني	150	120	70	100
الأسبوع الثالث	200	170	120	170
الأسبوع الرابع	170	120	100	170

(ب) إعرض البيانات في مصفوفة. ماذا تمثل الأعمدة؟ والصفوف؟

170	120	100	170
150	120	70	100
200	170	120	170
170	120	100	170

(٩) تحليل الخطأ: حدّد أحد الطلاب أن العنصر  $a_{33}$  في المصفوفة:  $A = \begin{bmatrix} 170 & 120 & 100 & 170 \\ 150 & 120 & 70 & 100 \\ 200 & 170 & 120 & 170 \\ 170 & 120 & 100 & 170 \end{bmatrix}$  هو -٣.

$$23P = 0 \text{ و } 2$$

(١٠) السؤال المفتوح: أوجد بعض البيانات التي يمكن أن تعرضها في صورة مصفوفة. ثم اكتب مصفوفة لها،

٧٠	٤٢	٦٥
٥١	٣٢	٥٠

$$\begin{aligned} 23P &= 0 \text{ و } 2 \\ 19 &= 5 - 3 \\ 17 &= 5 - 2 \\ 19 &= 5 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 &= 5 - 3 \\ 17 &= 5 - 2 \\ 19 &= 5 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 2 + 6 \\ 2 = 6 + 2 \\ 9 = 2 + 7 \\ 7 = 2 + 9 \end{array}$$

$$(13) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(14) \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

(15) صنعت شركة لإنتاج الحاسوب جهازًا يحمل مخططًا لأربع دول تقع في قارة أفريقيا وهي: جمهورية مصر العربية ومساحتها مليون كيلومتر مربع، ليبيا: 1,800,000 كيلومتر مربع، الجزائر: 2,400,000 كيلومتر مربع، السودان: 2,500,000 كيلومتر مربع. مثل هذه البيانات في مصفوفة مميّزا الصفوف والأعمدة واكتب رتبة المصفوفة.

مصر	ليبيا	الجزائر	السودان
1,000,000	1,800,000	2,400,000	2,500,000

رتبة المصفوفة 4 × 1

(16) الكتابة: حدّد معلومات تحب أن تضيفها لعمل مصفوفة تحتوي على بيانات عددية ذات معنى.

المساحة (متر مربع) عدد السكان في كل دولة من الدول الأربع

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرين (1-2)، اذكر رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

في التمرين (3-4)، حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0) & (1,-1) \\ (0,2) & (2,0) \end{bmatrix}$$

(٤) 
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 4 \\ 4- & 3- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4- & 3- & 2- \end{bmatrix}$$
 لـ ، لآخر الرئيس مختلف

في التمرين (٥-٦)، اذكر رتبة (أبعاد) كل مصفوفة، مع ذكر قيمة العنصر الموضح.

(٥) 
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
  $3 \times 3$  ،  $P = 1$

(٦) 
$$B = \begin{bmatrix} 3- & 1 & 4- \\ 0 & 1- & 2 \end{bmatrix}$$
  $2 \times 3$  ،  $B = 1$

في التمارين (٧-٩)، استخدم الجدول أدناه.

عدد التلفزيونات المستخدمة في إحدى الدول بالمليون

النوع/السنة	١٩٨٠	١٩٨٢	١٩٨٤	١٩٨٧	١٩٩٠	١٩٩٣
ملون	٨٢	٨٥	٨٨	٩٣	٩٦	٩٨
أبيض وأسود	٥١	٤٧	٤٣	٣٦	٣١	٢٠

(٧) وضح البيانات في صورة مصفوفة حيث الصفوف تمثل نوع التلفزيون، والأعمدة تمثل السنوات. وأوجد  $P$  . ماذا يمثل؟

$$\begin{bmatrix} 98 & 96 & 93 & 88 & 85 & 82 \\ 20 & 31 & 36 & 43 & 47 & 51 \end{bmatrix}$$

عدد التلفزيونات البيضاء أسود عام ١٩٨٤  $43 = 36 + 7$

(٨) اعرض البيانات في مصفوفة بصفوف تمثل السنوات، وأعمدة تمثل نوع التلفزيون.

$$\begin{bmatrix} 51 & 82 \\ 47 & 85 \\ 43 & 88 \\ 36 & 93 \\ 31 & 96 \\ 20 & 98 \end{bmatrix}$$

أوجد  $P$  ، ووضح ماذا يمثل.

$93 = 141$   
ر يمثل عدد التلفزيونات الملونة  
في عام ١٩٨٧

(٩) اذكر أبعاد المصفوفات في التمرينين رقمي ٨،٧.

٢ × ٦ ٦ × ٢

(١٠) الجغرافيا: الجدول يوضح المسافات بين بعض المدن بالكيلومتر.

(أ) أكمل الجدول. كيف يكون ذلك ممكنًا بالنسبة إليك؟

المدينة	الكويت	الرياض	أبوظبي	مسقط
الكويت	-	٥٣٧	١٤٨٤	٢٥٦٨
الرياض	٥٣٧	-	٧٦٨	١٧٢٢
أبوظبي	١٤٨٤	٧٦٨	-	٢٢٥٩
مسقط	٢٥٦٨	١٧٢٢	٢٢٥٩	-

(ب) اكتب مصفوفة مناظرة لهذه البيانات.

$$\begin{bmatrix} ٢٥٦٨ & ١٤٨٤ & ٥٣٧ & - \\ ١٧٢٢ & ٧٦٨ & - & ٥٣٧ \\ ٢٢٥٩ & - & ٧٦٨ & ١٤٨٤ \\ - & ٢٢٥٩ & ١٧٢٢ & ٢٥٦٨ \end{bmatrix}$$



## جمع المصفوفات وطرحها

## Adding And Subtracting Matrices

## المجموعة التمارين الأساسية

في التمرينين (١-٢)، أوجد ناتج كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

في التمارين (٣-٦)، استخدم الحاسب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 17 & 17 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 10 & 11 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 15 & 2 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

في التمارين (٧-١٢)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$$\begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 4 & 0, 33 \\ 0, 15 & 7- \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 9 & 8 & \frac{3}{5} & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{پ}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{7}{8} & 4- & 2- \\ \frac{10}{11}- & 1- & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{د}}$$

$$\begin{bmatrix} 44 & 3 \\ 0 & 1 \\ 23, 2 & 14 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

(٧)  $\underline{\underline{د}} + \underline{\underline{پ}}$  ممكن

(٨)  $\underline{\underline{پ}} - \underline{\underline{د}}$  ممكن

(٩)  $\underline{\underline{ج}} + \underline{\underline{ب}}$  ممكن

(١٠)  $\underline{\underline{پ}} + \underline{\underline{ب}}$  غير ممكن

(١١)  $\underline{\underline{ج}} - \underline{\underline{د}}$  غير ممكن

(١٢)  $\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{ج}}$  ممكن

في التمارين (١٣-١٦)، أوجد س في كل مما يلي:

(١٣) ✓  $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6- \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} + \begin{bmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(١٤) ✓  $\begin{bmatrix} 50 & 5 \\ 10- & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1- & 75 \end{bmatrix} - \underline{\underline{س}}$

(١٥) ✓  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5- \\ 2 & 0 & 2 \\ 3- & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3- & 8 & 12 \end{bmatrix} + \underline{\underline{س}}$

(١٦) ✓  $\begin{bmatrix} 5 & 24 & 13 \\ 1 & 17- & 6- \end{bmatrix} - \underline{\underline{س}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 24- & 4 & 2 \end{bmatrix}$

حل  
رسم (۱۳) م ۴۴ بکراسه تقارینه  
طرح  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  هر طرفی بجا داره

$$\begin{bmatrix} 11 & 1- & 4- \\ 2 & 1- & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & . & 1- \end{bmatrix} = \text{جواب}$$

رسم (۱۴) م ۴۴  
باجدا فنه  $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1- & 10 \end{bmatrix}$  لاطرفینه

$$\begin{bmatrix} 72 & 9 \\ 11- & 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1- & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1- & 0 \end{bmatrix} = \text{جواب}$$

رسم (۱۵) م ۴۴

طرح  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \\ 3- & 1 & 12 \end{bmatrix}$  هر طرفی بجا داره

$$\begin{bmatrix} 1- & 5- & 1- \\ 7- & 0- & . \\ . & 3- & 12- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \\ 3- & 1 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} . & . & 0- \\ 2 & . & 2 \\ 3- & 0 & . \end{bmatrix} = \text{جواب}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & . \\ . & 3 & 12 \end{bmatrix} = \text{جواب}$$

رسم (۱۶) م ۴۴  
باجدا فنه  $\begin{bmatrix} 0 & 24 & 13 \\ 1 & 17- & 7- \end{bmatrix}$  ایا طرفی بجا داره

$$\begin{bmatrix} 0 & 24 & 13 \\ 1 & 17- & 7- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} . & . & . \\ 24- & 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{جواب}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 24 & 13 \\ 23- & 13- & 2- \end{bmatrix} = \text{جواب}$$

الشباب المختار لممارسة الأنشطة  
في مركزين مختلفين

عدد الإناث في المركز	عدد الذكور في المركز	
٥٧	٥٣	الحاسوب
٥٨	٥٤	الأعمال البدوية
٢٩	٣٩	رياضة بدنية
٦٠	٤١	سباحة

(١٧) تحليل البيانات: استخدم المعلومات في الجدول أدناه:

(أ) ضع البيانات في مصفوفتين. وميز كل مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم الفقرة (أ) لإيجاد عدد الشباب (الذكور والإناث) المشترك في كل نشاط بجمع المصفوفتين.

$$\begin{bmatrix} ١١٠ \\ ١١٢ \\ ٦٨ \\ ١٠١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$$

(ج) أوجد عدد الذكور - عدد الإناث المشتركين في كل نشاط.

$$\begin{bmatrix} ٤- \\ ٤- \\ ١٠ \\ ١٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$$

(١٨) الكتابة: بفرض أن  $I$ ،  $J$  مصفوفتان لهما الأبعاد نفسها. وضح: لا يحار  $I + J$  تجمع كل عنصر مع نظيره

(أ) كيف يمكنك إيجاد  $I + J$ ،  $I - J$ ، لا يحار  $I - J$  نوجد النظير  $I$  كم تجمع كل عنصر مع  $J$

مع نظيره من النظير  $I$  لجمع  $J$

(ب) كيف يمكنك إيجاد مصفوفة  $I$  بحيث  $I + J$  يعطي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفراً.

بفرض  $I$  بحيث يكون كل عناصره نظيره لجمع العناصر المصفوفة  $J$  لنظيره  $I$



## المجموعة ب تمارين تعزيزية

الحساب الذهني: في التمارين (١-٤)، أوجد ناتج كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ٢ \\ ٧- & ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ٢ \\ ٧- & ٦ & ٥ \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ١- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & ٢- & ١ \end{bmatrix} \quad (٢)$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٠ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \quad (٣)$$

$$\begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & ٣,٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & ٣,٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & ٣,٥- \end{bmatrix} \quad (٤)$$

(٥) التصنيع: يوضح الجدول عدد كرات الشاطئ المنتجة في مصنعين ومستويات الإنتاج لفترة عمل واحدة. المصنع الأول يعمل فترتين كل يوم، والمصنع الثاني يعمل ثلاث فترات.

المصنع الأول		المصنع الثاني	
مطاط	بلاستيك	مطاط	بلاستيك
٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	١٢٠٠
١٣٠٠	١٩٠٠	٦٠٠	١٦٠٠

(أ) اكتب مصفوفات لتمثل الإنتاج اليومي لكل مصنع.

$$\begin{bmatrix} ١٢٠٠ & ٤٠٠ \\ ١٦٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧٠٠ & ٥٠٠ \\ ١٩٠٠ & ١٣٠٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢٠٠ & ٤٠٠ \\ ١٦٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم النتائج من الفقرة أ. أوجد ناتج طرح المنتج الكلي في المصنع الثاني من المنتج الكلي في المصنع الأول.

$$\begin{bmatrix} ٥٠٠- & ١٠٠ \\ ٣٠٠ & ٧٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢٠٠ & ٤٠٠ \\ ١٦٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧٠٠ & ٥٠٠ \\ ١٩٠٠ & ١٣٠٠ \end{bmatrix}$$

في التمارين (٦-٨)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم لإيجاد ناتج كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٧- & ٦- \\ ٧- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٥- & ٩ \end{bmatrix} \quad (٦)$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٧- & ٦ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢- & ٠ \\ ٦- & ٥ & ٥- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥- & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٦ \end{bmatrix} \quad (٧)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 9- & 1- \\ 5 & 2- & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5- & 10 \\ 9- & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 7- & 9 \\ 4- & 3- & 6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(٩) يوضح الجدول التالي، ما يبيعه كل محل من العبوات المختلفة لنوعين من الشاي الأخضر و الشاي العادي: حيث يشير العدد (١) إلى أن المحل يبيع هذا المنتج، والعدد (٠) إلى أن المحل لا يبيع هذا المنتج.

العبوة	محل ١		محل ٢		محل ٣	
	شاي أخضر	شاي عادي	شاي أخضر	شاي عادي	شاي أخضر	شاي عادي
٥ جرامات	٠	٠	٠	٠	١	١
١٠ جرامات	١	١	٠	٠	٠	٠
٢٥ جراماً	١	١	٠	٠	٠	٠
٥٠ جراماً	١	٠	١	١	٠	٠

(أ) اكتب ثلاث مصفوفات من الرتبة  $2 \times 4$  لتمثل الأنواع المتوفرة لكل منتج في كل محل.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) اكتب مصفوفة من الرتبة  $2 \times 4$  لتمثل مجموع عدد المحلات التي تبيع كل منتج.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(١٠) السؤال المفتوح: صف موقفاً يتطلب جمع أو طرح معلومات مخزنة على صورة مصفوفات.

في التمارين (١٦-١٣)، اختر الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9- & 3- \\ 0 & 0 & 9- \\ 8- & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4- & 3 \\ 2- & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2- \\ 5 & 4- & 1 \\ 10- & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1- \\ 9- & 7- & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 7 & 6- & 5 \\ 1- & 2 & 2- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 9- \\ 9- & 0 & 5- \\ 3 & 2- & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2- & 0 \\ 1- & 0 \\ 0 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

في التمارين (١٤-١٧)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن:

$$\begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 4 & 0, 33 \\ 0, 10 & 7- \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 9 & 8 & \frac{3}{0} & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{پ}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{7}{8} & 4- & 2- \\ \frac{10}{11} & 1- & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{د}}, \quad \begin{bmatrix} 44 & 3 \\ 0 & 1 \\ 23, 2 & 14 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

(١٥)  $\underline{\underline{پ}} + \underline{\underline{د}}$  ممكن  
(١٧)  $\underline{\underline{پ}} + (\underline{\underline{ج}} - \underline{\underline{د}})$  غير ممكن

(١٤)  $\underline{\underline{پ}} - \underline{\underline{ج}}$  ممكن  
(١٦)  $\underline{\underline{پ}} + \underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{ج}}$  غير ممكن

في التمارين (١٨-٢١)، أوجد س في كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} 6- & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3- \end{bmatrix} \quad (18) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 13- & 3 & 11 \\ 8 & 9- & 10 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} - \begin{bmatrix} 1- & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (19) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2- & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2- & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \underline{\underline{س}} \quad (20) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 0 & 5- \\ 19- & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 28 & 17 \\ 2 & 3- \end{bmatrix} + \underline{\underline{س}} \quad (21) \checkmark$$

رسم ۱۸) طرح  $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$  به طرفی اطعاده

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \text{نیز}$$

رسم ۱۹) طرح  $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$  به طرفی اطعاده

$$\begin{bmatrix} ۱۲ & ۲ & ۹ \\ ۷ & ۱۱ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۲ & ۲ & ۱۱ \\ ۸ & ۹ & ۱۰ \end{bmatrix} = \text{نیز}$$

$$\begin{bmatrix} ۱۲ & ۲ & ۹ \\ ۷ & ۱۱ & ۱۰ \end{bmatrix} = \text{نیز}$$

رسم ۲۰) باضافه  $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$  لطرفی اطعاده

$$\begin{bmatrix} ۱۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۷ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \text{نیز}$$

رسم ۲۱) طرح  $\begin{bmatrix} ۰ & ۱۲ \\ ۲۸ & ۱۷ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۲۸ & ۲۵ \\ ۲۱ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱۲ \\ ۲۸ & ۱۷ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۱۲ \\ ۰ & ۰ \\ ۱۹ & ۳ \end{bmatrix} = \text{نیز}$$



## ضرب المصفوفات Matrices Multiplication

### المجموعة التمارين الأساسية

في التمارين (١-٤)، أوجد ناتج ضرب كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ١٢- & ٥ \\ ٦- & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٤ & ٣- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٠ & ١ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} \quad (٢)$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- \\ ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \end{bmatrix} \quad (٣)$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٥ & ١ \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٥- & ١- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \quad (٤)$$

(٥) الأعمال: أعد منسق أزهار ثلاث باقات. وضع في الأولى ثلاث زهرات ياسمين وفي الثانية ثلاث زهرات ياسمين وأربع زهرات قرنفل؛ وفي الثالثة أربع زهرات فل وثلاث زهرات قرنفل. يبلغ ثمن زهرة الياسمين الواحدة ٢١٥، دينار وثمان زهرة القرنفل الواحدة ٩٠، دينار وثمان زهرة الفل الواحدة ١٣٠، دينار.

(أ) اكتب مصفوفة تمثل عدد كل نوع من الأزهار في كل باقة.

	الباقية الأولى	الباقية الثانية	الباقية الثالثة
	٣	٣	٠
	٤	٣	٠
	٤	٣	٠

(ب) اكتب مصفوفة تمثل ثمن كل نوع من الأزهار.

$$\begin{bmatrix} ١٥ و ٢٠ \\ ٩٠ و ٠ \\ ١٣٠ و ٠ \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{نكهة لينة حمراء} \\ \text{لقرنفل} \\ \text{الفل} \end{matrix}$$

(ج) اكتب مصفوفة تمثل ثمن كل باقة.

$$\begin{bmatrix} ٦٢٥ و ٠ \\ ١٠٥ و ١ \\ ٧٩٠ و ٠ \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{نكهة الباقية الأولى} \\ \text{الثانية} \\ \text{الثالثة} \end{matrix} = \begin{bmatrix} ٩١٥ و ٠ \\ ٩٠ و ٠ \\ ١٣٠ و ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

في التمارين (٦-١٠)، حدد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix} = \underline{\underline{أ}} \quad \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} \quad \begin{bmatrix} ٥ & - \\ ٦ & - \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}} \quad \underline{\underline{د}} = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(٦) \underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ب}} \text{ معروف} \quad (٧) \underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ج}} \text{ معروف} \quad (٨) \underline{\underline{ج}} \times \underline{\underline{ب}} \text{ غير معروف}$$

$$(٩) \underline{\underline{د}} \times \underline{\underline{أ}} \text{ معروف} \quad (١٠) \underline{\underline{د}} \times \underline{\underline{ج}} \text{ معروف}$$

في التمارين (١١-١٣)، أوجد ناتج ضرب كل مما يلي:

$$(١١) \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \times ٢$$

$$(١٢) \begin{bmatrix} ٧ & ١٥ \\ ٢ & ٣٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} \times ٠,٥$$

$$(١٣) \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$(١٤) \text{ الاختيار من متعدد: تبين الأعمدة في المصفوفة } \underline{\underline{أ}} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١٢ & ٠ \end{bmatrix} \text{ بالترتيب، عدد المماحي وعدد الأقلام}$$

المباعة. وتبين الصفوف بالترتيب الأعداد المباعة يومي الاثنين والثلاثاء. تبين المصفوفة  $\underline{\underline{ب}} = \begin{bmatrix} ٠,٠٥٠ \\ ٠,٠٢٥ \end{bmatrix}$  كلفة كل من الممحاة والقلم. ما الذي يبينه ناتج ضرب  $\underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ب}}$ ؟

(أ) ثمن كل المماحي المباعة يومي الاثنين والثلاثاء، و ثمن الأقلام في هذين اليومين.

(ب) مجموع ثمن المماحي والأقلام يوم الاثنين ومجموع ثمنها يوم الثلاثاء.

(ج) مجموع ثمن الأقلام والمماحي.

(د) ثمن قلم واحد وممحاة واحدة.

(١٥) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج. رتبة مصفوفة المصفوفة  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 17 \\ \frac{11}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{14}{3} & \frac{9}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 1 \\ 1- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2- & 7 & 5 \\ 6 & 3 & \frac{4}{5} \\ 4 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٦-١٩)، استخدم المصفوفات د، و، ف. نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معروفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معروفة فاكتب "غير معروفة".

$$\begin{bmatrix} 2 & 3- \\ 1 & 5- \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{ف}}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5- & 2 \\ 2- & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\text{و}}, \quad \begin{bmatrix} 1- & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2- & 1- & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{د}}$$

$$(16) \underline{\text{د}} \times \underline{\text{و}} = \text{معروفة} \geq \underline{\text{و}} \times \underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} 5- & 7- & 1 \\ 0- & 1 & 7 \\ 0 & 12- & 3- \end{bmatrix}$$

$$(17) (\underline{\text{د}} \times \underline{\text{و}}) \times \underline{\text{ف}} = \text{معروفة} \quad \begin{bmatrix} 24- & 17 \\ 7- & 23- \\ 18- & 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3- \\ 1 & 5- \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5- & 7- & 1 \\ 0- & 1 & 7 \\ - & 12- & 3- \end{bmatrix}$$

$$(18) \underline{\text{د}} - 2 \times \underline{\text{و}} = \text{معروفة} \quad \begin{bmatrix} 1- & 12 & 3- \\ 0 & 3 & 9- \\ 2- & 3- & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10- & 2 \\ 2- & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1- & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2- & 1- & 2 \end{bmatrix}$$

$$(19) (\underline{\text{د}} \times 2) (\underline{\text{ف}} \times 3) = \text{معروفة} \quad \begin{bmatrix} 0 & 90- \\ 22 & 78- \\ 30- & 30- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9- \\ 3 & 10- \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9- & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 2- & 2- & 2 \end{bmatrix}$$

(٢٠) تعرض شركة تباع الخردوات في محلاتها الأسعار في مصفوفة من الرتبة  $3 \times 1$  ومبيعات المحال الثلاثة اليومية في مصفوفة من الرتبة  $3 \times 3$ .

المحل ١	المحل ٢	المحل ٣	
مطرقة	منبه ضوئي	قنديل	مطرقة
منبه ضوئي	قنديل	مطرقة	منبه ضوئي
قنديل	مطرقة	منبه ضوئي	قنديل

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 14 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد ناتج ضرب المصفوفتين. اشرح ما الذي يمثله.

ناتج الضرب =  $\begin{bmatrix} 90 & 78 & 30 \\ 22 & 78 & 30 \\ 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$  وتمثل دخل كل محل من الخردوات الثلاثة

بالترتيب من بيعها لأنواع الخردوات الثلاثة

(ب) كيف يمكن إيجاد المبيع العام في الحال الثلاثة؟

$$\text{المبيع العام} = ٩٩,٤٠٠ \text{ دينار}$$

(ج) أوجد مبيع المنبهات الضوئية في الحال الثلاثة.

$$\text{المبيع المبرمج للصوتية} = ٩٣ \times ٥٠٠ = ١١٥٠٠ \text{ دينار}$$

(٢١) السؤال المفتوح: اكتب مصفوفتين  $S$ ،  $V$  من الرتبة  $2 \times 2$  ليست كل العناصر متساوية بحيث يكون

$$S \times V = V \times S$$

$$S = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$(٢٢) \text{ أوجد قيمة كل من } S, V: \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٢ \times ٢ = ٤$$

$$٢ \times ٣ = ٦, ٣ \times ٢ = ٦, ٣ \times ٣ = ٩, ٣ \times ٤ = ١٢, ٤ \times ٢ = ٨, ٤ \times ٣ = ١٢, ٤ \times ٤ = ١٦$$

في التمرين (٢٣-٢٤) استخدم المصفوفات  $A, B, C, D$  حدد ما إذا كان التعبيران في كل زوج مما يلي متساويين.

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = A, \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = B, \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = C, \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = D$$

$$(٢٣) \checkmark \quad (A+B) \times C, C \times B, B \times C, D \times B$$

$$(٢٤) \checkmark \quad (A+B) \times (C+D), (C+D) \times (B+A), D \times (B+A)$$

$$(٢٥) \text{ إذا كانت } M = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}, \text{ فهل } M \times N = N \times M \text{؟ فسر.}$$

$$M \times N \neq N \times M \quad \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١٨ & ١١ \end{bmatrix} = M \times N, \begin{bmatrix} ٢٣ & ٨ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix} = N \times M$$

ضرب المصفوفات غير إبداعي

(٢٦) أي ضرب مما يلي غير معرف؟

$$(أ) \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$(د) \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$(ج) \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$



حل :-  
 رقم (٢٣) منه بكماسه لتمايزه

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{B} + \underline{P}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 17 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{D} \times (\underline{B} + \underline{P})$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 17 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \underline{D} \times \underline{B} + \underline{D} \times \underline{P}$$

$$\underline{D} \times \underline{B} + \underline{D} \times \underline{P} = \underline{D} \times (\underline{B} + \underline{P})$$

رقم (٢٤) منه بكماسه لتمايزه

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{S} + \underline{D}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{B} + \underline{P}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (\underline{S} + \underline{D}) \times (\underline{B} + \underline{P})$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 17 & 2 \end{bmatrix} = \underline{D} \times (\underline{B} + \underline{P})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{S} \times (\underline{B} + \underline{P})$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \underline{S} \times (\underline{B} + \underline{P}) + \underline{D} \times (\underline{B} + \underline{P})$$

$$\underline{S} \times (\underline{B} + \underline{P}) + \underline{D} \times (\underline{B} + \underline{P}) = (\underline{S} + \underline{D}) \times (\underline{B} + \underline{P})$$

## المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (٦-٤)، أوجد ناتج ضرب كل مما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1- \\ 1- & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4- \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3- \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3- \end{bmatrix} \quad (٢)$$

$$\begin{bmatrix} 34 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3- & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3- \end{bmatrix} \quad (٣)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 15- \\ 0 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3- \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (٤)$$

في التمارين (٥-٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرفاً أم لا مع تفسير إيجابتك.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{د}} \quad \begin{bmatrix} 5- \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3- \\ 4- & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{أ}}$$

$$(٥) \quad \underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{أ}} \text{ معرف لأنه } \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ٢) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ٢) \end{matrix}$$

$$(٦) \quad \underline{\underline{ج}} \times \underline{\underline{أ}} \text{ غير معرف } \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ٢) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (١ \times ٢) \end{matrix}$$

$$(٧) \quad \underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{ج}} \text{ معرف } \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (١ \times ٢) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ٢) \end{matrix}$$

$$(٨) \quad \underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{د}} \text{ غير معرف } \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ٢) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ١) \end{matrix}$$

$$(٩) \quad \underline{\underline{ج}} \times \underline{\underline{د}} \text{ معرف } \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (٢ \times ٢) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{مستطيل} \\ (١ \times ٢) \end{matrix}$$

في التمرينين (١٠-١١)، أوجد ناتج الضرب.

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 9- \\ 3- & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4- & 7- & 9 \\ 3 & 2- & 1- \end{bmatrix} 1- \quad (١٠)$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 1- & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1- \\ 1 & 1- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 1- \\ 1- & 0 \end{bmatrix} \quad (١١)$$

(١٢) أوجد رتبة مصفوفة ناتج الضرب، ثم أوجد ناتج الضرب:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 43 \\ 50 & 68 \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٣-١٦)، استخدم المصفوفات  $\underline{D}$ ،  $\underline{W}$ ،  $\underline{N}$  ثم نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معروفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معروفة فاكتب «غير معروفة».

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \underline{N} \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{W} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{D}$$

$$(14) \checkmark \quad \underline{D} \times (\underline{W} \times \underline{N})$$

$$(13) \quad \underline{N} \times 3 =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 10 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$(16) \checkmark \quad \underline{W} \times (\underline{D} \times \underline{W})$$

$$(15) \checkmark \quad \underline{W} \times (\underline{D} - \underline{W})$$

(١٧) الكتابة في الرياضيات: لنفرض أن المصفوفة  $\underline{A}$  هي من الرتبة  $3 \times 2$  والمصفوفة  $\underline{B}$  من الرتبة  $2 \times 3$ . هل  $\underline{A} \times \underline{B}$ ،  $\underline{B} \times \underline{A}$  متساويتان؟ اشرح تفكيرك.

$$\underline{A} \times \underline{B} \neq \underline{B} \times \underline{A} \quad \text{لأن ضرب المصفوفات غير إبداعي}$$

حل :-

رقم (١٤) م ٥٢  $(N \times \underline{9}) \times \underline{5}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 7 & 15 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = N \times \underline{9}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 15 & 33 \\ 18 & 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 7 & 15 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (N \times \underline{9}) \times \underline{5}$$

رقم (١٥) م ٥٢  $N \times (\underline{5} - \underline{9})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (\underline{5} - \underline{9})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 13 & 7 \\ 17 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = N \times (\underline{5} - \underline{9})$$

رقم (١٦) م ٥٢  $\underline{9} \times (\underline{2} \times \underline{2})$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{2} \times \underline{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \underline{9} \times (\underline{2} \times \underline{2})$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 10 & 9 & 10 \\ 0 & 11 & 5 \end{bmatrix} =$$



(١٨) اكتب مصفوفة تمثل العائد اليومي للبطاقات المباعة مستخدماً الجدولين التاليين:

$$\begin{bmatrix} 17. & 12. \\ 140 & 15. \\ 1. & 05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10. \\ 100 \\ 7. \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

درجة ٣	درجة ٢	درجة ١	أسعار البطاقات بالدينار
٥	٦	٧	

$$[504, 190, 511] =$$

الثلثاء	الأربعاء	الخميس	
١٥٠	١٣٠	١٦٠	عدد البطاقات المباعة درجة ١
١٢٥	١٣٠	١٧٥	عدد البطاقات المباعة درجة ٢
٦٠	٥٢	٨٠	عدد البطاقات المباعة درجة ٣

(١٩) حل المعادلة المصفوفية، ثم أوجد قيمة كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -ص & ٢س \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢س \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

٩- = ٦س - ص  
٩- = ١٢- - ص

٩- + ١٥ = -ص  
٣ = -ص

٢- = ص

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7س - ص & ٦س \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$$

٤- = ٦س - ص  
٤- = ٦س - ص

في التمرينين (٢٠-٢١)، استخدم المصنفات أ، ب، ج، د، هـ لتبين صحة العبارة في كل منهما.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \Gamma \\ \Gamma^T & \Sigma \end{bmatrix} = \underbrace{C}_{\cdot} + \underbrace{P}_{\cdot} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \underbrace{S}_{\cdot} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \underbrace{S}_{\cdot}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \rho \\ \cdot & \Sigma \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \chi(C+P)$$

$$(20) \quad 1 \times 3 + 2 \times 3 = 3 \times (1 + 2)$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots = (\underline{2} + \underline{9})(\underline{1} + \underline{5}) \quad (21)$$

$$\textcircled{6} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{I}$$

مر. ۵، جہاں  $\underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ . & 2 \end{bmatrix} = (s + 1)(s + 1) \text{ (11) } \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{2 \times 2} + \underline{1 \times 2} + \underline{2 \times 1} + \underline{1 \times 1}$$

∴  $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$

## مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس)

## Identity Matrices and Inverse Matrix

### المجموعة التمارين أساسية

في التمرين (١-٢)، بين أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

نكل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

نكل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

في التمارين (٣-٧)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

$$21 = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$0 = (2 \cdot 6) - (3 \cdot 2) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{11}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$13 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$7 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (7)$$

في التمارين (٨-١١)، أوجد النظر الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب (لا يوجد نظير ضربي، مع ذكر السبب).

$$(٨) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} = \underline{I} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(٩) \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{17} = \underline{I} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(١٠) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{0} = \underline{P} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(١١) \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ لا يوجد نظير ضربي لأنه } \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

في التمرينين (١٢-١٣)، حل كل معادلة في  $\mathbb{R}$ . وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

$$(١٢) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \underline{X} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(١٣) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{X} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حلها لأنه  $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

\*(١٤) تحليل البيانات: يحدد ٩٩,٥٪ من مشتركي اللاقط التلفزيوني اشتراكهم للعام التالي بين ٥,٠٪ منهم لا يجدون اشتراكهم. ٩٨٪ من غير المشتركين يقولون دون اشتراك بين ٢٪ منهم يشتركون في اللاقط العام التالي.

(أ) اكتب مصفوفة تبين التغير في اشتراك اللاقط.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \text{مستمر} & \text{غير مستمر} \\ \text{مستمر} & \text{غير مستمر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.995 \\ 0.98 & 0.02 \end{bmatrix}$$

(ب) في عينة من ٣٠٠٠٠ شخص اشترك ٢٠٠٠٠ منهم باللاقط. توقع عدد مشتركي اللاقط من هذه العينة العام القادم.

$$\begin{bmatrix} 20000 \\ 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 & 0.995 \\ 0.98 & 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20100 \\ 9900 \end{bmatrix}$$

(ج) استخدم النظر الضربي للمصفوفة في (أ) لإيجاد عدد مشترك في اللاقط في العام السابق.

$$\begin{bmatrix} 19897 \\ 1013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{989}{970} & \frac{98}{970} \\ \frac{995}{970} & \frac{105}{970} \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٥-١٧)، أوجد قيمة كل محدد.

عدد مشترك في اللاقط العام يسبقه

$$19897 = \begin{vmatrix} 37 & 9 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$0 = 4 + 4 - = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$9 = 0 - 9 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (17)$$

في التمارين (١٨-١٩)، هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح إجابتك.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

$$\begin{bmatrix} 8 & 93 \\ 16 & 46 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \quad (19)$$

لأنها ليس لها نظير ضربي

في التمارين (٢٠-٢٣)، حدّد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي. في حال وجوده أوجد النظر الضربي للمصفوفة وفي حال عدم وجوده اشرح السبب.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} = \underline{P} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{7} = \underline{P} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{1} = \underline{P} \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (23)$$

لا يوجد نظير ضربي لأنه  $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$



$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \underline{s} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark (24) \text{ أوجد المصفوفة } \underline{s}:$$

$$\begin{bmatrix} 27 & 19 \\ 24 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \underline{s} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark (25) \text{ حل المعادلة: } \underline{s} =$$

$$\checkmark (26) \text{ إذا كانت } s \in \mathbb{R} : \underline{p} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ونظيرها الضربي: } s \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ فما قيمة } s?$$

حل - تم ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ في الصفحة القادمة ص ٥

حل :-

رقم ٢٤

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}$$

رقم ٢٥

$$\begin{bmatrix} 19 & -15 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 19 & -15 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 & -15 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{10} = \underline{\underline{I}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}$$

رقم ٢٦

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} = \underline{\underline{I}} \quad 1 = \underline{\underline{I}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0- \\ 2 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3- \\ 0 & 2- \end{bmatrix}$$

كل مصفوفة هـ نظير ضربى الأخرى

بين أن كل مصفوفة هي نظير ضربى للمصفوفة الأخرى.

$$(1) \begin{bmatrix} 7 & 0- \\ 3 & 2- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3- \\ 0 & 2- \end{bmatrix}$$

في التمارين (٣-٦)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

$$(2) \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 2 & 1,5 \end{bmatrix} \Delta = 0,5 \cdot 1,5 - 0 = 0,75$$

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Delta = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$(4) \begin{bmatrix} 0 & 2- \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \Delta = 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 2$$

$$(5) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \Delta = 3 \cdot 2 - 0 = 6$$

$$3- = 0 + 8- = \Delta \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 4- & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

في التمارين (٧-١٠)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إذا وجد، وإذا لم يوجد فاكتب (لا يوجد نظير ضربي).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 6- & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 6 & 1- \end{bmatrix} \frac{1}{1-} = 1- P \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 3- & ٠,٥- \\ ١,٥- & ٢,٥- \end{bmatrix} \frac{1}{٢,٥-} = 1- P \begin{bmatrix} 3 & ١,٥- \\ ٠,٥- & ٢,٥ \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 3- & ٠ \\ 1 & 6- \end{bmatrix} \frac{1}{٦-} = 1- P \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ 1 & 3- \end{bmatrix} \frac{1}{٦-} = 1- P \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ ٠ & 3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ 1٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & ٤- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \frac{1}{٢} = \underline{\text{س}}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ 1٠ \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} 3- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix} \quad (11) \text{ أوجد س:}$$

$$\begin{bmatrix} ١٧,٥ \\ ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥- \\ ٣٥ \end{bmatrix} \frac{1}{٢} =$$

في التمرينين (١٢-١٣)، أوجد قيمة كل محدد.

$$120- = 7٠- 7٠- = \begin{vmatrix} 1٠ & 3- \\ ٢٠ & ٦ \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$9 = ٢٧ - ٣٦ = \begin{vmatrix} ٩ & ٦ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} \quad (13)$$



(١٤) هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح.

$$\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا ، لا يحمل ضربها مصفوفة الوحدة

في التمارين (١٥-١٨)، حدد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي. في حال وجوده أوجد المصفوفة وفي حال عدم وجوده اشرح السبب.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{9} = P^{-1} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (١٥)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{12} = P^{-1} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (١٦)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = P^{-1} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (١٧)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} = P^{-1} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (١٨)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (١٩) \text{ أوجد س: } \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 3 \\ 24 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} - \underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (٢٠) \text{ حل المعادلة: } \checkmark$$

ص - س ١٩ ٢٠ في الصفحة القادمة

حل :-  
رقم (١٩) ص ٥٩

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}} \times \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}} \times \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}$$

رقم (٢٠) ص ٥٩

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \underline{\underline{U}} \times \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}} \times \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}} \times \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \underline{\underline{U}}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ . & . \end{bmatrix} \frac{1}{2} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ . & . \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}$$

### حل نظام من معادلتين خطيتين

## Solving System of Two Linear Equations

## المجموعة ٢ تمارين أساسية

في التمرين (١-٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محدداً مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات و مصفوفة الثوابت.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 5 &= س + ص \\ 4 - &= س - 2ص \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 5s + 2v \\ 2 &= s + v \end{aligned} \right\} (2)$$

في التمرين (٣-٤) ، اكتب المعادلات المصغورية التالية على شكل نظام معادلات.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2- & 1- \end{bmatrix} \quad (4)$$

في التمارين (٥-٧)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

$$\left. \begin{aligned} 5 &= 3ص + س \\ 6 &= 4ص + س \end{aligned} \right\} (5) \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - = \text{ص} 3 - \text{س} \\ 0 = \text{ص} 16 + \text{س} 0 - \end{array} \right\} (6) \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} \xi - &= \text{ص} 5 + \text{س} \\ \sigma - &= \text{ص} 6 + \text{س} \end{aligned} \right\} (V) \checkmark$$



$$\text{مثال ٤} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} \times \underline{P} = \underline{e} \quad \underline{u} = \underline{e} \times \underline{P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} = \underline{P}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{e}$$

$$1 = 0 \quad 0 = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{مثال ٥} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 = 1 \quad 0 = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{مثال ٦} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1 = 1 \quad 1 = 0$$



في التمارين (٨-١١)، بين ما إذا كان لنظام معادلات حلاً وحيداً أم لا.

$$\left. \begin{aligned} 20س + 5ص &= 240 \\ 0 &= 20س + ص \end{aligned} \right\} (٨)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} = 400 \neq 0 \quad \text{حل وحيد}$$

$$\left. \begin{aligned} 3س + 2ص &= 10 \\ 6س + 4ص &= 16 \end{aligned} \right\} (٩)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{لا}$$

$$\left. \begin{aligned} 3س - \frac{2}{3}ص &= 3 \\ 7س - 1ص &= 7 \end{aligned} \right\} (١٠)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -3 + \frac{14}{3} = \frac{8}{3} \neq 0 \quad \text{حل وحيد}$$

$$\left. \begin{aligned} 20س + 5ص &= 145 \\ 30س - 5ص &= 125 \end{aligned} \right\} (١١)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 30 & -5 \end{vmatrix} = -100 - 150 = -250 \neq 0 \quad \text{حل وحيد}$$

في التمارين (١٢-١٤)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

$$\left. \begin{aligned} 2س + 3ص &= 4 \\ 3س - 6ص &= 7 \end{aligned} \right\} (١٢) \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} 2س + 3ص &= 7 \\ 2س - 5ص &= 1 \end{aligned} \right\} (١٣) \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} 2س + 4ص &= 10 \\ 3س + 5ص &= 14 \end{aligned} \right\} (١٤) \checkmark$$

(١٥) ينتج أحد المصانع أقلام رصاص و ٥ ممحاة تحتوي على ٥ ممحاة وقلمي رصاص ١٥٠٠ فلس. ويبلغ ثمن علبة أخرى تحتوي على ٧ ممحاة و ٥ أقلام ٢٦٥٠ فلساً. أوجد ثمن המחاة و ثمن القلم مستخدماً النظر الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 1000 \\ 2650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad \frac{1}{11} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1000 \\ 2650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 1000 &= 5س + 5ص \\ 2650 &= 7س + 5ص \end{aligned}$$

المحاة ٢٥٠ فلس، القلم ٢٥٠ فلس

### المجموعة من التمارين التمرينية

في التمرين (١-٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية، محدداً مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

$$\left. \begin{aligned} 3س + 4ص &= 7 \\ 2س &= 2 \end{aligned} \right\} (١)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: حل رسم ١٥، ١٤، ١٣، ١٢، ١١، ١٠، ٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١

حل

رقم (١٣) م ٦١

$$c = \frac{10}{0} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$1 = \frac{0}{0} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

$$10 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\{(0, 5)\} = 8 \text{ م}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = \Delta$$

رقم (١٣) م ٦١

$$7 = \frac{27}{12} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

$$12 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$1 = \frac{12}{12} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

$$27 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\{(1, 2)\} = 8 \text{ م}$$

$$12 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$c = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

رقم (١٤) م ٦١

$$c = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$7 = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\{(1, 2)\} = 8 \text{ م} \quad 1 = \frac{c}{c} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5 \quad 2 = \frac{7}{c} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

رقم (١٥) م ٦١ باستخدام قاعدة كرامر (المحظوظ)

$$25 = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 270 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$11 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$c = \frac{220}{11} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

$$240 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 270 & 7 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$20 = \frac{270}{11} = \frac{5\Delta}{\Delta} = 5$$

ملاحظة: في كل مرة نقوم بحساب

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} 11 = س + 2ص \\ 18 = 2س + 3ص \end{array} \right\} (2)$$

في التمارين (3-5)، استخدم النظر الضربي للمصفوفة لحل نظام المعادلات.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{تم 5}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

∴  $8 = س$  ،  $7 = ص$

$$\left. \begin{array}{l} 130 = س - ص \\ 120 = 2س + ص \end{array} \right\} (3) \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 = س + 2ص \\ 7 = س + 2ص \end{array} \right\} (4) \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = س + 2ص \\ 6 = س + 2ص \end{array} \right\} (5) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad \text{تم 6}$$

∴  $7 = س$  ،  $2 = ص$

في التمارين (6-8)، حل المعادلة المصفوفية إن أمكن:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

∴  $14 = س$  ،  $18 = ص$

في التمارين (9-12)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

$$\left. \begin{array}{l} 2, 1 = س, 3 - ص \\ 4, 6 = س, 8 + ص \end{array} \right\} (10) \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 = س + 1, 5 \\ 9 = 2س - 3, 5 \end{array} \right\} (9) \checkmark$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \\ 2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 = \frac{س}{5} - \frac{ص}{5} \\ 5 = \frac{2س}{5} - \frac{3ص}{5} \end{array} \right\} (11) \checkmark$$

$$1 = \frac{9}{\Delta} = \frac{ص}{\Delta} = ص \quad , \quad 4 = \frac{1}{\Delta} = \frac{س}{\Delta} = س$$



$$\text{رسم ٣} \quad \text{حل ١} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{رسم ٤} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{رسم ٥} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{رسم ٦} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$



(١٣) يقوم أحد مصانع الدهانات بمزج الألوان مع بعضها بعضًا لإنتاج ألوان مميزة. إذا مزج جزئين من اللون الأحمر إلى ستة أجزاء من اللون الأصفر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون البرتقالي شبيه بلون فاكهة اليقطين. وإذا مزج خمسة أجزاء من اللون الأصفر مع ٣ أجزاء من اللون الأحمر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون الأحمر الداكن شبيه بلون الفلفل الأحمر. تباع صفيحة اللون البرتقالي بـ ٢٥ دينارًا وصفيحة اللون الأحمر الداكن بـ ٢٨ دينارًا، علمًا أن كل صفيحة تحتوي على ٨ أجزاء.

(أ) اكتب نظام معادلات يمثل المسألة أعلاه.

نفرض أن سعر كل جزء من الدهان الأحمر هو  $x$  ، وسعر كل جزء من الدهان الأصفر هو  $y$

$$25 = 6y + 2x$$

$$28 = 5y + 3x$$

(ب) حل النظام مستخدمًا قاعدة كرامر، استنتج سعر كل جزء من الدهان الأحمر وسعر كل جزء من الدهان الأصفر.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25 \cdot 3 - 28 \cdot 6}{8} = \frac{75 - 168}{8} = \frac{-93}{8} = -11.625$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 25 & 2 \\ 28 & 3 \end{vmatrix} = 75 - 168 = -93$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6 \cdot 28 - 5 \cdot 25}{8} = \frac{168 - 125}{8} = \frac{43}{8} = 5.375$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 5 & 28 \end{vmatrix} = 168 - 125 = 43$$

∴ سعر كل جزء من الدهان الأحمر هو ١١,٦٢٥ دينار

، وسعر كل جزء من الدهان الأصفر هو ٥,٣٧٥ دينار

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25 \cdot 3 - 28 \cdot 6}{8} = \frac{75 - 168}{8} = \frac{-93}{8} = -11.625$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6 \cdot 28 - 5 \cdot 25}{8} = \frac{168 - 125}{8} = \frac{43}{8} = 5.375$$

دعم ١١ ص ٦٢

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 25 & 2 \\ 28 & 3 \end{vmatrix} = 75 - 168 = -93$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 5 & 28 \end{vmatrix} = 168 - 125 = 43$$

## اختبار الوحدة السابعة

(١) يبين الجدول درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة في ست مناطق.

المنطقة	الدرجة العظمى	الدرجة الصغرى
١	°٣٠	°٣٧-
٢	°٤٠	°٣٣-
٣	°٤٢	°١٤-
٤	°٣٧	°١-
٥	°٣٩	°٢٨-
٦	°٤٤	°٢-

(أ) اعرض البيانات في مصفوفة (في كل صف الدرجة العظمى والدرجة الصغرى لمنطقة). ما أبعاد هذه

المصفوفة؟

رتبة مصفوفة ٢ × ٦

$$\begin{bmatrix} ٣٧- & ٣٠ \\ ٣٣- & ٤٠ \\ ١٤- & ٤٢ \\ ١- & ٣٧ \\ ٢٨- & ٣٩ \\ ٢- & ٤٤ \end{bmatrix}$$

(ب) حدد  $P = I -$

في التمرينين (٢-٣)، أوجد الناتج.

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٧ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ١- & ٨ \end{bmatrix} \quad (٢)$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٢٠ & ٢٣ \\ ٣٠ & ١٢ & ٢٩ \\ ٢ & ٢٤ & ١٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٨- & ٧ & ٢٢ \\ ١١ & ١٥ & ٥ \\ ١٧- & ١٤ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٦ & ١٣ & ١ \\ ١٩ & ٣- & ٢٤ \\ ٢٠ & ١٠ & ٩ \end{bmatrix} \quad (٣)$$

في التمارين (٤-٧)، أوجد ناتج ضرب كل مما يأتي إن أمكن مع ذكر السبب وفي حالة عدم إمكانية الضرب اكتب "غير محدد".

(٢ × ٢) (٢ × ٣)  
تساوي

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 12 & 7 \\ 02 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad (٤)$$

$$\begin{bmatrix} 30- & 9- \\ 12 & 73- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 4- & 21 \end{bmatrix} \quad (٥)$$

(٣ × ٢) (٣ × ٣)  
غير متساوي  
حاصل ضرب غير محدد

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 0- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 9 \\ 7 & 2 & 8- \\ 1 & 8- & 63 \end{bmatrix} \quad (٦)$$

(٢ × ٢) (٢ × ٢)  
تساوي

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (٧)$$

في التمرينين (٨-٩)، أوجد محدد كل مصفوفة.

$$13- = (4 \times 0) - (1 \times 7-) = \Delta \quad \begin{bmatrix} 7- & 7- \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (٨)$$

$$1- = (0 \times ٢-) - (٩ \times 1) = \Delta \quad \begin{bmatrix} ٥- & 1 \\ 9 & 2- \end{bmatrix} \quad (٩)$$

في التمرينين (١٠-١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة وإذا فاكتمل لا يوجد.

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ 7 & 3- \end{bmatrix} \frac{1}{7} = \bar{P} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (١٠)$$

$$\Delta = \text{صفر} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 17- & 14- \end{bmatrix} \quad (١١)$$

لا يوجد نظير ضربي

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} \quad (١٢)$$

في التمارين (١٢-١٧)، حل في س.

$$\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} \quad (١٣)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٢)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} \quad \therefore$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٣)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} \quad (١٤)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \underline{\underline{س}}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٥) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} 3 + \underline{\underline{س}} \quad (١٦) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{8} = \underline{\underline{س}} \quad (١٧)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{4} = \underline{\underline{س}}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = ص - س \\ 4 = 2ص - س \end{array} \right\} \text{حل النظام:} \quad \text{مستخدمًا النظر الضري.} \quad (١٨) \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 3ص + 5ص \\ 4 = 3ص - س \end{array} \right\} \text{حل النظام:} \quad \text{مستخدمًا طريقة كرامر.} \quad (١٩) \checkmark$$

(٢٠)  $\checkmark$  اكتب مصفوفتين  $١ \times ١$ ،  $ب$  كل منهما من الرتبة  $٢ \times ٢$ . أثبت أن ضرب المصفوفات هو غير إبدالي.

(٢١) هل كل مصفوفة مما يلي هي النظر الضري للأخرى؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

.. كل مصفوفة هي نظير نظري للمصفوفة الأخرى

(٢٢)  $\checkmark$  اشترت ١٠ قرنفلات و ٥ أقحوانات بمبلغ ١٢,٥٠٠ دينارًا. وبعد ظهر اليوم نفسه اشترت ٥ قرنفلات و ٨

أقحوانات بمبلغ ١١,٧٥٠ دينارًا. فما سعر القرنفلة الواحدة والأقحوانة الواحدة باستخدام المصفوفات؟

$$\begin{array}{l} 10س + 5ص = 12500 \\ 5س + 8ص = 11750 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12500 \\ 11750 \end{bmatrix}$$



$$\text{رسم ۱۵) ص ۷۷} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} = \text{ص}$$

$$\text{رسم ۱۶) ص ۷۷} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} + \text{ص ۴}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \text{ص ۴}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \text{ص}$$

$$\text{رسم ۱۸) ص ۷۷} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \text{ص} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ص} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{رسم ۱۹) ص ۷۷} \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = \frac{A}{\Delta} = \frac{5\Delta}{\Delta} = \text{ص} \quad \Delta = \frac{A}{\Delta} = \frac{5\Delta}{\Delta} = \text{ص} \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\text{رسم ۲۰) ص ۷۷} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{ص} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{ص}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{ص} \times \text{ص}$$

$$\text{ص} \times \text{ص} \neq \text{ص} \times \text{ص} \therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{ص} \times \text{ص}$$

$$\text{رسم ۲۲) ص ۷۷} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 11 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{50} = \begin{bmatrix} \text{ص} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ص} = 50, \text{ص} = 1 \quad \begin{bmatrix} 50 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

ص = ۵۰ و ۱ = ص. ص = ۵۰ و ۱ = ص. ص = ۵۰ و ۱ = ص.

## تمارين إثرائية

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{يوجد نظير ضربى لـ } P$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{نظير لـ } P$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P + P$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{يوجد نظير ضربى لـ } P + P$$

$$(1) \text{ لنعتبر } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(أ) هل للمصفوفات:  $P, B, P+B$  نظير ضربى؟

(ب) أوجد  $P^{-1}, B^{-1}, (P+B)^{-1}$ .

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (P+B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

(ج) وضح ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة:

إذا كانت  $P, B$  مصفوفتان ذات نظير ضربى،  $P+B$  هي مصفوفة ذات نظير ضربى فإن

$$(P+B)^{-1} = P^{-1} + B^{-1} \quad \text{العبارة خاطئة}$$

(د) أعط مثلاً عن مصفوفتين ذات نظير ضربى شرط ألا يكون لمصفوفة مجموعتهما نظيراً ضربياً.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P + B$$

المصفوفات  $P, B$  ليس لهما نظير ضربى، أما المصفوفة  $(P+B)$  ليس لها نظير ضربى

$$(2) \text{ لنعتبر } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(أ) \text{ أوجد } P+B, \text{ ثم } (P+B)^{-1} \quad P+B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(P+B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(ب) أوجد  $P \times B, B \times P$  ثم  $P+B$ . قارن بين إجابتك في (ب)، (أ).

$$P \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B \times P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad P+B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P \times B \neq B \times P \quad \text{لذلك } P+B \text{ ليس له نظير ضربى}$$

$$(P+B)^{-1} \neq P^{-1} + B^{-1} \quad \text{لذلك العبارة خاطئة}$$

(ج) طبق الخطوتين (أ)، (ب) باستخدام  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$   $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(u + p)y: \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 7 \end{bmatrix} = C\underline{u} + \underline{u} \times \underline{p} \cdot \underline{c} + \underline{p}$$

(أ) مثل المسألة أعلاه على شكل نظام معادلتين من متغيرين.

$$c = 40 - 5 \times 3$$

(ب) اکتب نظام معادلات علی شکل معادله مصغریه:  $\underline{A} \times \underline{S} = \underline{B}$  ،

حيث  $A$  هي مصفوفة مربعة من الرتبة  $2 \times 2$ ،  $\begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix}$ ،  $B$  من الرتبة  $2 \times 1$ .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج) أوجد محدد المصفوفة  $A$ . هل للمصفوفة  $A$  نظير ضربي؟ إذا كان لها نظيراً ضربياً فأوجد  $A^{-1}$ .

$$|z| = 9 + 10 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = |P|$$

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ c & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ c & r \end{bmatrix} \frac{1}{1} = \frac{1}{1} P$$

(د) أوجد قيم  $s$ ،  $v$  باستخدام ١-١.

$\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(د) حل نظام معادلات مستخدمًا قاعدة كرامر:

~~$$11 = \frac{\varphi \Delta}{\Delta} = \frac{\varphi}{1} = \frac{r-0}{0-r} = \Delta \quad \frac{r-0}{0-r} = \Delta$$~~



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{9}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(٤) لنأخذ المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = I_3$$

(أ) احسب  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3}$ .

$$[\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}] [\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}] = \underline{P} \times \underline{P} = \underline{P}$$

(ب) لكل عدد حقيقي  $s$ ، نعتبر المصفوفة  $M(s)$ ، حيث إن:

[illegible]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (2) \square$$

۲. س، ص عددان حقیقیان، احسب  $m(s) \times m(v)$ .

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳. برهنه آن:  $m(s) \times m(v) = m(s + v)$ .

$$(u+v)_C = (u)_C \times (v)_C \therefore \begin{bmatrix} \frac{(u+v)_C}{u+v} & u+v & 1 \\ u+v & 1 & . \\ 1 & . & . \end{bmatrix} = (u+v)_C$$



تمرّن

١-٨

التاريخ الهجري: ..... التاريخ الميلادي: .....

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

## The Unit Circle in the Coordinate Plane

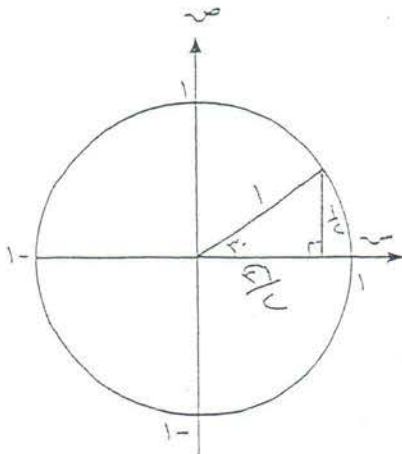
المجموعة التمارين الأساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

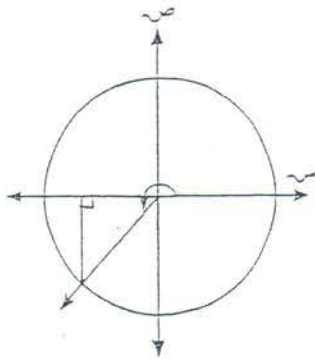
القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٥٤٥	$\frac{\pi}{2}$
١٣٥	$\frac{\pi}{4}$
١٨٠	$\pi$
١٥٠	$\frac{\pi}{6}$
٢٢٥	$\frac{5\pi}{4}$
١٥٠	$\frac{5\pi}{6}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثم أوجد كلًا من:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

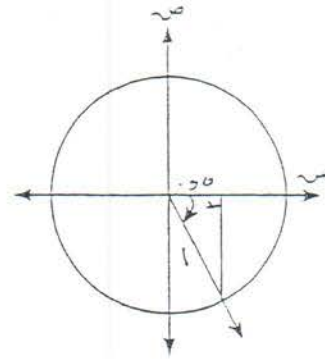
- (أ) جا ٣٠° =  $\frac{1}{2}$
- (ب) جتا ٣٠° =  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (ج) ظا ٣٠° =  $\frac{\sqrt{3}}{1}$
- (د) ظلّا ٣٠° =  $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (هـ) قتا ٣٠° =  $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- (و) قتا ٣٠° =  $2$



في التمرينين (٣-٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكل من:



(٤) ٢٢٥°  
 إحداثيات النقطة المثلثية  
 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$   
 جيبا ٢٢٥° =  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 ظا ٢٢٥° =  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



(٣) ٣٣٠°  
 إحداثيات النقطة المثلثية  
 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$   
 جيبا ٣٣٠° =  $-\frac{1}{2}$   
 ظا ٣٣٠° =  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

في التمارين (٥-٨)، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكل من الزوايا التالية. ثم قرب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

(٥) ٣٢° جيبا ٣٢° = ٠.٥٣ ظا ٣٢° = ٠.٦٤

(٦) ٤٥° جيبا ٤٥° = ٠.٧١ ظا ٤٥° = ١

(٧) ٩٧° جيبا ٩٧° = ٠.٩٧ ظا ٩٧° = ١٠

(٨) ١٥٤° جيبا ١٥٤° = ٠.١٥ ظا ١٥٤° = ١٠

في التمارين (٩-١١)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكل من الزوايا التالية:

(٩)  $\frac{\pi}{4}$  جيبا  $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ظا  $\frac{\pi}{4} = ١$

(١٠) ٦٠° جيبا ٦٠° =  $\frac{1}{2}$  ظا ٦٠° =  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(١١) ٠° جيبا ٠° = ٠ ظا ٠° = ٠

في التمارين (١٢-١٥)، في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا التالية:

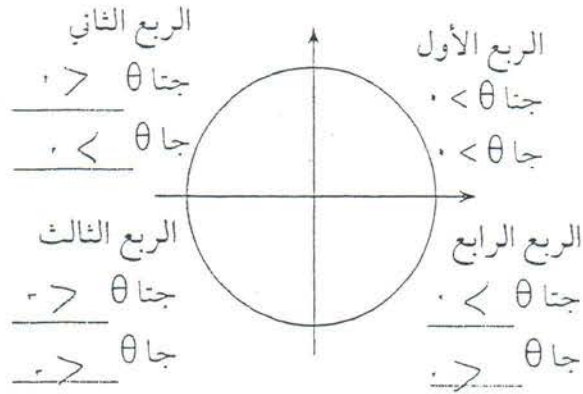
(١٢) ١٥٠° ضلع الربع الثاني

(١٣)  $\pi$  ضلع المحور السالب

(١٤) ٦٠° ضلع الربع الرابع

(١٥)  $\frac{\pi}{6}$  ضلع الربع الثالث

(١٦) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



(ب) افترض أن جتا θ سالبة جا θ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (ج) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٧) الكتابة في الرياضيات: فسر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٥٠°، ٥٩°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

يا سمدام لنقطه طرئيه  
 ٥٠° ← (١، ٠)  
 ٩٠° ← (٠، ١)  
 ١٨٠° ← (-١، ٠)  
 ٢٧٠° ← (٠، -١)

في التمارين (١٨-٢٥)، استخدم المنقلة وارسم كلًا من الزوايا التالية على دائرة الوحدة، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٩)  $\frac{\pi}{3} = \alpha$

(١٨)  $30^\circ = \alpha$

(٢١)  $\frac{\pi}{2} = \alpha$

(٢٠)  $90^\circ = \alpha$

(٢٣)  $\frac{5\pi}{6} = \alpha$

(٢٢)  $135^\circ = \alpha$

(٢٥)  $\frac{11\pi}{6} = \alpha$

(٢٤)  $240^\circ = \alpha$

(٢٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(ب)  $170^\circ$

(أ)  $190^\circ$

(ج)  $110^\circ$

(د)  $350^\circ$

(٢٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(ب)  $225^\circ$

(أ)  $45^\circ$

(د)  $330^\circ$

(ج)  $315^\circ$

## المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).



(١) جتا  $(-30^\circ) = \frac{1}{2}$



(٢) جا  $(120^\circ) = \frac{1}{2}$



(٣) ظا  $(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$



(٤) قتا  $(150^\circ) = \sqrt{3}$

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(ب)  $-270^\circ$

(أ)  $-320^\circ$

(د)  $\frac{\pi 13}{9}$

(ج)  $\frac{\pi 5}{3}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(ب)  $135^\circ$

(أ)  $\frac{\pi 7}{4}$

(ج)  $215^\circ$

(د)  $\frac{\pi 3}{4}$

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها  $\frac{\pi}{3}$  هي:

(ب)  $255^\circ$

(أ)  $\frac{\pi 11}{6}$

(ج)  $\frac{\pi 5}{3}$

(د)  $\frac{\pi 7}{8}$



(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي  $-٢٢٥^\circ$ . فإن النقطة التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(د)  $(-1, 1)$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (أ)$$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (ج)$$

$$(٩) [\text{جا}(-١٣٥^\circ)] + [\text{جتا}(-١٣٥^\circ)] =$$

$$\frac{1}{4} \quad (ب)$$

(د) صفر

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \quad (ج)$$

## العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

## Relations Between Trigonometric Functions (1)

### المجموعة الأولى: أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية  $\theta$ .

$$(أ) \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$(ب) \sin(\theta - \pi) = -\sin \theta$$

$$(ج) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$(د) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta$$

(٢) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية  $\theta$ .

$$(أ) \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$(ب) \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$(ج) \cos(-\theta) = \cos \theta$$

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية  $\theta$ .

$$(أ) \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\cos \theta =$$

$$(ب) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\cos \theta =$$

$$(ج) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\cos \theta =$$

$$(د) \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos \theta =$$

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

$$(أ) \quad ١٥٠ جا = (١٨٠ - ٣٠) جا = ٣٠ جا = \frac{1}{2}$$

$$(ب) \quad ظا (-٢٢٥) = - ظا ٢٢٥ = - ظا (١٨٠ + ٤٥) = - ظا ٤٥ = - ١$$

$$(ج) \quad جتا (-١٣٥) = جتا ١٣٥ = جتا (١٨٠ - ٤٥) = جتا ٤٥ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

$$(أ) \quad جتا \frac{\pi}{6} = جتا (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) = جتا \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(ب) \quad جا (-\frac{\pi}{3}) = - جا \frac{\pi}{3} = - جا (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = - جا \frac{\pi}{6} = - \frac{1}{2}$$

$$(ج) \quad ظا \frac{\pi}{6} = ظا (\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) = ظا (-\frac{\pi}{3}) = - ظا \frac{\pi}{3} = - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

$$(أ) \quad ظتا ٣٩٠ = ظتا (٣٦٠ + ٣٠) = ظتا ٣٠ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(ب) \quad جا ٣٩٠ = جا (٣٦٠ + ٣٠) = جا ٣٠ = \frac{1}{2}$$

$$(ج) \quad قتا ٤٥٠ = قتا (٣٦٠ + ٩٠) = قتا ٩٠ = ١$$

$$(د) \quad قا \frac{\pi}{4} = قا (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = قا \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٧) إذا كانت جا $\theta = ٢$ ،	فإن جا $(\theta + \pi) = ٢$ ،	(أ)	<input type="radio"/>
(٨) إذا كانت جتا $\theta = \frac{2}{3}$	فإن قا $\theta = \frac{3}{2}$	(ب)	<input type="radio"/>
(٩) إذا كانت ظا $\theta = ٣$	فإن ظتا $(\theta + \pi) = ٣$	(أ)	<input type="radio"/>
(١٠) إذا كانت جا $\theta = \frac{1}{0}$	فإن قتا $(\theta + \pi) = ٥$	(ب)	<input type="radio"/>

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

$$(أ) \quad جتا (-\pi) - جتا (-\theta) + جتا (\theta + \pi) + جتا (\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$= جتا \theta - جتا \theta + جتا \theta - جتا \theta = ٠$$

$$(ب) \quad جتا (\theta + \pi) - جتا (\frac{\pi}{2} + \theta) + جتا (\theta - \pi) + جتا (\frac{\pi}{2} + \theta)$$

$$= جتا \theta + جتا \theta - جتا \theta - جتا \theta = ٠$$

✓ (١٢) حل المعادلات التالية:

(أ)  $\frac{1}{2} + \text{جتا س} =$

(ب)  $\sqrt{3} = \text{ظتا س}$

(ج)  $2 + \sqrt{2} = \text{جا س}$

(د)  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جا (٤ س)}$

(هـ)  $\left(\frac{\pi}{4} + 2\text{س}\right) \text{جتا} = \left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right) \text{جتا}$

(و)  $\left(\frac{\pi}{6} - \text{س}\right) \text{جا} = \left(2\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) \text{جا}$

(ز)  $1 = \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{8}\right)$

(ح)  $\text{ظا}(\pi + 2\text{س}) = \text{ظتا}(2\text{س})$

مراجعة صدق (١٢) من في الصفحة القادمة



رقم ٧٧ (١٢)  $\times$

(٥) جابجس =  $\frac{1}{c}$   
جاس =  $\frac{1}{c}$

نسبت تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

زس =  $\frac{\pi}{2} + \pi \text{ لـ } c$

أو س =  $\frac{\pi}{2} - \pi \text{ لـ } c$  (له دهر)

(ج) جاس =  $\frac{2}{c}$

جاس =  $\frac{2}{c}$

نسبت تقع في الربع الأول أو الثاني

زس =  $\frac{\pi}{2} + \pi \text{ لـ } c$  (له دهر)

أو س =  $\frac{\pi}{2} - \pi \text{ لـ } c$

$\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{2} =$

(١١) جابجس =  $\frac{3}{c}$

ظاس =  $\frac{3}{c}$

ظاس =  $\frac{\pi}{7}$

س =  $\frac{\pi}{7} + \pi \text{ لـ } c$  (له دهر)

(٥) جاب (زس) =  $\frac{3}{c}$

جاس =  $\frac{3}{c}$

نسبت تقع في الربع الثاني أو الثالث

زس =  $\frac{\pi}{3} + \pi \text{ لـ } c$

س =  $\frac{\pi}{3} + \pi \text{ لـ } c$

أو س =  $\frac{\pi}{3} - \pi \text{ لـ } c$

زس =  $\frac{\pi}{3} + \pi \text{ لـ } c$

(له دهر)  $\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{3} =$

(٥) جاب (زس) =  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \text{ لـ } c\right)$  جاب (زس) =  $\left(\frac{\pi}{2} - \pi \text{ لـ } c\right)$

ربط  $\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi \text{ لـ } c$  أو  $\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} + \pi \text{ لـ } c$

س =  $\pi \text{ لـ } c + \pi$  أو  $\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{c} = \pi \text{ لـ } c$

$\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{3} = \pi$

(٥) جاب  $\left(\frac{\pi}{3} - \pi \text{ لـ } c\right) = \left(\frac{\pi}{3} + \pi \text{ لـ } c\right)$

لـ  $\frac{\pi}{3} - \pi \text{ لـ } c = \pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{3} - \pi \text{ لـ } c = \frac{\pi}{3}$  أو  $\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{3} = \pi \text{ لـ } c$

$\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{3} = \pi$  أو  $\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{c} = \pi$

$\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{18} = \pi$

(٦) جاب  $\left(\frac{\pi}{18} + \pi \text{ لـ } c\right) = \left(\frac{\pi}{18} - \pi \text{ لـ } c\right)$

لـ  $\frac{\pi}{18} - \pi \text{ لـ } c = \pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{18} - \pi \text{ لـ } c = \frac{\pi}{18}$

$\pi \text{ لـ } c + \frac{\pi}{18} = \pi$

(له دهر)

(١) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها  $\frac{1}{2}$  هي:

(ب) جتا  $(-0.240)$

جا  $(-0.330)$

(د) ظا  $0.765$

(ج) ظتا  $(-0.100)$

(٢) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ :

جا  $(\frac{\pi 35}{3})$

(أ) جتا  $\frac{\pi 31}{6}$

(د) فا  $\frac{\pi 13}{3}$

(ج) ظا  $\frac{\pi 17}{6}$

(٣) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة

(ب)

(ب)

ظا  $0.225 - 3$  جا  $0.123 + 2$  جتا  $(-0.960) = -\frac{2}{3}$

(ب)

(أ)

فتا  $\frac{\pi 19}{6} - 2$  فا  $\frac{\pi 13}{6} +$  جا  $(\frac{\pi 8}{3}) -$  جتا  $(\frac{\pi 17}{6}) = 2$

(ب)

(أ)

ظتا  $\frac{\pi 19}{4} - 3$  ظا  $(\frac{\pi 11}{4}) +$  جتا  $(\frac{\pi 24}{3}) - 2$  جا  $(\frac{\pi 45}{6}) = 1$

(ب)

(ب)

فا  $(-0.315) + 2$  فتا  $0.085 - 2$  جتا  $0.855 = \sqrt{2}$

(٤) إن قيمة المقدار  $\cos(\theta - \pi/2) - \sin(\theta + \pi/2) + \cos(\theta + \pi/2) + \sin(\theta)$  هي:

صفر

(أ) ١ -

(د) ١

(ج)  $\frac{1}{2}$

(٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(ب)

☒

إذا كان  $\sqrt{3} = \cos$  فإن مجموعة الحل  $\emptyset$

☒

☒

إذا كان  $\sin = \frac{1}{2}$  فإن  $\sin = \frac{\pi}{3}$

(ب)

☒

إذا كانت  $\sin = \frac{\pi}{6}$  فإن  $\cos = \frac{1}{2}$

(ب)

☒

مجموعة حل  $\cos = 0, 3$  هي  $\emptyset$

☒

(أ)

ظا (١٥)  $\pi = \cos$

## العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

## Relations Between Trigonometric Functions (2)

### المجموعة المقارنتين أساسية

(١) إذا كانت  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ،  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية  $\theta$ .  $\sin \theta + \cos \theta = 1$   
رمز  $\theta = 30^\circ$  ،  $\cos \theta = 0.866$  ،  $\sin \theta = 0.5$

(٢) إذا كانت  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ،  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد  $\sin \theta$ ،  $\cos \theta$ .  $\sin \theta + \cos \theta = 1$   
رمز  $\theta = 45^\circ$  ،  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ،  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(٣) إذا كانت  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ،  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد  $\sin \theta$ ،  $\cos \theta$ .  $\sin \theta + \cos \theta = 1$   
رمز  $\theta = 60^\circ$  ،  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  ،  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

في التمارين (٤ - ٧)، أوجد قيمة كل ما يلي:

$$(٤) (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$(٥) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$(٦) 1 + \sin^2 \theta - (\sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$(٧) 9 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 9 \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 10 \cos^2 \theta - 1$$

في التمارين (٨ - ١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

$$(٨) 1 + \sin^2 \theta = (\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \sin^2 \theta = (\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1$$

$$(٩) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)$$

$$(١٠) (1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin^2 \theta) = 1 - \sin^4 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$



$$(11) \quad \theta^2 \text{ جا } 2 + \theta^2 \text{ جا } 3 = \theta^2 \text{ جا } 1 + \theta^2 \text{ جا } 4$$

$$\text{الاجابة } 3 \text{ جا } 3 = \theta^2 \text{ جا } 1 + \theta^2 \text{ جا } 3 + \theta^2 \text{ جا } 4$$

في التمارين (12 - 16)، حل المعادلات التالية حيث  $\theta \in (0, \pi/2)$  حيث المقام = 0 أو  $\theta = \pi/2$  مرصها

$$* (12) \quad \frac{\theta^2 \text{ جا } 2}{\theta \text{ جا } 1} = \frac{\theta^2 \text{ جا } 3}{\theta \text{ جا } 4} \quad \text{واجا جا } \theta = \theta^2 \text{ جا } 2 \quad \text{أو } \theta^2 \text{ جا } 3 = \theta^2 \text{ جا } 1$$

$$* (13) \quad \frac{\theta^2 \text{ جا } 2}{\theta \text{ جا } 1} = \theta \text{ جا } 3 \quad \text{واجا جا } \theta = \theta^2 \text{ جا } 2 \quad \text{أو } \theta^2 \text{ جا } 3 = \theta^2 \text{ جا } 1$$

$$* (14) \quad \frac{\theta^2 \text{ جا } 2}{\theta \text{ جا } 1} = \frac{\theta^2 \text{ جا } 3}{\theta \text{ جا } 4} \quad \text{واجا جا } \theta = \theta^2 \text{ جا } 2 \quad \text{أو } \theta^2 \text{ جا } 3 = \theta^2 \text{ جا } 1$$

$$(15) \quad \theta^2 \text{ جا } 2 + \theta^2 \text{ جا } 3 = 1 - \theta \text{ جا } 1 \quad \text{حيث } \theta < \pi/2$$

$$= (1 - \theta \text{ جا } 1) (1 - \theta \text{ جا } 2)$$

$$\text{ن: جا } \theta = \frac{1}{\theta} \quad \text{و جا } \theta = 1 - \theta \text{ جا } 1$$

$$(16) \quad \theta^2 \text{ جا } 2 = \theta^2 \text{ جا } 3 \quad \theta^2 \text{ جا } 1 = \theta^2 \text{ جا } 4 \quad \theta^2 \text{ جا } 2 = \theta^2 \text{ جا } 3$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$

### المجموعة ب تمارين تعزيزية

(1) إذا كانت  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، تقع في الربع الثالث. فإن جا  $\theta =$

$$(ب) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(أ) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(د) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) إذا كانت  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، تقع في الربع الرابع. فإن ظا  $\theta =$

$$(ب) \quad \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(أ) \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(ج) \quad \frac{2}{\sqrt{5}}$$

في التمارين (٣ - ٨)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(ب)

(ب)

$$(٣) \quad \text{جتا } \theta \times \text{جتا } \theta - \text{جتا } \theta = ٠$$

(ب)

(ب)

$$(٤) \quad \text{جتا } \theta - (\theta - \text{جتا } \theta) = ١$$

(ب)

(ب)

$$(٥) \quad ١ = (\text{جتا } \theta + \text{جتا } \theta)(\text{جتا } \theta - \text{جتا } \theta)$$

(ب)

(ب)

$$(٦) \quad \text{جتا } \theta \text{ جتا } \theta - \text{جتا } \theta - \text{جتا } \theta = ٠$$

(ب)

(أ)

$$(٧) \quad ١ - \text{جتا } \theta = \frac{\text{جتا } \theta}{١ - \text{جتا } \theta}$$

(ب)

(ب)

$$(٨) \quad \text{جتا } \theta + \text{جتا } \theta - \text{جتا } \theta = ٠$$

في التمرينين (٩ - ١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

$$\text{جتا } \theta \left( \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta} + \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta} \right)$$

$$(٩) \quad \text{جتا } \theta (\text{جتا } \theta + \text{جتا } \theta) = \text{جتا } \theta$$

$$\frac{١}{\text{جتا } \theta} \times \text{جتا } \theta = \left( \frac{\text{جتا } \theta + \text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta} \right) \text{جتا } \theta =$$

$$(١٠) \quad \frac{١}{\text{جتا } \theta - ١} = \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta - ١}$$

$$\frac{١}{\text{جتا } \theta - ١} = \frac{\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta}}{\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta} - \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta}} = \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta - \text{جتا } \theta}$$

## اختبار الوحدة الثامنة

(١) في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لـ  $\theta$  في الحالات التالية:

(أ)  $\theta = \frac{1}{3}$  الربع الأول أو الربع الثاني

(ب)  $\theta = 1$  محور السينات

(ج)  $\theta = 3$  الربع الرابع

(د)  $\theta = -\frac{7}{8}$  الربع الثاني أو الربع الثالث

(٢) إذا كان  $\theta = 4$  فأوجد:

(أ)  $\cos \theta = 1 + \theta = 1 + 4 = 5$

(ب)  $\sin \theta = \frac{1}{5}$

(ج)  $\tan \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{5}$

(د)  $\sec \theta = 1 + \left( \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{5}$

(٣) إذا كان  $\cos \theta \approx 0.38$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ)  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - 0.38^2} = 0.92$

(ب)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{0.92}{0.38} = 2.42$

(ج)  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{0.38} = 2.63$

(د)  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{0.92} = 1.09$

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ)  $\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

(ب)  $\cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

(ج)  $\cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

(٢)

$$\cos \theta + \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sin \theta} + \sin \theta - \cos \theta$$

$$\cos \theta - \cos \theta =$$

$$\cos \theta = 1 \times \cos \theta = (\cos \theta - \cos \theta) \cos \theta =$$

$$\frac{(\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1)}{(\cos \theta + 1)} + \cos \theta = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos \theta + 1} + \cos \theta$$

$$1 = \cos \theta - 1 + \cos \theta =$$

(٥) أثبت صحة ما يلي:

$$(1) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{\cos \theta} + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \sin^2 \theta$$

(٦) أثبت صحة المتطابقات التالية:

$$(1) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = (\cos \theta - \sin \theta) \times 1 = (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$(2) \cos \theta = \sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \sin \theta = \left( \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) \sin \theta$$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية:  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 

س أفع في الربع الأول أو الربع الرابع

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ (لـ } \theta \in [0, 2\pi])$$

$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ (لـ } \theta \in [0, 2\pi])$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

(ج)  $\cos \theta = 1$ 

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \text{ أو } \theta = 2\pi$$

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \text{ أو } \theta = 2\pi$$



## تمارين إثرائية

(١) تفكير ناقد: افترض أن  $\theta$  زاوية في الوضع القياسي، حيث  $\frac{1}{2} = \theta$  جتا،  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$  جا. هل من الممكن أن تكون  $\theta = 60^\circ$  أو  $\theta = 120^\circ$ ؟

جاء  $\theta = \frac{\pi}{6}$  ،  $\theta$  تقع في الربع الثاني، الثالث  
جاء  $\theta = \frac{5\pi}{6}$  ،  $\theta$  تقع في الربع الثالث، الرابع

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ)  $\sin 135^\circ + \cos 225^\circ - \tan 2^\circ + (-225^\circ) \cot 3^\circ + 330^\circ$

(ب)  $\sin 30^\circ + \tan 2^\circ - 120^\circ \cot 3^\circ + 210^\circ \tan 3^\circ + (-330^\circ)$

(ج)  $\sin \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{6} - \left( \frac{\pi}{3} \right) \cot \frac{\pi}{3} + \left( \frac{\pi}{6} \right) \tan \frac{\pi}{3}$

(د)  $\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \left( \frac{\pi}{4} \right) \cot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

(٣) أوجد قيمة:

(أ)  $\sin 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \sin 359^\circ + \cos 358^\circ$

(ب)  $\sin 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \sin 359^\circ + \cos 358^\circ$

(٤) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{(1 - \cos \theta) + \sin \theta}{(1 - \cos \theta) - \sin \theta}$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{(1 - \cos \theta) + \sin \theta}{(1 - \cos \theta) - \sin \theta}$$

رقم ٤٠٤٤

$$\textcircled{1} \text{ المقادير: } \varepsilon \cdot \bar{a} \cdot b \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} - \varepsilon \cdot a \cdot b =$$

$$\varepsilon \cdot \bar{a} \cdot b \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} - \varepsilon \cdot a \cdot b =$$

$$\frac{w}{r} = \frac{1}{r} \times w + \frac{\bar{c} \cdot 1}{c} - \frac{\bar{c} \cdot 1}{c} =$$

$$\textcircled{2} \quad r \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} + r \cdot \bar{c} \cdot b - r \cdot \bar{c} \cdot a = \bar{c} \cdot 1$$

$$\bar{c} \cdot 1 = \bar{c} \cdot 1 \times r + \frac{\bar{c} \cdot 1}{r} \times r - \bar{c} \cdot 1 \times r - \bar{c} \cdot 1 =$$

$$\textcircled{3} \quad \left( \frac{\pi \cdot \varepsilon}{r} - \frac{\pi \cdot \varepsilon}{r} \right) \bar{c} \cdot a + \left( \frac{\pi \cdot r}{r} - \frac{\pi \cdot r}{r} \right) \bar{c} \cdot b + \left( \frac{\pi \cdot 1}{r} + \frac{\pi \cdot \varepsilon}{r} \right) \bar{c} \cdot a =$$

$$\left( \frac{\pi \cdot \varepsilon}{r} \right) \bar{c} \cdot a + \left( \frac{\pi \cdot r}{r} \right) \bar{c} \cdot b + \left( \frac{\pi \cdot \varepsilon}{r} \right) \bar{c} \cdot a =$$

$$\frac{\pi}{r} \bar{c} \cdot a + \frac{\pi}{r} \bar{c} \cdot b - \frac{\pi}{r} \bar{c} \cdot a =$$

$$1 = \frac{1}{r} \times r + 1 - \frac{1}{r} =$$

$$\textcircled{4} \quad \left( \pi \cdot \varepsilon + \frac{\pi \cdot r}{\varepsilon} \right) \bar{c} \cdot a + \frac{\pi \cdot \varepsilon}{\varepsilon} \bar{c} \cdot b + \left( \pi \cdot \varepsilon + \frac{\pi \cdot r}{\varepsilon} \right) \bar{c} \cdot a + \left( \pi \cdot \varepsilon + \frac{\pi \cdot r}{\varepsilon} \right) \bar{c} \cdot b =$$

$$\frac{\pi}{\varepsilon} \bar{c} \cdot a + \frac{\pi}{\varepsilon} \bar{c} \cdot b - \frac{\pi}{\varepsilon} \bar{c} \cdot a + \frac{\pi}{\varepsilon} \bar{c} \cdot b =$$

$$c = \frac{\bar{c} \cdot 1}{c} + \frac{\bar{c} \cdot 1}{c} - 1 + 1 =$$

رقم ٤٠٤٤

$$\textcircled{1} \quad \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + \dots + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b = \bar{c} \cdot 1$$

$$\bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b - \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + \dots + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b =$$

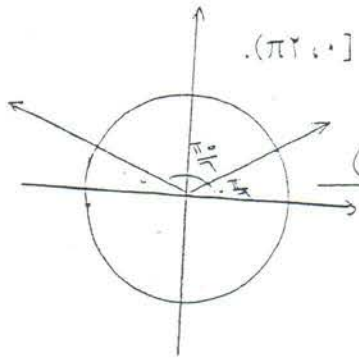
$$1 = \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b =$$

$$\textcircled{2} \quad 1 \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \dots + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a = \bar{c} \cdot 1$$

$$1 \cdot \bar{c} \cdot a + 1 \cdot \bar{c} \cdot a \cdot \varepsilon + \dots + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a =$$

$$1 \cdot \bar{c} \cdot a + 1 \cdot \bar{c} \cdot a \cdot \varepsilon + \dots + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{c} \cdot \bar{c} \cdot a =$$

$$1 = \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot b =$$



(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثم مثلها على دائرة الوحدة، حيث  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

$$0 = (2 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)$$

$$2 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 2 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ حيث } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (مرفوض)}$$

$$\frac{\pi}{3} = \theta \text{ أو } \frac{\pi}{2} = \theta$$

في التمرينين (٦-٧)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

$$(٦) \quad \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$(٧) \quad \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - 1} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{-\sin^2 \theta} = -\cot^2 \theta$$

$$\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - 1} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{-\sin^2 \theta} = -\cot^2 \theta$$

في التمرينين (٨-٩)، حل المعادلات المثلثية التالية:

$$(٨) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 0$$

$$(٩) \quad \sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

رسم ٩

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

$$0 = (\cos^2 \theta - 1)(\cos^2 \theta - 2)$$

$$\cos^2 \theta = 1 \text{ أو } \cos^2 \theta = 2$$

$$\cos \theta = 1 \text{ أو } \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \text{ أو } \theta = \pi$$

$$\cos \theta = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ أو } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$

$$\sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta - 2$$



## المستوى الإحداثي Coordinate Plane

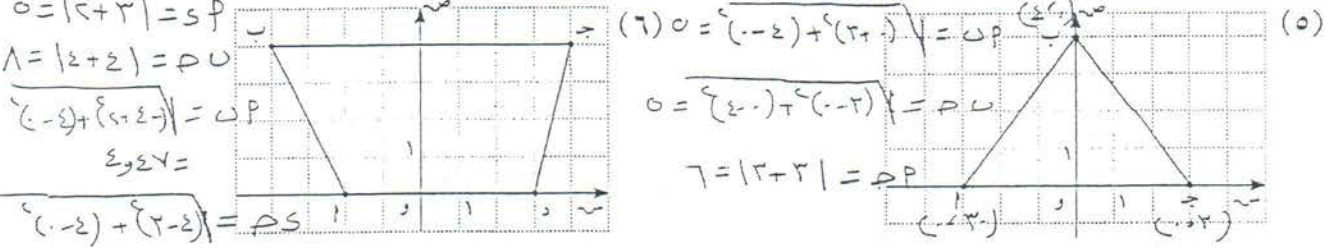
### المجموعة الثمانية

في التمارين (١-٤)، أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية. قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\begin{aligned} (1) \quad (3, -7) \text{ و } (9, 2) & \quad \text{المسافة} = \sqrt{(9-3)^2 + (-7-2)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} \approx 10.8 \\ (2) \quad (7, 2) \text{ و } (7, -2) & \quad \text{المسافة} = \sqrt{(7-7)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{0 + 16} = 4 \\ (3) \quad (0, 0) \text{ و } (8, -6) & \quad \text{المسافة} = \sqrt{(8-0)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \\ (4) \quad (4, -4) \text{ و } (4, 4) & \quad \text{المسافة} = \sqrt{(4-4)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{0 + 64} = 8 \end{aligned}$$

$$\text{المسافة} = \sqrt{(2+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \approx 5.7$$

في التمرينين (٥-٦)، أوجد محيط كل شكل من الأشكال التالية. قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



$$\therefore \text{محيط المثلث} = ٥ + ٦ + ٧ = ١٨$$

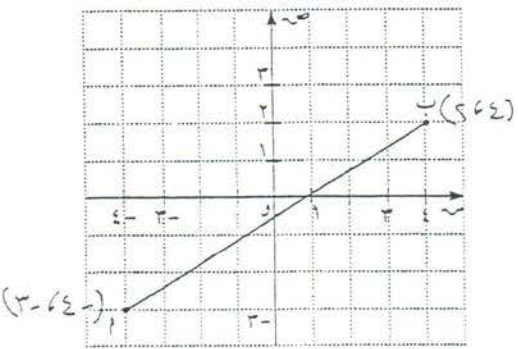
في التمارين (٧-١٠)، أوجد إحداثي نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة التالية، بمعلومية إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة.

$$\begin{aligned} (7) \quad \text{أ} (5, 2) \text{ و } \text{ب} (7, 0) & \quad \text{نقطة المنتصف} = \left( \frac{5+7}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (6, 1) \\ (8) \quad \text{أ} (14, 3) \text{ و } \text{ب} (10, 1) & \quad \text{نقطة المنتصف} = \left( \frac{14+10}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (12, 2) \\ (9) \quad \text{أ} (1, 4) \text{ و } \text{ب} (-4, -1) & \quad \text{نقطة المنتصف} = \left( \frac{1-4}{2}, \frac{4-1}{2} \right) = \left( -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \\ (10) \quad \text{أ} (3, 5) \text{ و } \text{ب} (3, 9) & \quad \text{نقطة المنتصف} = \left( \frac{3+3}{2}, \frac{5+9}{2} \right) = (3, 7) \end{aligned}$$

(١١) أ ب يمثل قطر دائرة، إحداثي أ (٨، ١-) وإحداثي ب (٠، ٧-)، أوجد إحداثي مركز الدائرة.

$$\text{مركز الدائرة} = \left( \frac{8+0}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (4, 4)$$

(١٢) أوجد طول أ ب مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



$$\text{المسافة} = \sqrt{(5-(-3))^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} \approx 11.3$$



إلى أقرب جزء من عشرة.  $\epsilon_4 = \sqrt{{}^c(9-7) + {}^c(7-5)} = 2$  ،  $\epsilon_3 = \sqrt{{}^c(6-7) + {}^c(7-5)} = 3$  أو ٣

$$0 = \frac{c(5-7) + c(5-0)}{2} = \frac{1}{2} P(7,0) - \frac{1}{2} P(7,7) + \frac{1}{2} P(7,2) - \frac{1}{2} P(7,3)$$

$$0.91 = \frac{C(0+2) + C(1+2)}{1} = 1.5C \quad (1-0.2) \leq (0.8-0.8) \leq (0.8-0.1) \leq (1.4)$$

(١٥) يقع منزل فيصل ٤ شرق ٢ شمال، ويقع نادي الرماية الذي يتسب

إليه فيصل ٢ غرب ٣ جنوب.

(أ) عيّن على المستوى الإحداثي موقع منزل فيصل وموقع نادي الرماية.

(ب) أوجد إحداثيي نقطة المنتصف بين النادي ومنزل فيصل.

$$\left(\frac{1}{5}, 1\right) = \left(\frac{3-2}{5}, \frac{5-2}{5}\right) = \text{نقطه المنتصف}$$

(ج) أوجد المسافة بين منزل فيصل والنادي.

$$\frac{1900 = \sqrt{(3+c) + (c+2)} \times 70}{1900 \text{ كيلومتر}}$$

(١٦) تفكير ناقد. إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف قطعة مستقيمة، فما

هي الصفة التي سوف تتمتع بها إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة؟

داخلہ بیات ایندات کل منها مکتوب جمعہ لآخر | نکال

ماصداهای، اصداای کل منها مقله من جمعی للآخر

(١٧) (أ) ما المسافة بين نقطة الأصل والنقطة (٤، ٣)؟  $\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = 5$

(ب) أوجد ثلاث نقاط أخرى تكون على المسافة نفسها من نقطة الأصل.

~~$(2 - 1) \cdot (2 - 1) \cdot (2 - 1)$~~

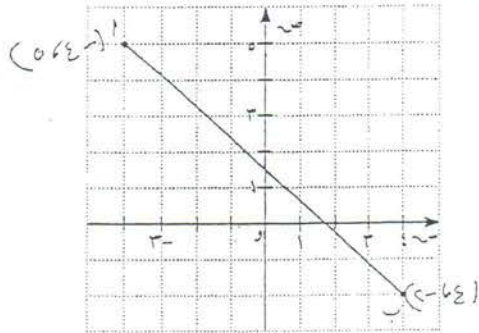
## المحمدة بنت عمار بن عوف بن كعب

في التمارين (١ - ٥)، اختر من القائمة الأولى ما يناسب في القائمة الثانية لتحصل على عبارة صحيحة.

القائمة الأولى	القائمة الثانية
المسافة بين النقطتين بالوحدات الطولية	(أ) ٢
(١) $(0, 3), (4, 0)$ هي: <u>د</u>	(ب) ٣
(٢) $(0, 2), (4, 2)$ هي: <u>ح</u>	(ج) ٤
(٣) $(6, 3), (6, 5)$ هي: <u>پ</u>	(د) ٥

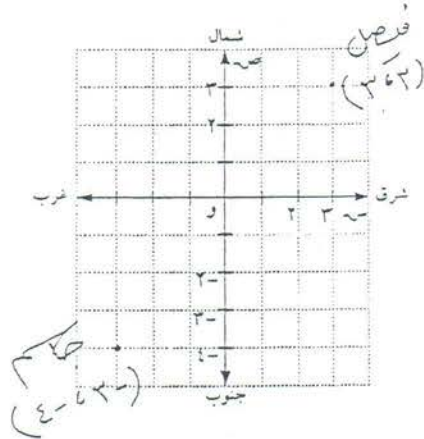
القائمة الأولى	القائمة الثانية
في نقطة المنتصف لـ $\overline{AB}$ حيث	(أ) $(5, 5)$
(٤) $(2, 12)$ ، ب $(-2, 9)$ هي: (ك)	(ب) $(5, 5)$
(٥) $(12, 0)$ ، ب $(2, 11)$ هي: (د)	(ج) $(5, 7)$
	(د) $(5, 7)$

(٦) في الشكل المقابل أوجد طول  $\overline{AB}$  مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



$$P = \sqrt{(5 - (-5))^2 + (-4 - 4)^2} = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} \approx 12.8$$

(٧) (أ) حدد بيانياً مواقع كل من فيصل وجاسم على شبكة إحداثيات باعتبار أن المحطة الفرعية هي نقطة الأصل و.

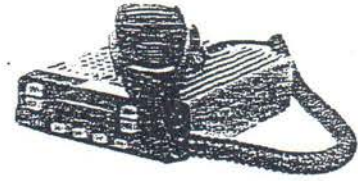


أنا على بعد ٣ كم شمالاً و ٣ كم شرقاً من المحطة الفرعية وسوف نلتقي في منتصف الطريق بين موقعينا.



فصل

أنا على بعد ٣ كم جنوباً و ٣ كم غرباً من المحطة الفرعية.



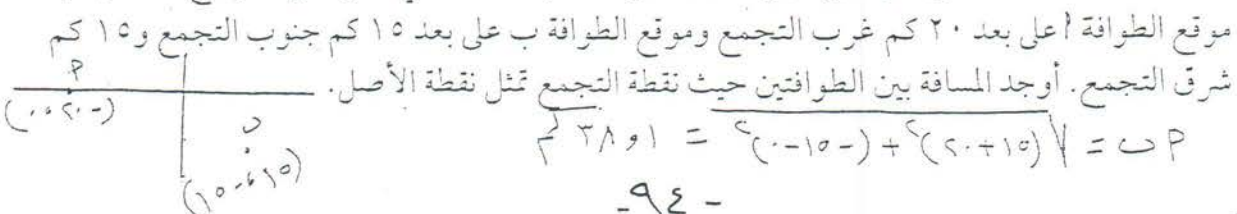
جاسم

(ب) أوجد إحداثي النقطة حيث سيلتقيان.  $\left(\frac{3-3}{2}, \frac{2-3}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{-1}{2}\right) = (0, -\frac{1}{2})$

\*(ج) حدد مكان الالتقاء بالكيلومترات شمالاً أو جنوباً، شرقاً أو غرباً بالنسبة إلى المحطة الفرعية.

نكاسر الالتقاء على بعد  $\frac{1}{2}$  كيلومتر جنوب المحطة الفرعية

\*(٨) لتغطية أحد التجمعات الرياضية من الجو، حُلقت طوافتان تابعتان لمحطتي تلفزة على الارتفاع نفسه. بحيث



$$P = \sqrt{(10 - (-10))^2 + (15 - 15)^2} = \sqrt{400 + 0} = \sqrt{400} = 20$$

(٩) هندسة: في الشكل المقابل، أ ب جد شبه منحرف.

(أ) أوجد إحداثيات نقاط المنتصف لكل من أ ب، ج د بحيث تكون

$$\text{على الترتيب م، ن. } 3 = \left( \frac{1+5}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left( 3, \frac{3}{2} \right)$$

$$7 = \left( \frac{1+5}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (3, 4)$$

(ب) أوجد طول م ن وطول ب ج وطول أ د. ثم قارن بين طول م ن

$$7 = 1.5 + 0.5 = 2 \text{ م}$$

$$\text{و المتوسط الحسابي لطولي ب ج، أ د. } 4 = 1.5 + 2.5 = 4 \text{ م}$$

$$\text{المتوسط الحسابي لطولي م ن، أ د. } 3 = \frac{7+4}{2} = 5.5 \text{ م}$$

(١٠) هـ د قطر لدائرة بحيث إحداثي هـ (س - ٣، ص + ٢) وإحداثي د (س + ٣، ص - ٢). أوجد إحداثي

$$\text{مركز الدائرة. مركز الدائرة = } \left( \frac{س-٣+س+٣}{2}, \frac{ص+٢+ص-٢}{2} \right) = (س, ص)$$

$$= \left( \frac{س+٣}{2}, \frac{ص-٢}{2} \right) = (س, ص)$$

\*(١١) استخدم الخطوات التالية لإيجاد المسافة بين الخطين المتوازيين ل، م كما

هو مبين في الرسم البياني المقابل.

$$(أ) \text{ معادلة الخط المستقيم ل هي: } ص = \frac{3}{4}س + 1$$

$$\text{معادلة الخط المستقيم م هي: } ص = \frac{3}{4}س - \frac{11}{4}$$

أوجد معادلة الخط المستقيم ن المتعامد مع الخط المستقيم ل في النقطة ب.

$$\text{ص = } \frac{3}{4}س + 1 \text{ مائل العمودي = } -\frac{4}{3}ص = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}س + 1\right) \Rightarrow -\frac{4}{3}ص = -س - \frac{4}{3} \Rightarrow ص = \frac{3}{4}س + 1$$

$$\text{معادلة ل هي } ص = \frac{3}{4}س + 1 \text{ معادلة م هي } ص = \frac{3}{4}س - \frac{11}{4}$$

(ب) استخدم معادلتَي الخطين المستقيمين م، ن لإيجاد إحداثي نقطة التقاطع ج.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}س + 1 &= \frac{3}{4}س - \frac{11}{4} \Rightarrow 1 = -\frac{11}{4} \Rightarrow 4 = -11 \Rightarrow 15 = 0 \\ \frac{3}{4}س + 1 &= \frac{3}{4}س - \frac{11}{4} \Rightarrow 4 = -11 \Rightarrow 15 = 0 \end{aligned}$$

(ج) أوجد المسافة بين ب، ج.

$$3 = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



## تقسيم قطعة مستقيمة Dividing line Segment

### المجموعة الأولى: أساسيات

✓ (١) أوجد إحداثي النقطة ن التي تقسم  $\overline{AB}$  من الداخل من جهة أ إذا علم أن:

(أ)  $A(5, -7)$ ،  $B(8, -5)$  ونسبة التقسيم ١ : ٢.

(ب)  $A(9, 6)$ ،  $B(-2, 1)$  ونسبة التقسيم ١ : ٣.

✓ (٢) أوجد إحداثي النقطة م التي تقسم  $\overline{AB}$  من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ)  $A(5, -2)$ ،  $B(4, 2)$  ونسبة التقسيم ٢ : ٥.

(ب)  $A(8, 1)$ ،  $B(-5, 3)$  ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٣) أ ب ج مثلث فيه: أ  $(3, -3)$ ، ب  $(5, 3)$ ، ج  $(7, 1)$  أوجد:

(أ) إحداثيات منتصفات أضلاع المثلث. فنصف  $\overline{AB} = \left( \frac{5+3}{2}, \frac{3+(-3)}{2} \right) = (4, 0)$

(ب)  $(4, 0)$

✓ (ب) إحداثيا نقطة تقاطع متوسطاته. فنصف  $\overline{BC} = \left( \frac{7+3}{2}, \frac{1+(-3)}{2} \right) = (5, -1)$

(٤) أ ب ج د، أربع نقاط على الشكل التالي: أ  $(1, 0)$ ، ب  $(4, 2)$ ، ج  $(4, 6)$ ، د  $(1, 4)$ .

✓ (أ) أثبت أن أ ب ج د متوازي الأضلاع.

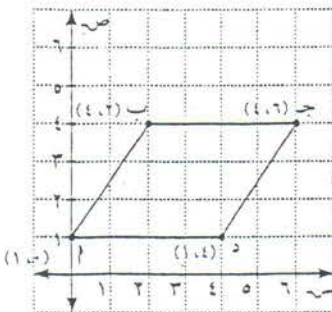
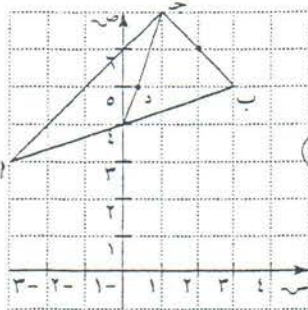
(ب) أوجد إحداثي النقطة ن، حيث ن نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع أ ب ج د.

ن = نصف  $\overline{AC} = \left( \frac{1+4}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (2.5, 3)$

✳ (ج) أوجد إحداثيات النقاط س، ص، ع، ل. حيث س، ص، ع، ل متوازي أضلاع له المركز نفسه «ن» وأطوال

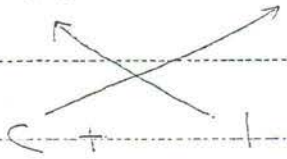
أضلاعه تساوي  $\frac{1}{2}$  أطوال أضلاع متوازي الأضلاع أ ب ج د، حيث س، ص، ع، ل تنتمي لقطري

متوازي الأضلاع أ ب ج د.





(0.4A) C : (0.4X-) P



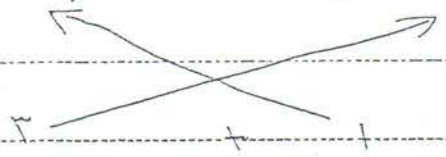
رقم 1 م 90

$$V = \frac{V - X5 + 1X1}{2+1} = 0$$

$$\frac{0}{2} = \frac{0X5 + 0 - X1}{2+1}$$

نقطه التقسيم هي  $(\frac{0}{2}, 0.5) = V$

(1.6C-) C : (9.67) P



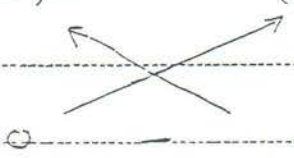
رقم 1 م 90

$$Z = \frac{9X2 + 2 - X1}{2+1} = 0$$

نقطه التقسيم هي  $(1.62) = V$   $V = \frac{9X2 + 1X1}{2+1} = 0$

رقم 2 م 90

(5.62) C : (0.45-) P

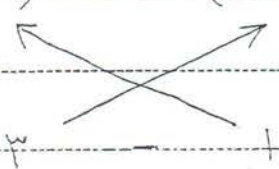


(P)

$$7 = \frac{2 - X0 - 2X5}{0-2} = 0$$

نقطه التقسيم هي  $(1.67) = M$   $V = \frac{0X0 - 2X5}{0-2} = 0$

(3.60-) C : (1.41) P

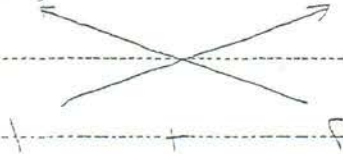


(C)

$$Z = \frac{1X2 - 0 - X1}{2-1} = 0$$

نقطه التقسيم هي  $(\frac{51}{2}, 0.5) = M$   $\frac{51}{2} = \frac{1X2 - 2X1}{2-1} = 0$

(2, 6) (7, 1)



رسم 3) 90  
اجائی نقطہ تقاطع خطوط  $\Delta$  و  $\Delta$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{1 + 2} = 5$$

لنقطہ ہں (0.4 1/3)

$$5 = \frac{4 \times 1 + 2 \times 2}{1 + 2}$$

رسم 4) 90

میدل  $\overline{PS}$  = میڈل  $\overline{CP}$  :

$$\frac{2}{2} = \frac{1-2}{-2-2} = \overline{CP}$$

$\overline{PS} \parallel \overline{CP}$  :

$$= \frac{1-1}{-2-2} = \overline{SP}$$

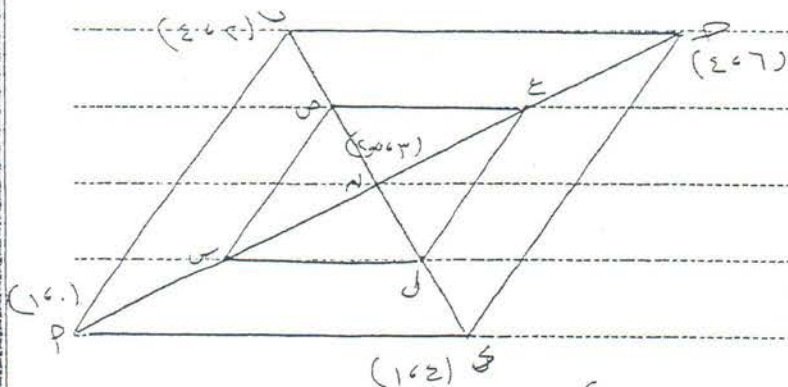
میدل  $\overline{PS}$  = میڈل  $\overline{SP}$  :

$$= \frac{2-2}{2-7} = \overline{CP}$$

$\overline{PS} \parallel \overline{SP}$  :

$$\frac{3}{2} = \frac{1-2}{2-7} = \overline{PS}$$

و  $\Delta$  و  $\Delta$  کو زری اضلاع



رسم 4) 90

$$\left( \frac{2+0}{2}, \frac{6+0}{2} \right) = 5$$

$$(1.5, 4.5) =$$

$$\left( \frac{2+0}{2}, \frac{6+0}{2} \right) =$$

$$(3.5, 2.5) =$$

$$(3.5, 2.5) = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{6+0}{2} \right) =$$

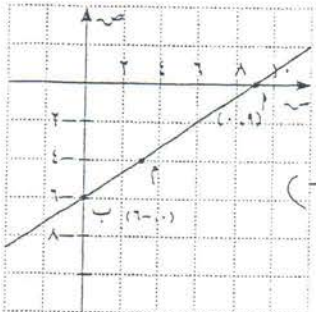
$$(1.5, 4.5) = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{6+0}{2} \right) =$$

## المحوريات تقارن تعريفة

✓ (١) أوجد إحداثي النقطة ن التي تقسم  $\overline{AB}$  من الخارج من جهة  $\Gamma$  إذا علم أن:

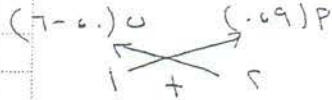
(أ)  $\Gamma(4, 6)$ ،  $B(2, 3)$  ونسبة التقسيم ٢ : ١

(ب)  $\Gamma(10, 10)$ ،  $B(10, 6)$  ونسبة التقسيم ٥ : ١



(٢) المستقيم الموضح بالشكل يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين  $\Gamma$ ،  $B$  على

الترتيب. أوجد إحداثي م التي تقسم  $\overline{AB}$  من الداخل من جهة  $\Gamma$  بنسبة ١ : ٢.



$$س = \frac{9 \times 1 + 0 \times 2}{1 + 2} = 3$$

$$ص = \frac{0 \times 1 + 6 \times 2}{1 + 2} = 4$$

(٣) مستقيم م:  $٢س + ٣ص = ١٠$  ومستقيم م:  $٣س - ٤ص = ١٠$

(أ) ارسم المستقيمين م، م:  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline س & ص & \\ \hline ١ & ٢ & ٣ \\ \hline \end{array}$  ،  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline س & ص & \\ \hline ١ & ٢ & ٣ \\ \hline \end{array}$

(ب) أثبت أن  $\Gamma(1, 2)$  تقع على المستقيم م،  $B(3, 2)$  تقع على المستقيم م.

$$١ = 3 - (١) + ٢ \times ٢ = ٣ - ١ + ٤ = ٦$$

✓ (ج) أوجد إحداثيات النقطتين  $\Gamma$ ،  $B$  التي تقسم  $\overline{AB}$  من الداخل من جهة  $\Gamma$  بنسبة ٢ : ١ حيث  $\Gamma(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$  نقطة تلاقي المستقيمين م، م.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(٤)  $\Gamma$  ب ج مثلث فيه  $\Gamma(5, 2)$ ،  $B(3, 1)$ ،  $ج(1, 4)$ .

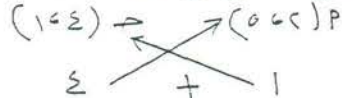
(أ) أوجد إحداثي النقطة ن التي تقسم  $\overline{AB}$  من الداخل من جهة  $\Gamma$  بنسبة ٣ : ١.



$$س = \frac{2 \times 3 + 1 \times 1}{3 + 1} = \frac{7}{4}$$

$$ص = \frac{0 \times 3 + 1 \times 1}{3 + 1} = \frac{1}{4}$$

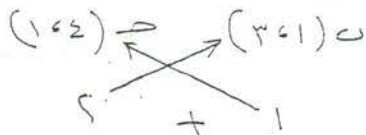
(ب) أوجد إحداثي النقطة م التي تقسم  $\overline{AB}$  من الداخل من جهة  $\Gamma$  بنسبة ٤ : ١.



$$س = \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{4 + 1} = \frac{9}{5}$$

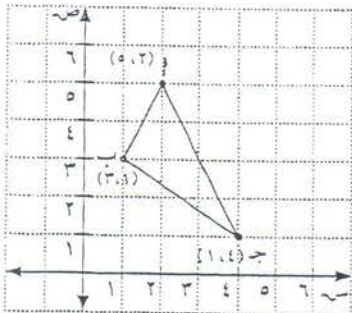
$$ص = \frac{0 \times 4 + 1 \times 1}{4 + 1} = \frac{1}{5}$$

(ج) أوجد إحداثي النقطة ك التي تقسم  $\overline{AB}$  من الداخل من جهة  $\Gamma$  بنسبة ٢ : ١.



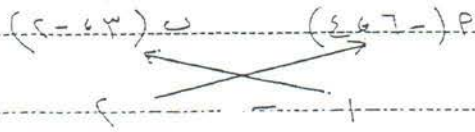
$$س = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

$$ص = \frac{3 \times 2 + 1 \times 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$$





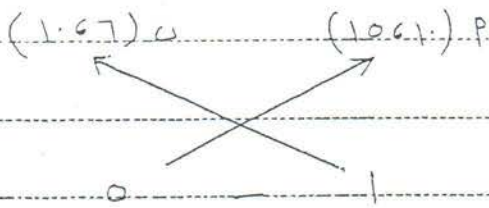
رسم ۱۱ م ۹۱



$$10 = \frac{7 - 85 - 2 \times 1}{5 - 1} =$$

$$10 = \frac{2 \times 5 - 5 - 81}{5 - 1} =$$

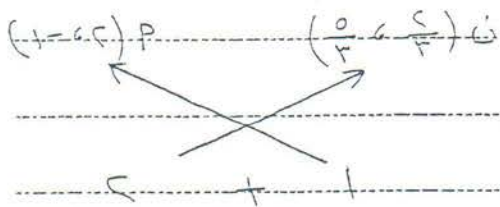
نقطہ تقسیم ہے  $(1, 610) =$



$$11 = \frac{10 \times 0 - 7 \times 1}{0 - 1} =$$

$$17,50 = \frac{10 \times 0 - 10 \times 1}{0 - 1} =$$

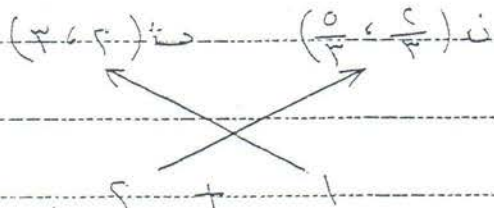
نقطہ تقسیم ہے  $(17,50 \text{ و } 11) =$



$$\frac{10}{9} = \frac{\frac{5}{9} \times 5 + 5 \times 1}{5 + 1} =$$

$$\frac{10}{9} = \frac{\frac{5}{9} \times 5 + 1 \times 1}{5 + 1} =$$

نقطہ تقسیم ہے  $(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}) =$



$$\frac{10}{9} = \frac{\frac{5}{9} \times 5 + 5 \times 1}{5 + 1} =$$

$$\frac{19}{9} = \frac{\frac{5}{9} \times 5 + 3 \times 1}{5 + 1} =$$

نقطہ تقسیم ہے  $(\frac{19}{9}, \frac{10}{9}) =$



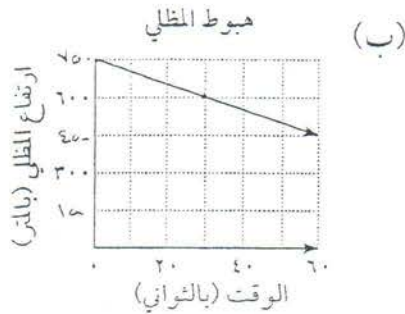
تَمَرَّنْ  
٣-٩  
(٢)

التاريخ الهجري: ..... التاريخ الميلادي:

## ميل الخط المستقيم Slope of a Straight Line

المجموعة المتارين الأساسية

(١) إن نسبة التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابتة. أوجد نسبة التغير، وفسر ماذا تعني كل نسبة تغير في كل حالة مما يلي:



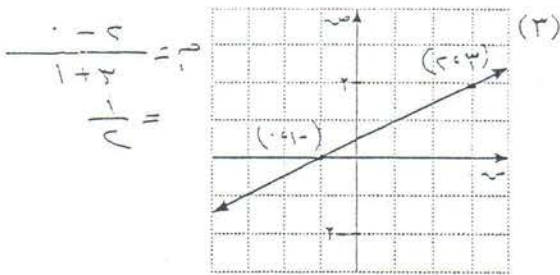
$$\text{معدل التغير} = \frac{70 - 10}{0 - 60} = -1$$

(أ)

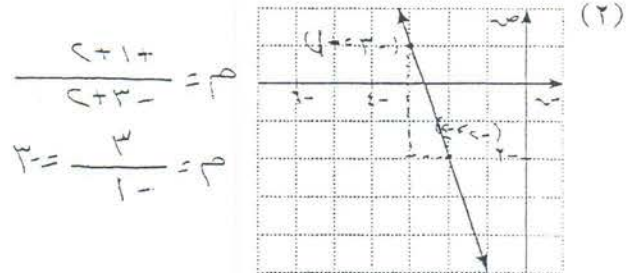
الوقت (ساعة)	درجة الحرارة (مئوية)
١	١٩-
٤	١٤-
٧	٩-
١٠	٤-
١٣	١

$$\text{معدل التغير} = \frac{19 - 1}{1 - 13} = \frac{18}{-12} = -1.5$$

في التمرينين (٢-٣)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:



$$\text{ميل} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = 1$$



$$\text{ميل} = \frac{1 - 4}{1 - 0} = -3$$

في التمرينين (٤-٥)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٤) (٢, ٣)، (٥, ٦) ميل =  $\frac{6 - 3}{5 - 2} = 1$  (٥) (٣, ٢)، (٥, ٦) ميل =  $\frac{6 - 2}{5 - 3} = 2$

(٦) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$$\text{ميل} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

(٧) أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم:

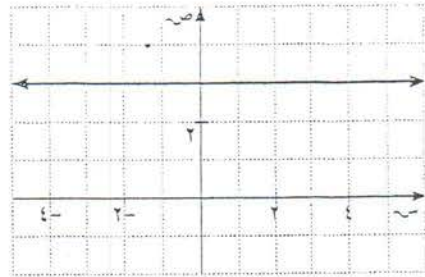
$$y = x + 7 \quad \text{ميل} = 1 \quad \text{و} \quad y = 2x + 1 \quad \text{ميل} = 2$$

خطان متوازيان

$$\text{ميل} = 1 = 2$$

في التمارين، (٨ - ١٠)، حدّد ما إذا كان ميل المستقيم يساوي صفراً أم هو غير معرّف.

(A)



الحبل = صفر

(9)  $(4, 3), (4, -3)$  طویل = صبر (10)  $(3, 4), (3, -4)$  طویل = صبر

في التمرينين (١١ - ١٢)، أوجد نسبة التغير في كل حالة.

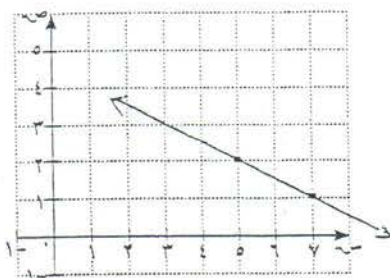
(١١) يبلغ طول الرضيع ٤٥ سم بعد شهر من الولادة و ٦٩ سم عندما يبلغ شهره العاشر بسبب التغير  $\frac{69-45}{1-0} = \frac{24}{1} = 24$

(۱۲) بلغ ثمن ۴ تذاكر للسبينا ۱۰ دنابير و ۱۰ تذاكر ۱۹ ديناراً.  
 $\frac{10}{2} = \frac{10 - 19}{2 - 10}$  (۱۰، ۱۹) ثمن البغير =

في التمرينين (١٣ - ١٤)، ارسم المستقيم المار بالنقطة المعطاة وميله المعطى كالآتي:

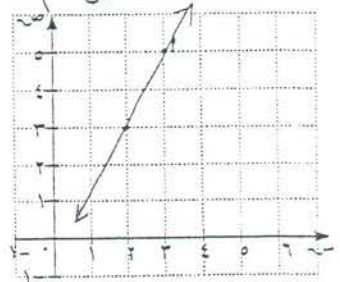
تکرند و جوده لاسفل  
در حدینه لاسفل

(١٤) ب (٢، ٥)، الميل  $-\frac{1}{2}$

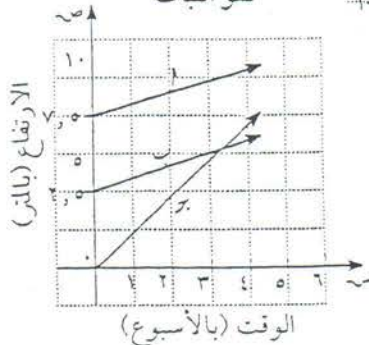


(13)  $(0, 3)$ ، الميل  $= \frac{2}{5}$ ، تتحرك، حيزه لاسلى

در حد ۱۰۰  
در حد ۱۰۰  
در حد ۱۰۰



## نمو النبات



\* (١٥) علوم: (أ) أي المستقيمت في الرسم المقابل له الميل الأكثر ارتفاعاً؟ ح

(ب) أي النباتات لها نسبة التغير الأكبر على مدى ستة

أسابيع؟ وأياها لها نسبة التغير الأصغر؟ كيف تتأكد من ذلك؟  
نم العمل لا كمرح

اسم القبر الأصغر هو م، ن، وهما من الأباة كثرية

(١٦) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله  $\frac{3}{4}$  ويمر بنقطة الأصل.

$$f_3 = \frac{2}{3}g$$

التوصية (٣٤٥) / (٦٦١)

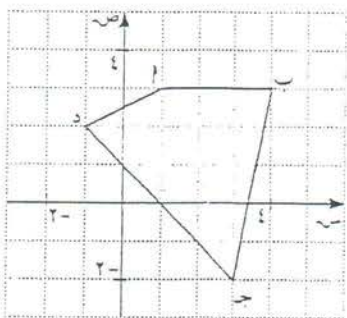
في التمارين (١٧ - ١٩)، أوجد قيمة كل من  $s$ ،  $v$  إذا كانت النقطتان على المستقيم مع المعطيات التالية:

$$\boxed{x=5} \quad \frac{0-}{6} = \frac{3-8}{5-2} \quad \cdot \frac{0-}{4} = \text{الميل } (17) (3, 2), (8, 2)$$

$$(18) (-4, 2), (2, 4), \text{الميل} = 7. \quad \frac{2-4}{2+2} = \frac{7}{1} \quad 37 = \text{جس} \quad \boxed{\text{جس} = 12}$$

(١٩) (٣، ٥)، (س، ٢)، الميل غير معرف.

$$\frac{5-3}{\text{غير معرف}} = \frac{\boxed{s=3}}{\quad}$$



(٢٠) هندسة: أوجد ميل كل ضلع في الشكل المقابل.

$$\text{میل } \overline{PQ} = \text{صفر میل } \overline{QR} = \frac{0}{1}, \text{ میل } \overline{RS} = 1, \text{ میل } \overline{ST} = \frac{1}{2}$$

في التمارين (٢١ - ٢٤) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه.

(٢٢) إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائماً سالب.

(٢٣) لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفراً بنقطة الأصل.

(٢٤) نقطتين لديها الإحداثي السيني نفسه، تنتميان إلى المستقيم العمودي (الرأسي) نفسه.

(٢٥) تحليل الخطأ: وجد سالم أن ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين  $(١, ٧)$ ,  $(٣, ٩)$  يساوي:  $\frac{٣-١}{٩-٧}$ . ما هو خطأ

سالم؟ خطا بالم انه قسم البعد الاقصى  
الاجابه الصريه هي خطا  $\frac{9-7}{3-1}$   
البعد الراس

(٢٦) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س، -ص)، (-س، -ص).

$$= \frac{-}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c} + \sqrt{c} -}{\sqrt{c} + \sqrt{c}} = \text{الميل}$$

في التمرينين (٢٧ - ٢٨)، حدّد إن كانت مجموعة النقاط التالية تقع على استقامة واحدة.

$$\frac{1}{3} = \frac{z-2}{z-1} = \overline{OF} \text{ ص } (27) \text{ ا } (3, 1), \text{ ب } (2, 4), \text{ ج } (-2, 4).$$

$\overline{D} \cup \overline{C} = \overline{C \cap D} \therefore \frac{1}{2} = \frac{C - D}{C + D - C \cap D} = \overline{D \cap C}$   
 or  $\overline{D \cap C} = \frac{1}{2}$



(٢٨) أ (٣، ٢)، ب (١، ٠)، ج (١، ٢).  
 $\overline{MP} = \frac{2-0}{2+1} = \frac{2}{3}$  ، ميل  $\overline{MP} = \frac{1+1}{0-2} = -1$  .  $\therefore$  ميل  $\overline{MP} \neq$  ميل  $\overline{MC}$   
 $\therefore$  لنقاط م، ن، ج ليست على استقامة واحدة

(٢٩) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  $P(-1, 1)$ ،  $Q(0, 5)$  عمودي على المستقيم المار بالنقطتين  $R(0, 4)$ ،  $S(3, 1)$ .  
 $\overline{PQ} = \frac{1+5}{1+4} = \frac{6}{5}$  ، ميل  $\overline{PQ} = \frac{1-3}{5-0} = -\frac{2}{5}$  ، ميل  $\overline{RS} = \frac{1-4}{3-0} = -1$   
 $\therefore -1 \times -\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \neq -1$  ،  $\therefore$  المستقيمان متعامدان

### المحتوى تحت تمارين تعريضية

(١) (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $A(4, 3)$ ،  $B(1, 5)$  مستخدماً  $(س_١، ص_١)$ ،  $(س_٢، ص_٢)$  ب  $(س_١، ص_١)$ ،  $(س_٢، ص_٢)$ .

$$\frac{2}{3} = \frac{5+3}{1-4} = 3$$

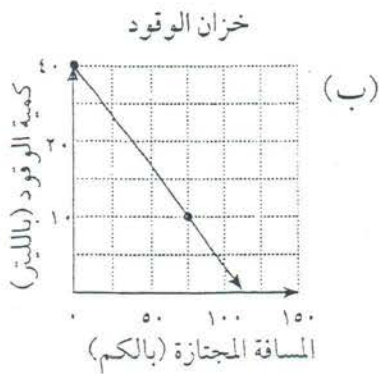
(ب) أوجد ميل المستقيم في (أ) مستخدماً  $(س_١، ص_١)$ ،  $(س_٢، ص_٢)$  ب  $(س_١، ص_١)$ ،  $(س_٢، ص_٢)$ .

$$\frac{2}{3} = \frac{5+3}{2-1} = 8$$

(ج) ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن الناتج تغير لا يتغير

(٢) إذا كانت نسبة التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابتة. أوجد نسبة التغير وفسر ماذا تعني كل نسبة تغير في كل حالة مما يلي:



(أ)

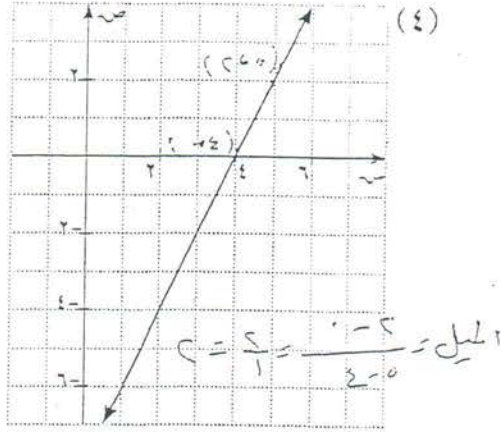
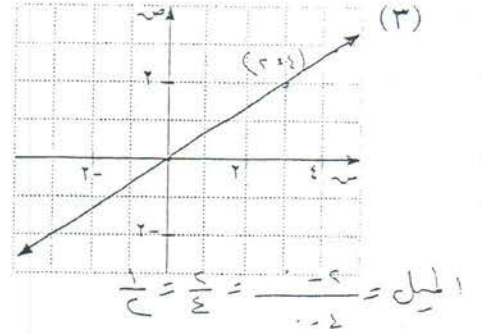
عدد الأشخاص	سعر الوجبة (بالدينار)
٢	٤
٣	٦
٤	٨
٥	١٠
٦	١٢

$$\frac{2}{5} = \frac{4-1}{10-0} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{4-6}{8-3} = -\frac{2}{5}$$



في التمرينين (٣-٤)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:



في التمرينين (٥-٦)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

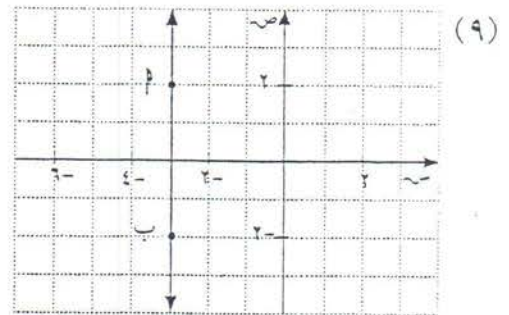
(٥)  $(-٤, ٤), (٢, -٥)$  ميل =  $\frac{-٥-٤}{٢-(-٤)} = \frac{-٩}{٦} = -\frac{٣}{٢}$  (٦)  $(١, ٢), (٢, -١)$  ميل =  $\frac{-١-٢}{٢-١} = \frac{-٣}{١} = -٣$

(٧) أوجد ميل مستقيم مواز لمحور السينات. ميل المستقيم مواز لمحور السينات = صفر

\* (٨) أوجد ميل مستقيم يصنع مع محور الصادات زاوية قياسها  $٤٥^\circ$  ويمر بنقطة الأصل: ميل =  $\tan 45^\circ = 1$

∴ المستقيم يصنع مع محور السينات  $٤٥^\circ$  ما زاوية قياسها  $٤٥^\circ$  أرزوليه قياسها  $٩٥^\circ$  أرزوليه قياسها  $٩٥^\circ$  ميل =  $\tan 95^\circ = -1$

في التمارين (٩-١١)، حدّد ما إذا كان ميل المستقيم  $\overleftrightarrow{AB}$  يساوي صفراً أم هو غير معروف.



غير معروف

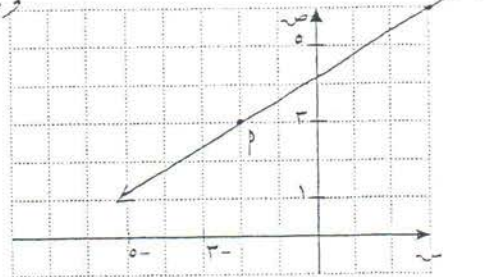
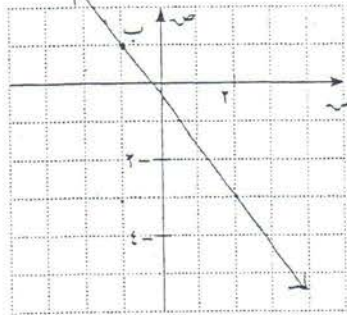
(١٠)  $A(0, \frac{1}{2}), B(3, -٥)$  ميل =  $\frac{-٥-\frac{1}{2}}{3-0} = \frac{-\frac{10.5}{2}}{3} = -\frac{7}{4}$  (١١)  $A(1, -٥), B(1, ٤)$  ميل =  $\frac{٤-(-٥)}{1-1} = \frac{9}{0}$  غير معروف

في التمرينين (١٢-١٣)، أوجد نسبة التغير في كل حالة.

(١٢) تفود السيارة مسافة ٥٠ كيلومتراً في الساعة و ٢٠٠ كيلومتر في ٤ ساعات. نسبة التغير =  $\frac{٥٠-٢٠٠}{١-٤} = \frac{-١٥٠}{-٣} = ٥٠$

(١٣) تقرأ ٤ صفحات في ١٠ دقائق و ٨ صفحات في ١٨ دقيقة. نسبة التغير =  $\frac{٨-٤}{١٨-١٠} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

في التمرينين (١٤ - ١٥)، ارسم المستقيم المار بالنقطة المعطاة وميله المعطى كالتالي:

[illegible]

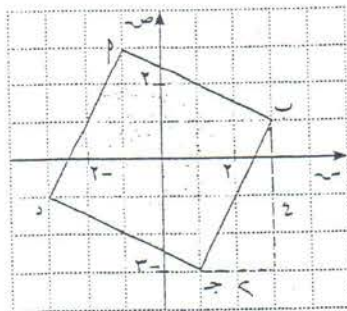
(١٦) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله  $\frac{1}{2}$ ، ويمر بنقطة الأصل. حل:  $\frac{1}{2} = \frac{y}{x}$

في التمارين (١٧ - ١٩)، أوجد قيمة  $s$  إذا مرت النقطتان بالمستقيم المعطى ميله.

(١٧) (٢، ٤)، (٨، ٨)، الميل = ٢.  $\frac{y-8}{x-8} = 2$   $\Rightarrow y-8 = 2(x-8)$   $\Rightarrow y-8 = 2x-16$   $\Rightarrow y = 2x-8$

(١٨) (٢، ٤)، (٨، ٨)، الميل  $\frac{1}{2} = \frac{4-8}{2-8} = \frac{1}{2}$

(١٩) (٤، ٣)، (٧، ٥)، الميل ٢ =  $\frac{3-5}{2-7}$   $\Rightarrow \sqrt{7=5}$



(٢٠) هندسة: في الشكل المقابل أوجد ميل كل ضلع.

۲ =  $\frac{2}{r} = \overline{ج}$  میل

میل آب = ۱۱/۷

۷ = ۲۴ میل

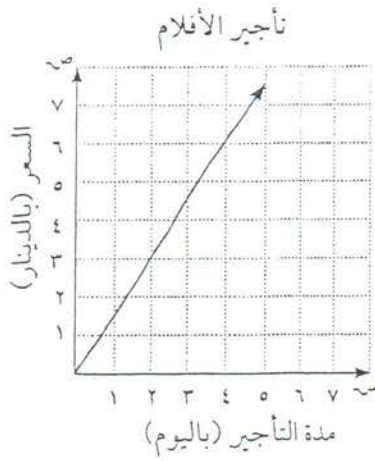
میل جد =  $\frac{1}{2}$

في التمارين (٢١ - ٢٣)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) إن نسبة التغير دائماً موجبة أو تساوي صفر.

(۲۲) كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه.

(٢٣) المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائماً يمر بنقطة الأصل.



(٢٤) يمثل الشكل المقابل رسم تأجير الأفلام نسبة إلى مدة التأجير.

(أ) قدر ميل المستقيم. ماذا يمثل هذا العدد؟

الميل =  $\frac{3}{2}$  ، يمثل معدل التغير في رسم التأجير بالنسبة إلى مدة التأجير

(ب) قدر المبلغ الذي سيدفعه الشخص لاستئجار فيلم مدة عشرة أيام.

$$\text{ص} = \frac{3}{2} \times 10 = 15$$

$$\text{ص} = \frac{3}{2} \times 10 = 15 \text{ دينار}$$

(٢٥) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-٣، ص)، (٣، -ص)

$$m = \frac{-\text{ص} - \text{ص}}{3 - (-3)} = \frac{-2\text{ص}}{6} = -\frac{\text{ص}}{3}$$

في التمرينين (٢٦ - ٢٧)، هل النقاط المعطاة تقع على استقامة واحدة؟

(٢٦) أ (٢، ٤)، ب (-٣، ٢)، ج (٢، ٥).

ميل  $\overrightarrow{AB} = \frac{4-2}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$  ، ميل  $\overrightarrow{BC} = \frac{5-2}{2-2}$  ، لنقاط (٢، ٤)، (-٣، ٢)، (٢، ٥) ، لنرى هل هي استقامة واحدة؟

(٢٧) أ (-١، ٢)، ب (-١، ٥)، ج (٥، ٤).

ميل  $\overrightarrow{AB} = \frac{2-5}{-1-(-1)}$  ، ميل  $\overrightarrow{BC} = \frac{4-5}{5-(-1)}$  ، لنقاط (-١، ٢)، (-١، ٥)، (٥، ٤) ، لنرى هل هي استقامة واحدة؟

\* (٢٨) أوجد ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = ٣س + ٧، هل هذا المستقيم متوازي

$$3\text{ص} = 31 - 7 = 24 \Rightarrow \text{ص} = 8$$

$$\text{ص} = \frac{31-7}{3} = 8$$

$$m = -\frac{3}{7}$$

مع المستقيم: ص = -٣س + ٢١؟

$$\text{ص} = 21 - 3 \times 8 = 6$$

$$m = \frac{21-6}{-3-8} = -\frac{15}{11}$$

(٢٩) أوجد ميل مستقيم متعامد مع المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$$\text{ص} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



## معادلة الخط المستقيم

## Equation of a Straight Line

### المجموعة الأولى

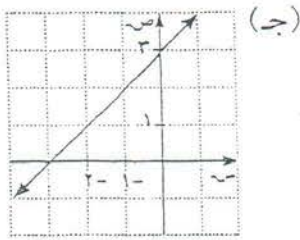
(١) أوجد معادلة الخط المستقيم إذا علم:

(أ) يمر بالنقطة (٢، ٥) وميله = ٣. 
$$y - 5 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 1$$

(ب) يمر بالنقطة (٤، ٢) وميله = ٢. 
$$y - 2 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 6$$

(ج) يمر بالنقطة (١، ١) وميله =  $\frac{2}{3}$ . 
$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم في كل من الأشكال التالية:



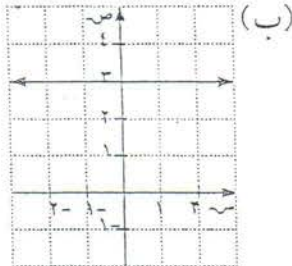
(أ) المستقيم يمر بالنقطة (٣، ٠)

ميله = ١

معادلة المستقيم هي:

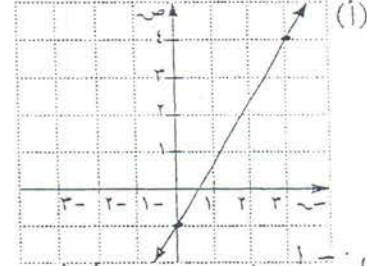
$$y - 0 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 3$$

$$0 = x - 3 \Rightarrow x = 3$$



معادلة المستقيم هي:

$$y = 3$$



المستقيم يمر بالنقطة (٤، ٣) وميله =  $\frac{5}{3}$

معادلة المستقيم هي:

$$y - 3 = \frac{5}{3}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$$

$$0 = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3} \Rightarrow 5x - 11 = 0$$

(٣) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين في كل من:

(أ) (٧، ٤)، (٣، ٥). الميل =  $\frac{4-5}{7-3} = -\frac{1}{4}$  معادلة المستقيم هي:  $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$

(ب) (١، ٧)، (٤، ٣). الميل =  $\frac{3-7}{4-1} = -\frac{4}{3}$  معادلة المستقيم هي:  $y - 7 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١، ٧) والعمودي على الخط المستقيم:  $3x + 2y - 1 = 0$

المستقيمات المتعامدة: ميل المستقيم المطلوب =  $\frac{3}{2}$

معادلة المستقيم المطلوب:  $y - 7 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم:  $y = 2x - 4$  ويمر بالنقطة (٢، ٢)

ميل المستقيم المطلوب =  $\frac{1}{2}$  معادلة المستقيم هي:  $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

(٦) أوجد معادلة المستقيم الموازي مع المستقيم:  $y = \frac{1}{4}x + 17$  ويمر بالنقطة الأصل.

ميل المستقيم المطلوب =  $\frac{1}{4}$

معادلة المستقيم هي:  $y = \frac{1}{4}x$



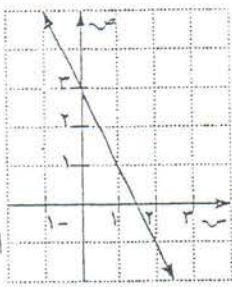
(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على المستقيم:  $2x + y + 1 = 0$  ويمر بالنقطة  $(-1, 1)$ .  
 من خصائص الخطوط:  $\frac{1}{m_1} = -m_2$  معادلة المستقيم:  $y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

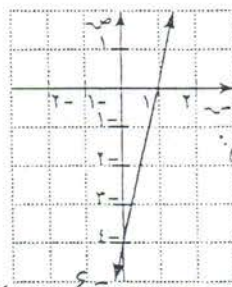
### المحورين المتوازيين

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم المرسوم في ما يلي:

المستقيم يمر  
بالنقطتين:  
 $(3, 0)$   
 $(1, 1)$   
الميل:  $m = \frac{1-0}{1-3} = \frac{1}{-2}$



(ج)



(ب)

المستقيم  
يمر بالنقطتين:  
 $(0, 1)$   
 $(2, 0)$   
الميل:  $m = \frac{0-1}{2-0} = \frac{-1}{2}$



(أ)

المستقيم يمر  
بالنقطتين:  
 $(3, 0)$   
 $(1, 1)$   
الميل:  $m = \frac{1-0}{1-3} = \frac{1}{-2}$

الميل:  $m = \frac{1-0}{1-3} = \frac{1}{-2}$

معادلة المستقيم هي:  $y - 1 = -1(x + 1)$

معادلة المستقيم:  $y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

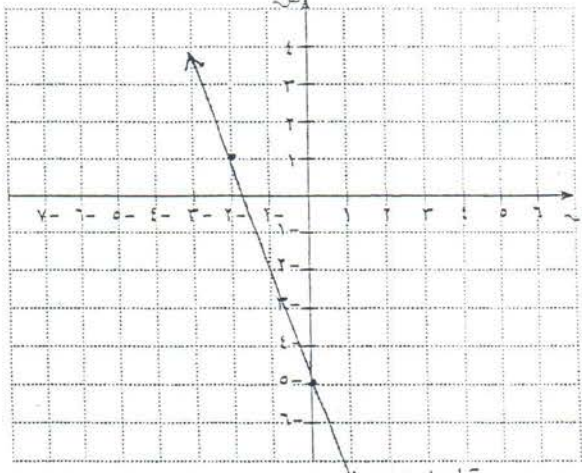
$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$

$y - 1 = -1(x + 1)$



(٣) مستقيم يمر بالنقطة  $(-1, 3)$  أو عمودي على المستقيم:  $2x + y + 1 = 0$ .

الميل:  $m = \frac{1}{-2}$

معادلة المستقيم هي:  $y - 3 = -1(x + 1)$

$y - 3 = -1(x + 1)$

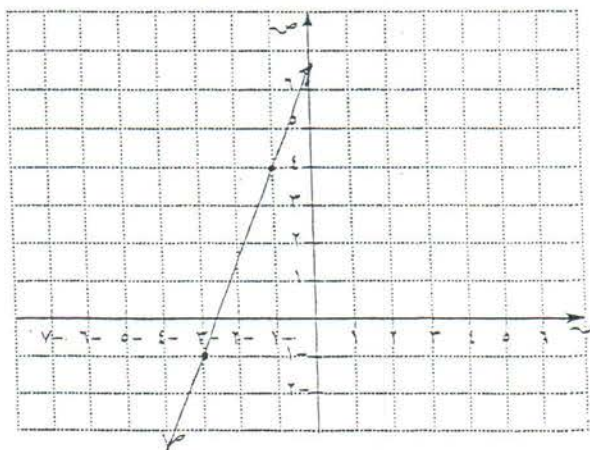
$y - 3 = -1(x + 1)$

$y - 3 = -1(x + 1)$

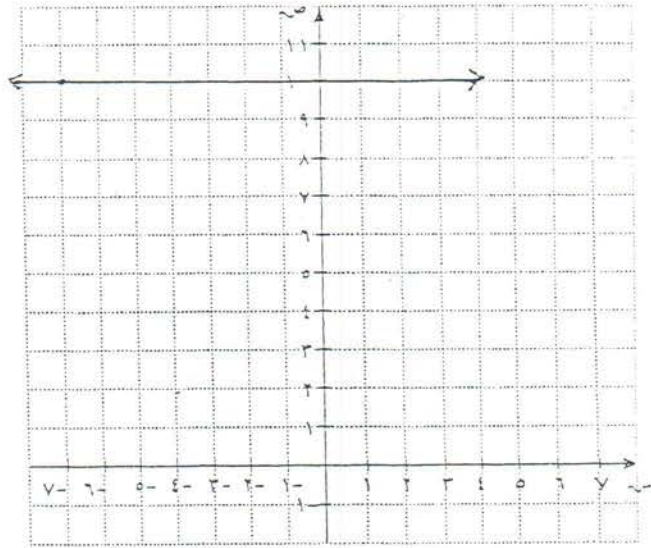
$y - 3 = -1(x + 1)$

$y - 3 = -1(x + 1)$

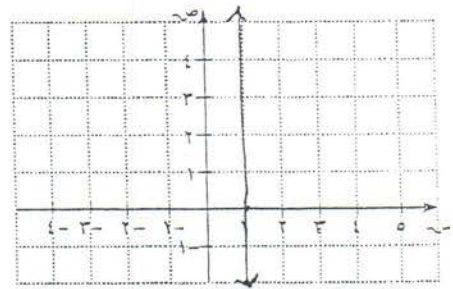
$y - 3 = -1(x + 1)$



(٤) مستقيم أفقي يمر بالنقطة  $(-٧, ١٠)$ .



(٥) مستقيم رأسي يمر بالنقطة  $(١, \frac{٢}{٧})$ .



(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين:  $(٢, ٥)$ ,  $(٣, ٠)$ . الميل  $= \frac{٥ - ٠}{٢ - ٣} = -٥$

$$٥ = ٣ + (-٥) \times (٣ - ٢) \Rightarrow ٥ = ٣ - ٥ = -٢$$

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم في كل مما يلي:

(أ) يمر بنقطة الأصل وميله ٧.  $٧ = ٧ \times (٣ - ٠) \Rightarrow ٧ = ٢١$

(ب) يمر بنقطة الأصل وبالنقطة  $(٣, ٤)$ . الميل  $= \frac{٤ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٤}{٣}$

$$٤ = ٣ + \frac{٤}{٣} \times (٣ - ٠) \Rightarrow ٤ = ٥$$

(ج) يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءاً طوله ٣ وحدات، ويمر بالنقطتين  $(٠, ٥)$ ,  $(٥, ٠)$

ومن الجزء الموجب لمحور الصادات جزءاً طوله ٥ وحدات. الميل  $= \frac{٥ - ٠}{٠ - ٥} = -١$

$$٥ = ٠ + (-١) \times (٠ - ٥) \Rightarrow ٥ = ٥$$

$$٥ = ٣ + (-١) \times (٣ - ٠) \Rightarrow ٥ = ٢$$

(٨) أوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة  $(٥, ٧)$  والموازي للمستقيم المار بالنقطتين  $(٣, ٤)$ ,  $(٢, ١)$ .

$$(١, ٢) \Rightarrow \text{الميل} = \frac{٢ - ٤}{٢ - ٣} = ٢$$

$$٧ = ٥ + ٢ \times (٥ - ٣) \Rightarrow ٧ = ٩$$

$$٧ = ٣ + ٢ \times (٣ - ٠) \Rightarrow ٧ = ٩$$

## البعد بين نقطة ومستقيم

## Distance Between a point and a Straight line

## المجموعة الأولى من أسئلة

في التمارين (١-٤)، معادلة المستقيم ل:  $٢س - ٣ص + ٠ =$ 

بين ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم أم لا.

(١) م (١، ٢)  $-٢ - ٣ + ٠ = ٣$   $\neq ٠$  لا تقع على الخط المستقيم  
 (٢) ب (٢، ٠)  $-٢ - ٠ + ٠ = -٢$   $\neq ٠$  لا تقع على الخط المستقيم  
 (٣) ج (٠، ٤)  $-٢ - ١٢ + ٠ = -١٤$   $\neq ٠$  لا تقع على الخط المستقيم  
 (٤) د (١، ٢)  $-٢ - ٦ + ٠ = -٨$   $\neq ٠$  لا تقع على الخط المستقيم

(٥) أوجد البعد بين النقطة ج (١، ٢) والمستقيم:  $٣س - ١ص + ٠ =$ 

$$= \frac{|1 - 1 - 3 \times 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ وحدة طول}$$

(٦) أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم:  $٢س + ٤ص =$ 

$$= \frac{|0 + 0 - 2 \times 0 - 4 \times 0|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{0}{\sqrt{20}} = 0 \text{ وحدة طول}$$

(٧) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و (١، ٢) إذا كان المستقيم:  $٣س - ٤ص + ٧ = ٠$  مماس لها.

$$= \frac{|1 - 2 - 3 \times 4 + 4 \times 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5} \text{ وحدة طول}$$

(٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٣) على المستقيم:  $٢س + ٤ص - ٤ = ٠$ 

$$= \frac{|2 - 12 + 8 - 4|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} \text{ وحدة طول}$$

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، ٧) على المستقيم:  $٥ص - ١س + ١ = ٠$ 

$$= \frac{|-4 + 35 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2}} = \frac{16}{\sqrt{26}} \text{ وحدة طول}$$

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣)، (٥، ١)

$$= \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

معادلة المستقيم:  $٣س - ١ص = ٠$ 

$$= \frac{11}{3\sqrt{10}} \text{ وحدة طول}$$



## المستقيمات المتوازية

في التبارين (١-٣)، معادلة المستقيم ل: ٣ص - س + ١ = ٠

بين ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم أم لا.

(١) (٣، ٣) لا تقع على المستقيم.

(٢) (٠، ٢) لا تقع على المستقيم.

(٣) (١، ٤) تقع على المستقيم.

(٤) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥، ٤) على المستقيم: ٣ص + ٤س = ٠  

$$= \frac{|5 \times 4 + 4 \times 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{32}{5}$$
 وحدة طول.

(٥) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٠، ٨) على المستقيم: ٥س + ١٢ص = ٠  

$$= \frac{|0 \times 12 - 8 \times 5|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{40}{13}$$
 وحدة طول.

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٧، ٢) على المستقيم المار بالنقطتين: (٣، ٥)، (١، ٣).  
 معادلة المستقيم:  $1 = \frac{y - 3}{3 - 5} = \frac{y - 5}{5 - 3}$  معادلة المستقيم:  $3 - 5 = 1 - 5$   
 طول العمود =  $\frac{|3 + 5 - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$  وحدة طول.

(٧) أوجد بعد النقطة (٤، ٤) عن المستقيم المار بنقطة الأصل وميله  $\frac{3}{4}$ . معادلة المستقيم:  $4ص - 3س = 0$   
 البعد =  $\frac{|4 \times 3 - 4 \times 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$  وحدة طول.

(٨) أوجد أقصر مسافة من النقطة (٤، ٤) إلى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠)، (٠، ٢).

معادلة المستقيم:  $1 = \frac{y - 0}{0 - 2} = \frac{y}{-2}$

معادلة المستقيم:  $ص - س = ٠$

أقصر مسافة = البعد بين النقطتين (٤، ٤) والمستقيم =  $\frac{|4 - 4 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$   

$$= \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$
 وحدة طول.



التاريخ الهجري:

التاريخ الميلادي:

تمرين  
٥-٩

معادلة الدائرة

## Equation of a Circle

المجموعة الأولى

(١) حدّد ما إذا كانت المعادلات التالية، معادلة دائرة أم لا.

(أ)  $3س^2 + ص^2 = ٤$  لا تمثل معادلة دائرة .

(ب)  $٠ = ٤ + (١ + ص) + (١ - س)$  لا تمثل معادلة دائرة .

(ج)  $٠ = ٨ - ص^2 - س^2$  تمثل معادلة دائرة .

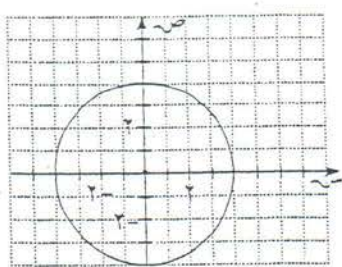
(د)  $٠ = ٧ + ص^2 - س^2$  لا تمثل معادلة دائرة .

(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية إذا علم:

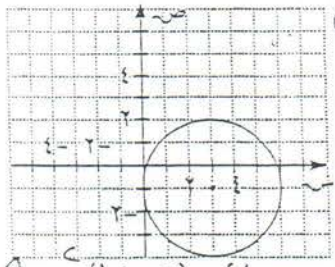
(أ) المركز  $(٠, ٠)$  وطول نصف القطر = ٣.  $س^2 + ص^2 = ٩$

(ب) المركز  $(٥, ٤)$  وطول نصف القطر = ٢.  $(س - ٥)^2 + (ص - ٤)^2 = ٤$

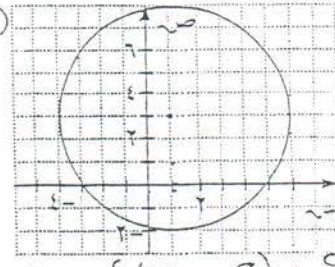
(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:



$س^2 + ص^2 = ١٦$

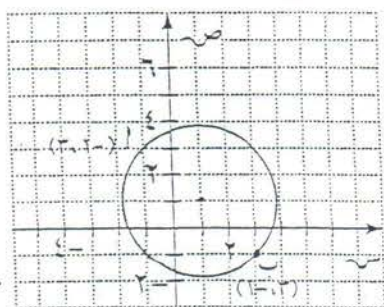


$٩ = (س - ١)^2 + (ص - ١)^2$

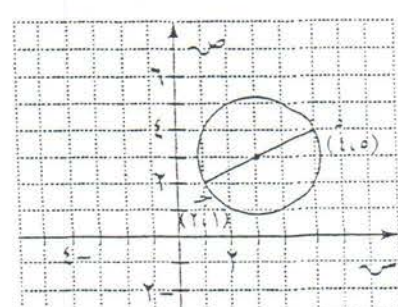


$٥٠ = (س - ٣)^2 + (ص - ٣)^2$

(٤) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية، وكذلك إحداثيي مركز كل دائرة:



المركز  $(١, ١)$



المركز  $(٣, ٣)$

نصف القطر =  $\sqrt{١٠} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$  وحدة طول

نصف القطر =  $\sqrt{١٠} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$  وحدة طول

(٥) محور السينات هو مماس للدائرة عند النقطة  $(-3, 0)$ ، ومركز الدائرة هو  $(-3, 4)$ . أوجد معادلة هذه الدائرة.

$$\text{لغف لبقتر} = \overline{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} = 6 = \text{وحدة طول}$$

مقدار الاثره هي  $(5-4) + (3+5) = 17$ .

في التمرينين (٦ - ٨) ، أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر ذات المعادلات التالية:

(٦) س' + ص' - ٨ - ص - ٨ = ٠. المركز = (١٦، ١٦) ، نصف القطر = ٥ وحدة طول

(٧) س<sup>١</sup> + ص<sup>١</sup> - ١٦ - ١٧ = ٠ . المركز = (٠, ٦٨) ، نصف المحور = ٩ وحدة طول

(٨) ٥ س + ٥ ص - ٢٠ ص - ٣٠ = ٠  
المكتوب (٢٠٠) ما نصف بقدر ١٠٧ وحدة طول  
 ص + ص - ص - ٦ = ٠

(۹) د<sub>۱</sub>، د<sub>۲</sub> دائرتان ومعادلتاهما كالتالى:

د: س<sup>۱</sup> + ص<sup>۱</sup> = ۱

$$1 = 1 + (2 - 1) = 2$$

هل الدائرتان متقاطعتان أم متماسكتان؟  
مخاضات

(١٠) أوجد معادلة مماس دائرة، معادلتها:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$  عند النقطة  $A(2, 0)$ . مركز الدائرة =  $(2, 3)$

$$\frac{\text{ميدان المستقيم المربعين على المماسين}}{\text{ميدان المماسين}} = \frac{c}{c} = 1 = \frac{\text{ميدان المماسين}}{\text{ميدان المماسين}} = 1$$

•  $= c - r - \infty$   $\pm (1 - r)r = (c - \infty) \pm r$  (بما أن  $r$  ليس له حد)

(١١) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٣) وتمس محور الصادات عند النقطة (٢، ٠).

المركز (٣٥٥) ، نخه = ٣ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي  $9 = (x-5)^2 + (y-3)^2$

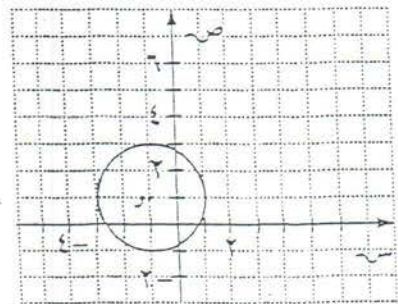
الحمد لله الذي جعلنا من عباده

(١) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

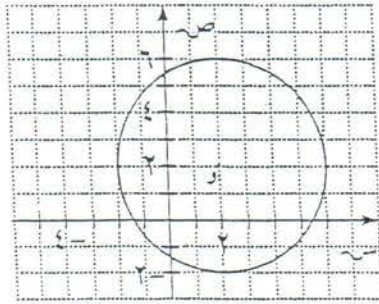
(i)

(ب)

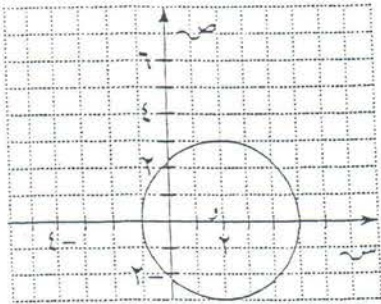
(ج)



مغ = 2 و ليرة



خمر = ۷ حوله


$$\bar{\phi} \cdot \gamma = \psi$$



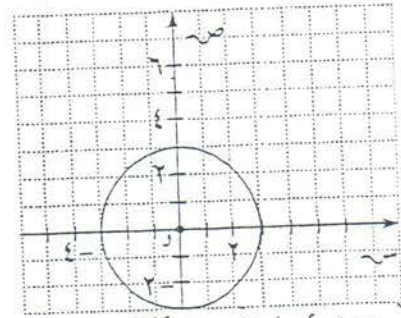
(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر التالية إذا علم:

(أ) المركز (٢، ٠) وطول نصف القطر = ٧  $s^2 + c^2 = 49$

(ب) المركز (٠، ٤-) وطول نصف القطر = ٣  $s^2 + c^2 = 9$

(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

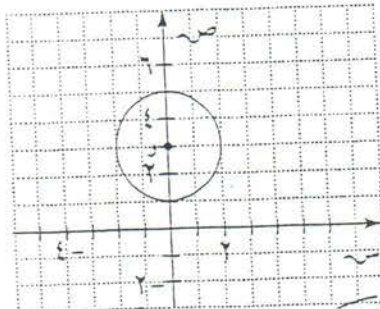
(أ)



المركز (٠، ٠) ، شعاع = ٣

$s^2 + c^2 = 9$

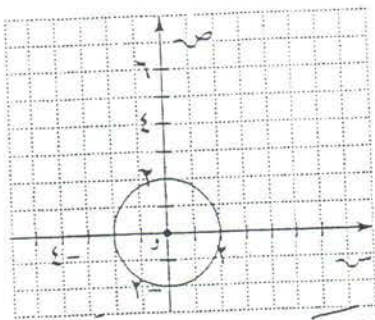
(ب)



المركز (٣، ٠) ، شعاع = ٢

$s^2 + c^2 = 4$

(ج)



المركز (٠، ٠) ، شعاع = ٢

$s^2 + c^2 = 4$

(٤) اكتب معادلة كل دائرة حيث:

(أ) المركز (٤، ٠) وتتمز بالنقطة (٤، ٣).  $s^2 + c^2 = 9$  ، المركز (٤، ٠) شعاع = ٣

(ب) المركز (١، ٥) وتتمز بالنقطة (١، ٦).  $s^2 + c^2 = 1$  ، المركز (١، ٥) شعاع = ١

في التمرينين (٥-٦)، أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(٥)  $s^2 + c^2 + 2s - 4c = 0$  ، المركز (١، ١) شعاع = ١

(٦)  $s^2 + c^2 + 2s - 16c = 0$  ، المركز (١، ٨) شعاع = ٨

(٧) أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها  $(s-1)^2 + (c-2)^2 = 10$  عند النقطة (١، ٢).

المركز (١، ٢) ، شعاع =  $\sqrt{10}$  ، مماس الدائرة على المماس  $s = 1$  ، مماس الدائرة على المماس  $c = 2$

$s^2 + c^2 = 10$  ، مماس الدائرة على المماس  $s = 1$  ، مماس الدائرة على المماس  $c = 2$

(٨) طول قطر الدائرة التي معادلتها  $(s-1)^2 + (c-1)^2 = 4$  هو:

(د) ١٦

(ج) ٤

(ب) ٢

(أ) ١

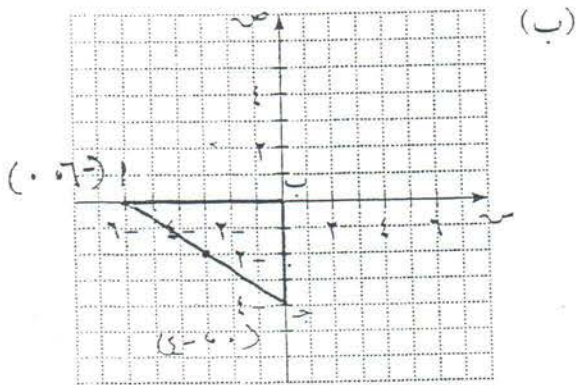
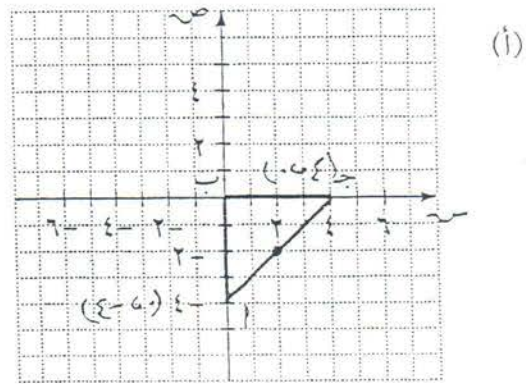
في التمارين (٩-١١)، حدد وضع الدائرة هـ، بالنسبة إلى الدائرة هـ.

(٩) هـ:  $(س - ٢)^2 + (ص - ١)^2 = ١$  هـ:  $(س - ٤)^2 + (ص - ٢)^2 = ١$  مبياعتهما

(١٠) هـ:  $٠ = ٤ + ص + ٤س - ٢ص - ٢س - ٨س - ٤ص - ١٦ = ٠$  متساويان

(١١) هـ:  $٠ = ٨ - ص + ٨س - ٢ص - ٢س - ٥س - ٢ص - ١ = ٠$  متساويان داخلياً

(١٢) أوجد مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ.



المثلث أ ب جـ قائم الزاوية  
 $\therefore$  جـ قاطر الدائرة  
 $٤^2 + ٦^2 = ٢٠$   
 $\therefore (٢) = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$   
 $\therefore$  نخذ  $\sqrt{٢٠}$  وحدة طول  
 مركز الدائرة =  $(٣, ٣)$   
 معادلة الدائرة هي:  
 $(س + ٣)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٠$

المثلث قائم الزاوية  
 $\therefore$  جـ قاطر الدائرة  
 $\therefore$  نخذ  $\sqrt{٢٠}$  وحدة طول  
 منتصف جـ = مركز الدائرة =  $(٢, ٢)$   
 $\therefore$  معادلة الدائرة هي:  
 $(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 = ٨$



## اختبار الوحدة التاسعة

(١) أوجد قيمة  $s$  إذا كانت النقطة (١، ص) تبعد وحدة واحدة عن النقطة (١، ٠).  $s = 1$

(٢) أوجد النقاط (١، ص) التي تبعد  $\sqrt{17}$  وحدة عن النقطة (١، ٠).  $(5, 1), (-5, 1)$

(٣) إذا كان المستقيمان:  $4s - 1 = 6$ ، حيث  $6 = 3s + 2 = 0$  متعامدين. فما هي قيمة  $s$ ؟  $s = 2$

(٤) يمر مستقيم بالنقطتين:  $(-3, 9)$ ،  $(4, 4)$  ومستقيم آخر بالنقطتين:  $(9, 1)$ ،  $(4, 8)$ . هل المستقيمان

متوازيان أم متعامدان؟  
 ميل المستقيم الأول:  $m_1 = \frac{4-9}{4-(-3)} = \frac{-5}{7}$   
 ميل المستقيم الثاني:  $m_2 = \frac{1-8}{9-4} = \frac{-7}{5}$   
 $m_1 \cdot m_2 = \frac{-5}{7} \cdot \frac{-7}{5} = 1$   $\therefore$  المستقيمان متعامدان.

(٥) إذا كان المستقيم  $2s - 3 = 10$  مماس لدائرة مركزها  $(-2, 4)$ . أوجد معادلة هذه الدائرة.  
 نصف قطر الدائرة  $r = \frac{|11 - 4 \times 2 - (-3)|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$   
 معادلة الدائرة هي  $(s+2)^2 + (s-4)^2 = \frac{1}{13}$

(٦) أ ب ج مثلث فيه  $\angle (2, 3)$ ، ب  $(7, 8)$ ، ج  $(-2, 5)$ . د يقسم ب ج من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

(أ) أوجد إحداثي د.  $(4, 6)$

(ب) أوجد معادلة  $\overleftrightarrow{AD}$ .  $s = 1$  ميل  $\overleftrightarrow{AD}$  معادلة  $\overleftrightarrow{AD}$  هي  $s = 1$

(٧) لتكن معادلة  $\overleftrightarrow{AB}$  هي:  $5s - 2 = 0$ ، اختر نقطة تقع على  $\overleftrightarrow{AB}$  ولتكن ج  $(2, 0)$ . أوجد معادلة المستقيم العمودي على  $\overleftrightarrow{AB}$  ويمر بالنقطة ج.

معادلة المستقيم العمودي هي  $s = 5$

(٨) أ ب ج مثلث فيه  $\angle (4, 3)$ ، ب  $(8, 5)$ ، ج  $(8, 0)$  ب ج يوازي محور السينات، أ ج يوازي محور الصادات.

(أ) أوجد إحداثي النقطة ج.  $(8, 0)$

(ب) في السؤال (أ)، أثبت أن  $\Delta$  أ ب ج قائم الزاوية في ج.

$AC^2 = 8^2 + 5^2 = 89$ ،  $AB^2 = 8^2 + 3^2 = 73$ ،  $BC^2 = 8^2 + 5^2 = 89$

(٩)  $CO = 20$ ،  $AO = 16$ ،  $BO = 12$ ،  $CO = 20$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$

$\therefore \Delta AOB$  قائم الزاوية في ج

(٩) أ ب ج مثلث، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي  $P(11, 8)$ ،  $Q(5, 12)$ ،  $R(5, 3)$ ، ق منتصف  $\overline{AB}$ ، ك منتصف  $\overline{AC}$ .

(أ) أوجد إحداثيات ق، ك.

$$\text{ج} = (10, 8) \quad \text{ك} = (5, 5)$$

(ب) أثبت أن ق ك // ب ج.

$$\text{ميل ق ك} = \frac{\text{حزب}}{\text{ع.م}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{5 - 8}{10 - 11} = \frac{-3}{-1} = 3$$

(ج) أثبت أن ق ك =  $\frac{1}{2}$  ب ج.

$$\text{ح.ك} = \sqrt{(10-5)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$\text{ق ك} = \frac{1}{2} \text{ ب ج}$$

$$\sqrt{34} = \frac{1}{2} \sqrt{136} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \times 34} = \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{34} = \sqrt{34}$$

(د) أثبت أن  $\overline{AB}$  ليس عمودياً على ب ج.

$$\text{ميل ب ج} = \frac{5 - 8}{10 - 11} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad \text{ميل ب ج} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ميل ب ج} \times \text{ميل ب ج} \neq -1$$

∴  $\overline{AB}$  ليس عمودياً على ب ج.

تمارين إثرائية منتصف و ب = (١٥، ١٥)

ميل و ب = ١ -

ميل العمودي على و ب = ١

(١) لتأخذ النقاط و (٠، ٠)، ب (١، ٣)، أوجد:

(أ) معادلة النصف العمودي ل و ب، ل و ب. معادلة النصف العمودي على و ب هي (ص = ١٥) = س = ١٥  
منتصف و ب = (٣، ١.٥)

ص = ٣ - س = ٠

ميل و ب = ١ -

معادلة النصف العمودي ل و ب هي ص = ٣ - س = ٠

(ب) معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط أ، و، ب.

نقطة تقاطع المصفين هي مركز الدائرة:  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  ،  $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$  ،  $\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$  ،  $\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

معادلة الدائرة هي:  $(\frac{1}{2} - س)^2 + (\frac{3}{2} - ص)^2 = (\frac{3}{2})^2$

(ج) معادلة المماس على الدائرة في النقطة ب. ميل العمودي =  $\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$  ، ميل المماس =  $١ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

معادلة المماس هي  $٣ - ص = (٣ + س)١ - ١$

ص = ١٨ + س - ١٨

(٢) د دائرة معادلتها:  $س^2 + ص^2 - ١٥ - ٢ص = ٠$  ، م مستقيم معادلته:  $٤س + ٣ص = ٠$  ، ص =  $\frac{4}{3}$  ، ص =  $\frac{4}{3}$

المركز (١، ٣) ،  $٥ = ٥$

(أ) ارسم الدائرة والمستقيم على نظام إحداثيات مشترك.

(ب) ارسم المماسين م<sub>١</sub>، م<sub>٢</sub> للدائرة د والمتوازيان مع

المستقيم م.

(ج) أوجد معادلة المستقيم م<sub>١</sub> الذي يمر بمركز الدائرة د

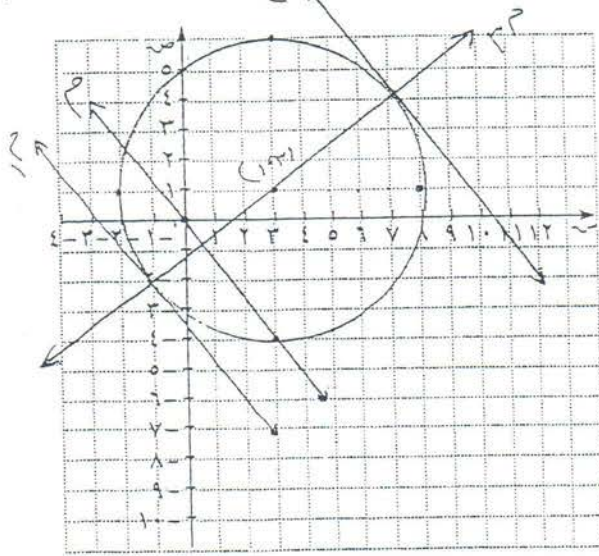
ومتعامد مع المستقيم م.

ص =  $١ - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$  (س = ٣)

ص =  $\frac{3}{2} - س = \frac{3}{2} - ٣ = -\frac{3}{2}$

(د) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع أ، ب للدائرة د

والمستقيم م: (٤، ٧) ، (٥، ١٠)



(هـ) أوجد معادلتى المماسين م<sub>١</sub>، م<sub>٢</sub>.

طريقه ص

معادله م

(ص - ٤) =  $\frac{4}{3}(س - ١)$

ص =  $\frac{4}{3}س - \frac{4}{3} + ٤ = \frac{4}{3}س + \frac{8}{3}$

ص =  $٢ - (٤ - س) = س - ٢$

ص =  $٢ + \frac{4}{3}(س + ١) = \frac{4}{3}س + \frac{10}{3}$

ص =  $\frac{4}{3}س - \frac{4}{3}$



(٣) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم:  $٣س - ٤ص + ١٦ = ٠$ .

نجد:  $\frac{١٦}{٥} = \frac{|١٦ + ٠ - ٠|}{\sqrt{٤^2 + ٣^2}}$  معادلة الدائرة:  $س + ٤ص = ١٦$   $\left(\frac{١٦}{٥}\right)$

(٤) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(١, -٣)$  وتمس المستقيم:  $٣س - ٦ص + ١٠ = ٠$ .

نجد:  $\frac{٩}{٥\sqrt{٣}} = \frac{٩}{\sqrt{٣^2 + ٦^2}} = \frac{|١٠ - ٣ + ١٨|}{\sqrt{٣^2 + ٦^2}}$  معادلة الدائرة هي:  $(س + ١) + (ص - ٣) = ١٠$   $\frac{١}{٥}$

(٥) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها  $(٢, ٠)$  وتمس المستقيم الذي معادلته  $ص = -\frac{٣}{٤}س + \frac{١١}{٤}$ .

نجد:  $١ = \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٥}{٤}} = \frac{|-\frac{١١}{٤} - ٢ \times \frac{٣}{٤} + ٠|}{\sqrt{(\frac{٣}{٤})^2 + ١}}$  معادلة الدائرة هي:  $١ = (س - ٢) + (ص - ٠)$

(٦) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين:  $س = ٢$ ،  $ص = ١$  وطول نصف قطرها وحدتان.

المركز  $(١, ١)$  ، نوجد:  $٤ = (س - ٢) + (ص - ١)$  معادلة الدائرة هي:  $٤ = (س - ٢) + (ص - ١)$

(٧) أثبت أن المستقيمين  $اس + ب ص + ج = ٠$ ،  $ا د س + ب د ص + ج = ٠$  متوازيان، حيث  $(د \neq ٠)$ .

معدل الميل الأول =  $\frac{- معامل س}{معامل ص} = \frac{ب}{د}$

معدل الميل الثاني =  $\frac{- د}{ب} = \frac{ب}{د}$



## تحليل البيانات

### Data Analysis

#### التمرين الأول

(١) البيانات التالية هي درجات أحد الطلاب في ٦ اختبارات رياضية، حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة:

$$٨٥, ٩٠, ٧٣, ٦٧, ٨٩, ٧٦. \text{ أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات. } = \frac{٨٥ + ٩٠ + ٧٣ + ٦٧ + ٨٩ + ٧٦}{٦} = ٨٠ \text{ درجة}$$

(٢) البيانات في الجدول أدناه هي درجات ٢٥ طالبًا في نهاية العام الدراسي لمادة الرياضيات، حيث النهاية

العظمى ١٠٠ درجة.

$$\frac{٩٠ \times ١٥}{٢٥} = \frac{٨٥ \times ٨ + ٧٦ \times ٦ + ٩٠ \times ٢ + ٨٣ \times ٥ + ٨٥ \times ٤}{٨ + ٦ + ٢ + ٥ + ٤} =$$

الدرجة	٨٥	٨٣	٩٠	٧٦	٧٨
التكرار	٤	٥	٢	٦	٨

أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

(٣) بين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل نبضات القلب عند ٢٣ طالبًا من الصف العاشر أثناء وقت الاستراحة.

$$\frac{٢٨ \times ٩ + ٤٨ \times ٦ + ٣٨ \times ٥ + ٢٨ \times ٧ + ٤٨ \times ٤ + ٢٨ \times ٣ + ٢٨ \times ٢ + ٢٨ \times ١}{٢٣} =$$

$$\frac{٢٨ \times ٩ + ٤٨ \times ٦ + ٣٨ \times ٥ + ٢٨ \times ٧ + ٤٨ \times ٤ + ٢٨ \times ٣ + ٢٨ \times ٢ + ٢٨ \times ١}{٢٣} =$$

$$\frac{٩٤٧٥}{٢٣} = ٤١٠ \text{ نبضة}$$

(٤) بين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طالبًا.

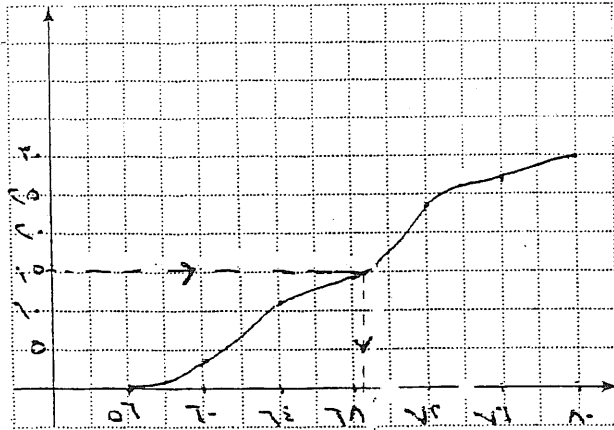
الفترة	-٥٦	-٦٠	-٦٤	-٦٨	-٧٢	-٧٦
التكرار	٣	٨	٣	٩	٤	٣

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الأوزان.

$$\bar{x} = \frac{\sum (x_i \times f_i)}{\sum f_i} = \frac{٩٠٩٨}{٣٠} = ٣٠٣,٢٦$$

الفترة	سما	تكرار	تكرار
-٥٦	٥٨	٣	١٧٤
-٦٠	٦٢	٨	٤٩٦
-٦٤	٦٦	٣	١٩٨
-٦٨	٧٠	٩	٦٣٠
-٧٢	٧٤	٤	٢٩٦
-٧٦	٧٨	٣	٢٣٤
المجموع		٣٠	٢٠٩٨

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحني التكرار المتجمع الصاعد.



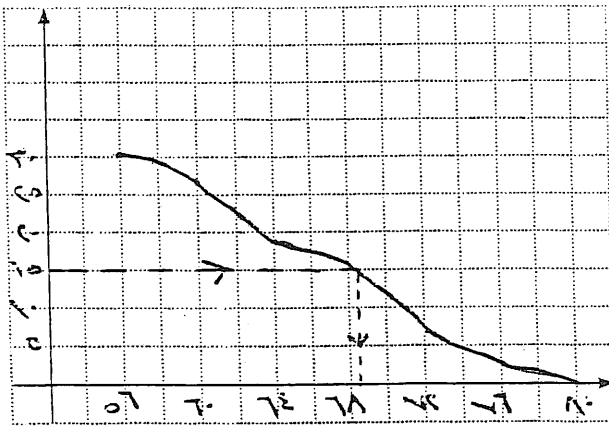
الفترة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفترة	التكرار المتجمع الصاعد
-56	3	أقل من 60	3
-60	8	أقل من 64	11
-64	3	أقل من 68	14
-68	9	أقل من 72	23
-72	4	أقل من 76	27
-76	3	أقل من 80	30

الحدود العليا للفترة

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{30}{2}$$

$$\text{الوسيط} = 78,5 \text{ تقريباً}$$

(ج) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحني التكرار المتجمع النازل.



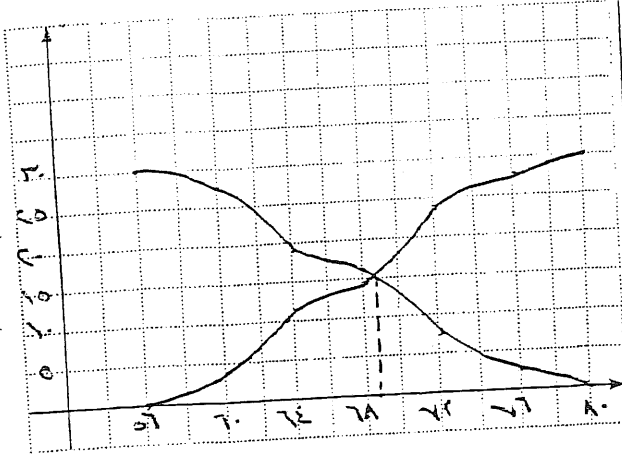
الفترة	التكرار	الحد الأدنى للفترة الأكثر تكراراً	التكرار المتجمع النازل
-56	3	56 فأكثر	30
-60	8	60 فأكثر	27
-64	3	64 فأكثر	19
-68	9	68 فأكثر	16
-72	4	72 فأكثر	7
-76	3	76 فأكثر	3

الحدود الدنيا للفترة

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{30}{2}$$

$$\text{الوسيط} = 78,5 \text{ تقريباً}$$

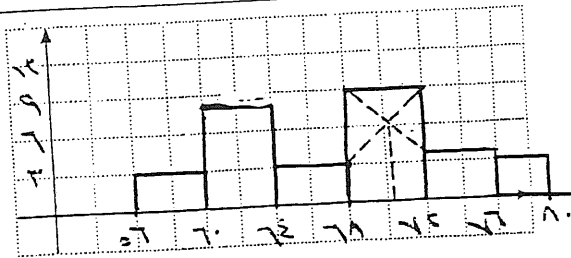
(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام متحنى التكرار التجمع الصاعد ومنحنى التكرار التجمع النازل.



الفترة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفترة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفترة	التكرار المتجمع النازل
-56	3	أقل من 56	3	56	30
-60	8	أقل من 60	11	60	27
-64	3	أقل من 64	14	64	19
-68	9	أقل من 68	23	68	16
-72	4	أقل من 72	27	72	7
-76	3	أقل من 76	30	76	3

الوسيط = 78,5 تقريباً

✓ (هـ) أوجد المتوال لهذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة.



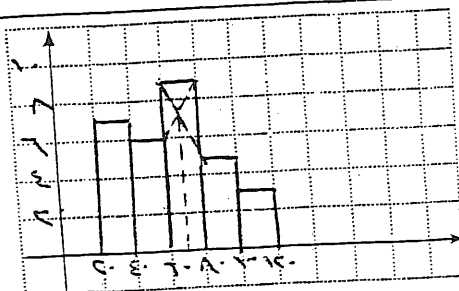
(و) أوجد المتوال لهذه الأوزان باستخدام المدرج التكراري.

المتوال = 78,5 تقريباً

(٥) يبين الجدول التالي ٥ فئات تمثل توزيع المصروف اليومي لـ ٣٠ عائلة بالدينار.

الفترة	-20	-40	-60	-80	-100
التكرار	7	6	9	5	3

✓ (أ) أوجد المتوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام قانون الرافعة.



(ب) أوجد المتوال لمصروف العائلات اليومي

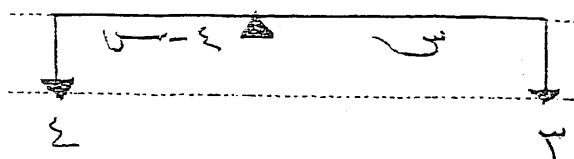
باستخدام المدرج التكراري.

المتوال = 79

مدرسة - قسم ١٤١ هـ - قسم ١٩١ - الحد الأقصى لقادرة ١٢٤

رقم [٤] [٥] ١١٤

المردف للغة المنوالية - ٦٨



ف = ٤

ل = ٣

ل = ٤

$$ل \times س = ل \times (ف - س)$$

$$٣ \times س = ٤ \times (٤ - س)$$

$$٣ س = ١٦ - ٤ س$$

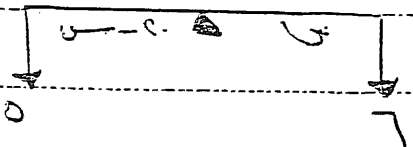
$$٣ س + ٤ س = ١٦ \quad ٧ س = ١٦$$

$$س = \frac{١٦}{٧} \approx ٢,٢٨$$

المردف = المردف للغة المنوالية + س = ٦٨ + ٢,٢٨ = ٧٠,٢٨

رقم [٤] [٥] ١١٤

المردف للغة المنوالية = ٦٠



ل = ٦  
ل = ٥  
ف = ٥

$$ل \times س = ل \times (ف - س)$$

$$٦ \times س = ٥ \times (٥ - س)$$

$$٦ س = ٢٥ - ٥ س \quad ٦ س + ٥ س = ٢٥ \quad ١١ س = ٢٥$$

$$س = \frac{٢٥}{١١} \approx ٢,٢٧ \quad \text{المردف} = ٦٠ + ٢,٢٧ = ٦٢,٢٧$$



(١) يبين الجدول التالي معدل درجات الحرارة العظمى والصغرى في دولة الكويت، حيث يقاس معدل الدرجة العظمى عند الساعة ٣ عصرًا ويقاس معدل الدرجة الصغرى عند الساعة ٣ فجرًا.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
معدل الدرجة العظمى	١٨	٢٠	٢٥	٣٠	٣٨	٤٣	٤٥	٤٥	٤٣	٣٧	٢٨	٢١
معدل الدرجة الصغرى	٧	٩	١٣	١٨	٢٣	٢٨	٣٠	٢٨	٢٥	٢٢	١٦	٩

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لمعدل الدرجات العظمى والمتوسط الحسابي لمعدل الدرجات الصغرى.

ماذا تلاحظ؟

معدل الصفحات لقرآن كريم

رقم ١١ (١٠٠٠٠) رقم ٢٠٠٠

(ب) رتب تصاعديًا معدل الدرجات العظمى ومعدل الدرجات الصغرى، ثم أوجد الوسيط لكل مجموعة.

(ج) ما المتوال لمعدل درجات الحرارة العظمى؟

ما المتوال لمعدل درجات الحرارة الصغرى؟

(٢) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأهداف الفرق في مباريات كأس العالم لسنة ٢٠٠٦.

الأهداف	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار (عدد الفرق)	٧	١٣	١٨	١٢	١٠	٢	٢

أوجد المتوسط الحسابي للأهداف.

(٣) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري على فئات لقياسات أرجل ٥٠ رياضيًا في أحد النوادي.

الفئة	٣٩	٤١	٤٣	٤٥	٤٧	٤٩
تكرار	١١	١٦	١٧	٦	٥٠	٢٠٨٦

الفئة	-٣٨	-٤٠	-٤٢	-٤٤
التكرار	١١	١٦	١٧	٦

(أ) أوجد المتوسط الحسابي للقياسات.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{9086}{50} = 181.72$$

رقم 115 ب

- المتوسط الحسابي لمعدل الدرجات العظمى =

$$15,70 = \frac{292}{12} = \frac{11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0}{12}$$

- المتوسط الحسابي لمعدل الدرجات الصغرى =

$$19 = \frac{228}{12} = \frac{7 + 9 + 13 + 18 + 23 + 28 + 30 + 28 + 20 + 25 + 17 + 9}{12}$$

رقم 115 ج

- الترتيب التصاعدي لمعدل الدرجات العظمى:

11 / 10 / 9 / 8 / 7 / 6 / 5 / 4 / 3 / 2 / 1 / 0

$$\text{الوسيط} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

- الترتيب التصاعدي لمعدل الدرجات الصغرى:

7 / 9 / 9 / 13 / 17 / 18 / 20 / 23 / 28 / 28 / 30

$$\text{الوسيط} = \frac{18 + 20}{2} = 19$$

رقم 115 د

السؤال لمعدل الدرجات العظمى = 15,70

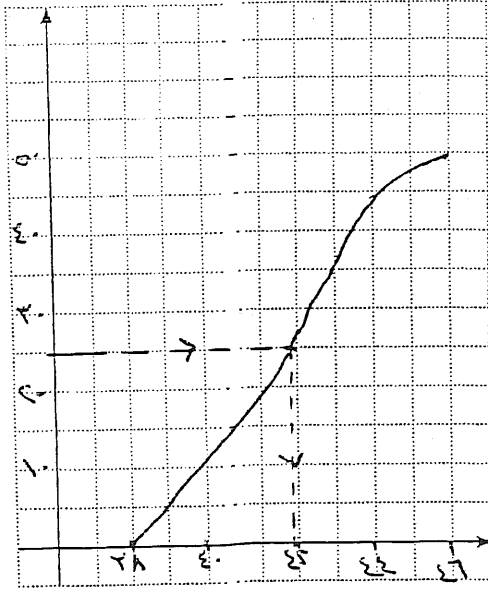
السؤال لمعدل الدرجات الصغرى = 19

رقم 115 هـ

$$127 = \frac{287 + 280 + 10 \times 4 + 12 \times 3 + 18 \times 5 + 13 \times 1 + 7 \times 0}{74} = \frac{2 + 2 + 10 + 12 + 18 + 13 + 7}{74}$$

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحني التكرار المتجمع الصاعد.

التكرار المتجمع الصاعد



الحدود العليا للفئات

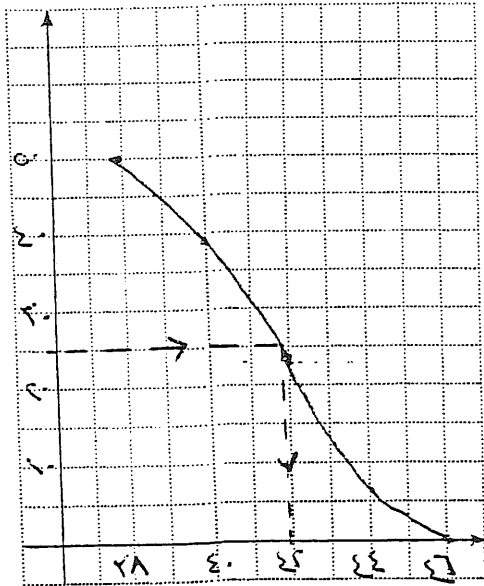
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-38	11	أقل من 40	11
-40	16	أقل من 42	27
-42	17	أقل من 44	44
-44	6	أقل من 46	50

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\text{الوسيط} \approx 41.9$$

(ج) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحني التكرار المتجمع النازل.

التكرار المتجمع النازل



الحدود الدنيا للفئات

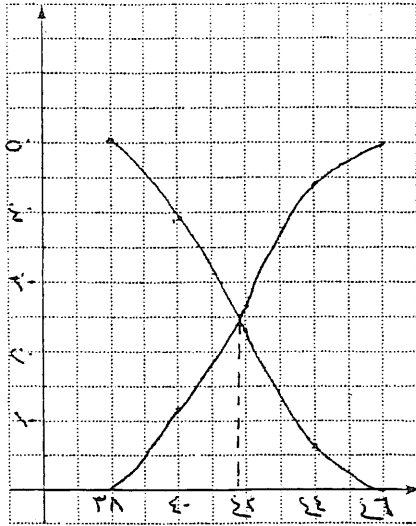
الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-38	11	38 فأكثر	50
-40	16	40 فأكثر	39
-42	17	42 فأكثر	23
-44	6	44 فأكثر	6

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\text{الوسيط} \approx 41.9$$

(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

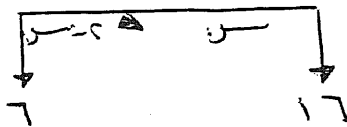
الفترة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفترة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفترة	التكرار المتجمع النازل
-٣٨	١١	أقل من ٤٠	١١	٣٨	٥٠
-٤٠	١٦	أقل من ٤٤	٢٧	٤٠	٣٩
-٤٢	١٧	أقل من ٤٤	٤٤	٤٤	٢٣
-٤٤	٦	أقل من ٤٤	٥٠	٤٤	٦



الوسيط = ٤١,٨

(هـ) أوجد المدى للفترة المتوسطة = ٤٢

$$ف = ٢ \quad ل = ١٦ \quad ك = ٦٠$$



$$ل - ك = ١٦ - ٦ = ١٠$$

$$ل - ك = ١٦ - ٦ = ١٠$$

$$١٦ - ١٢ = ٤$$

$$١٦ - ١٢ = ٤$$

$$\frac{٤}{٢} = ٢$$

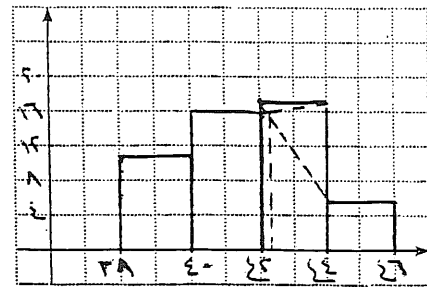
$$٢ = ٢$$

$$الموتال = ٤٢ + ٢ = ٤٤$$

$$٤٤ = ٤٤$$

(هـ) أوجد المتوال لهذه القياسات باستخدام قانون الرافعة.

(و) أوجد المتوال لهذه القياسات باستخدام المدرج التكراري.



المتوال = ٤٤,٣



تَمَرَّنْ

٢-١٠

التاريخ الميلادي:

التاريخ الهجري:

## الأرباعيات Quartiles

المجموعتان الأساسيتان

(١) أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

(أ) ٣، ٤، ٥، ١٠، ٩، ٨، ٦، ٤، ٧

$$\text{المدى} = 10 - 3 = 7$$

(ب) ١٦، ١٢، ١٩، ١٨، ١٥، ٢٣، ١١، ٢٠، ١٧

$$\text{المدى} = 23 - 11 = 12$$

(٢) أوجد الوسيط (٢)، والأرباعي الأدنى (٢)، والأرباعي الأعلى (٢) والمدى الأرباعي ومجموع الأعداد الخمسة

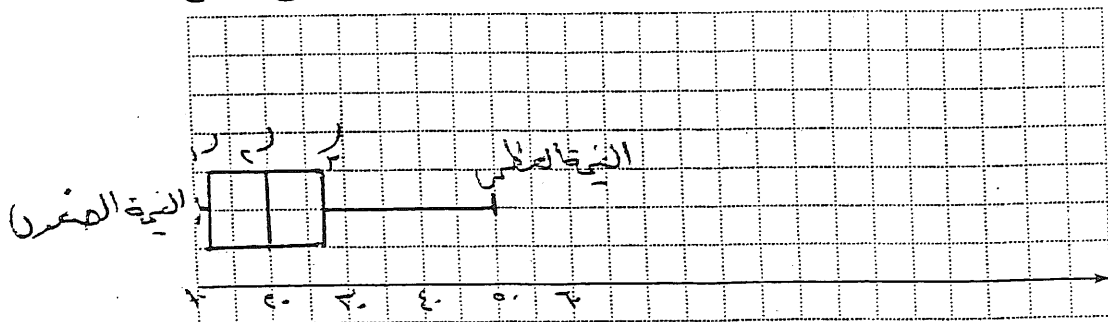
للبينات: ٦٢، ٩٥، ٦٤، ٦٦، ٦٥، ٥٩، ٥٤، ٥٠، ٦٠، ٥٢

الترتيب التصاعدي للبيانات: ٥٠، ٥٢، ٥٤، ٥٩، ٦٠، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٩٥

(٣) (أ) أوجد مجموع الأعداد الخمسة للقيم التالية التي تمثل أوزان أكياس من الأرز: ٢٣، ١٧، ١٣، ١٢، ١١، ١٠، ٩، ٨، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ٠  
الترتيب التصاعدي: ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٧، ٢٣

$$\begin{aligned} \text{الوسيط} &= \frac{11 + 12}{2} = 11.5 \\ \text{الأرباعي الأدنى} &= \frac{3 + 4}{2} = 3.5 \\ \text{الأرباعي الأعلى} &= \frac{17 + 18}{2} = 17.5 \\ \text{المدى} &= 18 - 3 = 15 \end{aligned}$$

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم البيانات في (أ). ماذا تستنتج؟ اشرح.



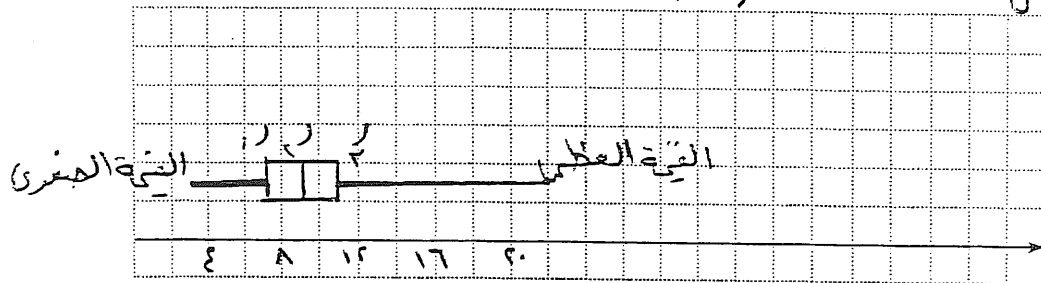
(٤) يبين الجدول التالي تواريخ وأطوال الأعاصير التي اجتاحت إحدى المدن في سنة ١٩٩٥.

التاريخ	٤/١٧	٤/١٨	٤/١٩	٥/٦	٥/٧	٦/٨	٦/٩
طول الإعصار (بالكيلومتر)	٣	٧	١١	٢٠	١٠	٨	٩

ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين مع القيمة المتطرفة. وفتر النتائج.

توب البيانات: ٣ ٤ ٦ ٨ ٩ ١٠ ١١ ٢٠

٩ = ل<sup>م</sup> ٧ = ل<sup>د</sup> ١١ = ل<sup>ع</sup>  
مجموع الأعداد الخمسة ( ٣ ٤ ٦ ٨ ٩ )



### المجموعة الثانية من التمرينات

(١) أوجد المدى، الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي ومجموع الأعداد الخمسة للبيانات التالية:

(أ) ٨٠، ٧٧، ٦٧، ٦٤، ٦٢، ٥٨، ٤٩

المدى = ٨٠ - ٤٩ = ٣١      ل<sup>د</sup> = ٦٤      ل<sup>م</sup> = ٥٨      ل<sup>ع</sup> = ٧٧  
المدى الأرباعي = ٧٧ - ٥٨ = ١٩      مجموع الأعداد الخمسة ( ٤٩ ٥٨ ٦٤ ٧٧ ٨٠ )

(ب) ١١٠، ١٠٩، ١٠٥، ١٠٤، ١٠٣، ١٠٢، ١٠١، ١٠٠

المدى = ١١٠ - ١٠٠ = ١٠      ل<sup>د</sup> = ١٠٣      ل<sup>م</sup> = ١٠٥      ل<sup>ع</sup> = ١٠٩      مجموع الأعداد الخمسة ( ١٠٠ ١٠١ ١٠٢ ١٠٣ ١٠٤ )  
المدى الأرباعي = ١٠٩ - ١٠٥ = ٤      مجموع الأعداد الخمسة ( ١٠٠ ١٠١ ١٠٢ ١٠٣ ١٠٤ )

(ج) ٢٠، ١٩، ١٩، ١٧، ١٥، ١٤، ١٣، ١٢، ١١

المدى = ٢٠ - ١١ = ٩      ل<sup>د</sup> = ١٥      ل<sup>م</sup> = ١٣      ل<sup>ع</sup> = ١٩      مجموع الأعداد الخمسة ( ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ )  
المدى الأرباعي = ١٩ - ١٥ = ٤      مجموع الأعداد الخمسة ( ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ )

- ١٣ -

(٢) بيّن الجدول التالي عدد أكبر الزلازل التي حدثت في العالم حيث قوتها تخطت ٧ درجات على مقياس ريختر وذلك بين ١٩٨٥ و ١٩٩٤.

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
عدد الزلازل	١٤	٣	١٢	٨	٧	١٣	١٢	٣٣	١٥	١٤

(أ) أوجد الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

ترتيب البيانات تصاعدياً: ٦، ٨، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ١٦، ٣٣

$$١٢ = \frac{١١ + ١٣}{٢}$$

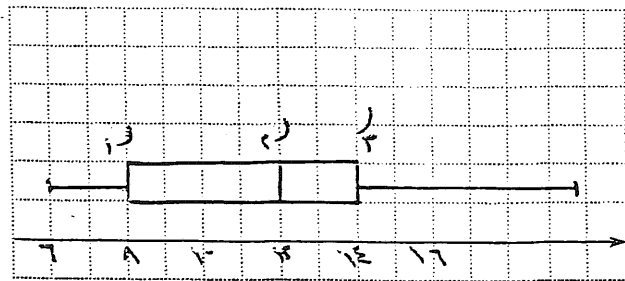
$$٨ = ١$$

$$١٤ = ٣$$

$$\text{المدى الأرباعي} = ١٤ - ٨ = ٦$$

مجمل الأعداد الخمسة ( ٦ ٨ ١٢ ١٤ ٣٣ )

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات بدون القيمة المتطرفة.



(٣) بيّن الجدول التالي معدل دخل الفرد السنوي في بعض الدول العربية بالدولار الأميركي بحسب البنك الدولي (أعداد تقريبية).

الدولة	الإمارات العربية المتحدة	المملكة العربية السعودية	دولة الكويت	سلطنة عمان	دولة قطر	لبنان	الأردن	تونس	سورية	مملكة البحرين
معدل الدخل بآلاف الدولارات	٢٤	١٠	٢٢	٩	٢٩	٦	٢	٣	١	١٤

(أ) أوجد الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

الترتيب التصاعدي للبيانات: ١ ٢ ٣ ٤ ٦ ٩ ١٠ ١٤ ٢٢ ٢٩

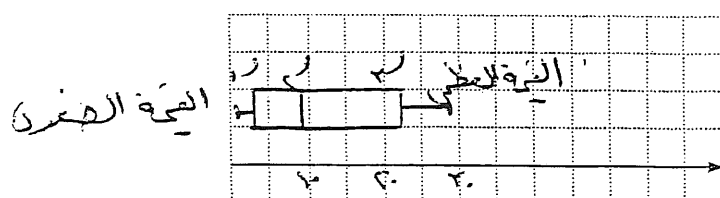
$$٢٢ = ٢$$

$$٣ = ١$$

$$٩,٥ = \frac{١٠ + ٩}{٢}$$

المدى الرباعي = ٢٢ - ٣ = ١٩ مجمل الأعداد الخمسة (١ ٢ ٩,٥ ٢٢ ٢٩)

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات. ماذا تستنتج؟ اشرح.



يسين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأدنى هما الثمن من البيانات والأرباعي الأعلى والأرباعي الأعلى هما الثمن من البيانات. (أي أن هناك تقارب بين دخل الفرد ومخطط الصندوق لا يبين عبور قيمة متطرفة).



## الانحراف المعياري Standard Deviation

### المجموعة الأولى: أسئلة

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية (يمكن استخدام الآلة الحاسبة):

(أ) ٥٢، ٦٣، ٥٤، ٧٠، ٦٦.

$$\bar{x} = \frac{52 + 63 + 54 + 70 + 66}{5} = \frac{305}{5} = 61$$

تكرار	تكرار - $\bar{x}$	(تكرار - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>
٥٢	٩ -	٨١
٦٣	٢	٤
٥٤	٧ -	٤٩
٧٠	٩	٨١
٦٦	٥	٢٥
المجموع = ٢٢٠		

$$\text{لتباينه} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{220}{5} = 44$$

$$\text{انحراف المعياري} = \sqrt{44} = 6,63$$

(ب) ١٥، ١٠، ٨، ١٥، ١٢، ١٧، ٢، ١.

$$\bar{x} = \frac{15 + 10 + 8 + 15 + 12 + 17 + 2 + 1}{8} = \frac{70}{8} = 8,75$$

تكرار	تكرار - $\bar{x}$	(تكرار - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>
١	٩ -	٨١
٢	٨ -	٦٤
١٢	٣	٩
١٥	٦	٣٦
١٥	٦	٣٦
٨	١ -	١
١٠	١ -	١
١٥	٦	٣٦
المجموع = ٢٥٢		

$$\text{لتباينه} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{252}{8} = 31,5$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{31,5} = 5,61$$

(ج) ١١، ١٩، ١٢، ١٨، ١٧، ١٥، ١٣

$$\bar{x} = \frac{100}{7} = \frac{11+19+12+18+17+15+13}{7} = 15$$

سار	سار - سار	(سار - سار) <sup>٢</sup>
١٣	٢ -	٤
١٥	٠	٠
١٧	٢	٤
١٨	٣	٩
١٤	٢ -	٩
١٩	٤	١٦
١١	٤ -	١٦
		المجموع = ٥٨

$$\text{التباين} = \sigma^2 = \frac{58}{7} = 8,3$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{8,3} = 2,9$$

(د) ٥٨٠، ٧٢٠، ٢٣٠، ٦١٠، ٤٨٠، ٣٥٠

هل تتغير النتيجة إذا قسمت هذه القيم على ١٠؟ اشرح.

$$\bar{x} = \frac{580+720+230+610+480+350}{6} = \frac{2970}{6} = 495$$

$$\bar{x} = 495$$

$$\text{التباين} = \sigma^2 = \frac{162500}{6} = 27083,3$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{27083,3} = 164,3$$

سار	سار - سار	(سار - سار) <sup>٢</sup>
٣٥٠	١٤٥ -	٢١٠٢٥
٤٨٠	١٥ -	٢٢٥
٦١٠	١١٥	١٣٢٢٥
٢٣٠	٢٦٥ -	٧٠٢٢٥
٧٢٠	٢٢٥	٥٠٦٢٥
٥٨٠	٨٥	٧٢٢٥
		المجموع = ١٦٢٥٥٠

إذا قسمنا البيانات على ١٠ لا تتغير القيم (الانحراف المعياري الناتج يكون هو الآخر مقسوماً على ١٠)

سار	سار - سار	(سار - سار) <sup>٢</sup>
٣٥	١٤,٥ -	٢١٠,٢٥
٤٨	١,٥ -	٢,٢٥
٦١	١١,٥	١٣٢,٢٥
٢٣	٢٦,٥ -	٧٠٢,٢٥

$$\bar{x} = 49,5$$

$$\sigma^2 = \frac{16250}{6} = 2708,3$$

$$\sigma = \sqrt{2708,3} = 52,0$$

السجادة  
بالحلف

(أ) كَوْنُ جَدْوَلٍ تَكَرَّرِيًّا لِقِيَمِ هَذِهِ الْبَيَانَاتِ. ثُمَّ أَوْجَدَ الْمُتَوَسُّطَ الْحَسَابِيَّ.

1301

(٣) يبين الجدول التالي الطاقة الكهربائية المستهلكة بالميغاواط/ ساعة خلال خمسة أيام متتالية في إحدى المدن.

اليوم	١	٢	٣	٤	٥
الطاقة المستهلكة	٤٨,٠	٥٣,٢	٥٢,٣	٤٦,٦	٤٩,٩

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

$$\bar{x} = \frac{48 + 53.2 + 52.3 + 46.6 + 49.9}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{250}{5} = 50$$

$$\text{التباين} = s^2 = \frac{31.1}{5} = 6.22$$

$$\text{الانحراف المعياري} = s = \sqrt{6.22} = 2.5$$

عدد	عدد - س	(عدد - س) <sup>٢</sup>
٤٨	٢ -	٤
٥٣,٢	٣,٢	١٠,٢٤
٥٢,٣	٢,٣	٥,٢٩
٤٦,٦	٣,٤ -	١١,٥٦
٤٩,٩	١ -	١
		٣١,١

### التمرين الثاني

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية، ماذا تستنتج؟

(أ) ٣,٩,٨,٤,٦,٧,٥

$$\bar{x} = \frac{42}{7} = \frac{3+9+8+4+6+7+5}{7}$$

$$\text{التباين} = s^2 = \frac{28}{7}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = s = \sqrt{4}$$

$$2 = \sqrt{4}$$

عدد	عدد - س	(عدد - س) <sup>٢</sup>
٥	١ -	١
٧	١	١
٦	٠	٠
٤	٢ -	٤
٨	٢	٤
٩	٣	٩
٣	٣ -	٩
		٢٨



۲۹، ۳۳، ۳۴، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱ (ب)

$$\frac{37+22+33+27+29+24+20+32}{\wedge} = \overline{\text{نمبر}}$$

ستار	ستار-ستار	ستار-ستار
۳۴	۶-	۳۶
۴۵	۵	۴۵
۳۷	۳-	۹
۴۲	۲	۴
۳۶	۴-	۱۶
۴۳	۳	۹
۴۴	۴	۱۶
۳۹	۱-	۱
		۱۱۶

$$x = \sqrt{y}$$

$$12,0 = \frac{117}{1} = 117$$

$$\tau_{\perp} \approx \sqrt{\epsilon_0} = \epsilon$$

(٢) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لاستهلاك الطاقة الكهربائية بالميجاواط/ ساعة طيلة شهر أغسطس في

إحدى المدن:

٥٤	٥٣	٥٢	٥٠	٤٩	٤٧	٤٦	٤٥	٤٤	٤٣	٤٢	٤١	٤٠	٣٩	٣٦	٣٣	الكمية
١	٢	١	١	٢	٣	١	٢	١	٢	٢	٢	٣	٣	١	٤	التكرار

(أ) أوجد المتوسط الحسابي .

$$0 \ 241.7 + 0.6 + 0.49 + 1.61 + 2.7 + 9. + 22 + 48.25 + 88.25 + 128.25 + 178.25 + 238.25 + 308.25 + 388.25 + 478.25 + 578.25 + 688.25 + 808.25 + 938.25 + 1078.25 + 1228.25 + 1388.25 + 1558.25 + 1738.25 + 1928.25 + 2128.25 + 2338.25 + 2558.25 + 2788.25 + 3038.25 + 3298.25 + 3568.25 + 3848.25 + 4138.25 + 4438.25 + 4748.25 + 5068.25 + 5398.25 + 5738.25 + 6088.25 + 6448.25 + 6818.25 + 7198.25 + 7588.25 + 7988.25 + 8398.25 + 8818.25 + 9248.25 + 9688.25 + 10138.25 + 10598.25 + 11068.25 + 11548.25 + 12038.25 + 12538.25 + 13048.25 + 13568.25 + 14098.25 + 14638.25 + 15188.25 + 15748.25 + 16318.25 + 16898.25 + 17488.25 + 18088.25 + 18698.25 + 19318.25 + 19948.25 + 20588.25 + 21238.25 + 21898.25 + 22568.25 + 23248.25 + 23938.25 + 24638.25 + 25348.25 + 26068.25 + 26798.25 + 27538.25 + 28288.25 + 29048.25 + 29818.25 + 30598.25 + 31388.25 + 32188.25 + 32998.25 + 33818.25 + 34648.25 + 35488.25 + 36338.25 + 37198.25 + 38068.25 + 38948.25 + 39838.25 + 40738.25 + 41648.25 + 42568.25 + 43498.25 + 44438.25 + 45388.25 + 46348.25 + 47318.25 + 48298.25 + 49288.25 + 50288.25 + 51298.25 + 52318.25 + 53348.25 + 54388.25 + 55438.25 + 56488.25 + 57548.25 + 58618.25 + 59698.25 + 60788.25 + 61888.25 + 62988.25 + 64098.25 + 65208.25 + 66328.25 + 67458.25 + 68598.25 + 69748.25 + 70898.25 + 72058.25 + 73218.25 + 74388.25 + 75558.25 + 76738.25 + 77918.25 + 79108.25 + 80308.25 + 81518.25 + 82728.25 + 83948.25 + 85168.25 + 86398.25 + 87628.25 + 88868.25 + 90108.25 + 91358.25 + 92608.25 + 93868.25 + 95128.25 + 96398.25 + 97668.25 + 98938.25 + 100218.25 + 101508.25 + 102798.25 + 104088.25 + 105378.25 + 106668.25 + 107958.25 + 109248.25 + 110538.25 + 111828.25 + 113118.25 + 114408.25 + 115698.25 + 116988.25 + 118278.25 + 119568.25 + 120858.25 + 122148.25 + 123438.25 + 124728.25 + 126018.25 + 127308.25 + 128598.25 + 129888.25 + 131178.25 + 132468.25 + 133758.25 + 135048.25 + 136338.25 + 137628.25 + 138918.25 + 140208.25 + 141498.25 + 142788.25 + 144078.25 + 145368.25 + 146658.25 + 147948.25 + 149238.25 + 150528.25 + 151818.25 + 153108.25 + 154398.25 + 155688.25 + 156978.25 + 158268.25 + 159558.25 + 160848.25 + 162138.25 + 163428.25 + 164718.25 + 166008.25 + 167298.25 + 168588.25 + 169878.25 + 171168.25 + 172458.25 + 173748.25 + 175038.25 + 176328.25 + 177618.25 + 178908.25 + 180198.25 + 181488.25 + 182778.25 + 184068.25 + 185358.25 + 186648.25 + 187938.25 + 189228.25 + 190518.25 + 191808.25 + 193098.25 + 194388.25 + 195678.25 + 196968.25 + 198258.25 + 199548.25 + 200838.25 + 202128.25 + 203418.25 + 204708.25 + 205998.25 + 207288.25 + 208578.25 + 209868.25 + 211158.25 + 212448.25 + 213738.25 + 215028.25 + 216318.25 + 217608.25 + 218898.25 + 220188.25 + 221478.25 + 222768.25 + 224058.25 + 225348.25 + 226638.25 + 227928.25 + 229218.25 + 230508.25 + 231798.25 + 233088.25 + 234378.25 + 235668.25 + 236958.25 + 238248.25 + 239538.25 + 240828.25 + 242118.25 + 243408.25 + 244698.25 + 245988.25 + 247278.25 + 248568.25 + 249858.25 + 251148.25 + 252438.25 + 253728.25 + 255018.25 + 256308.25 + 257598.25 + 258888.25 + 260178.25 + 261468.25 + 262758.25 + 264048.25 + 265338.25 + 266628.25 + 267918.25 + 269208.25 + 270498.25 + 271788.25 + 273078.25 + 274368.25 + 275658.25 + 276948.25 + 278238.25 + 279528.25 + 280818.25 + 282108.25 + 283398.25 + 284688.25 + 285978.25 + 287268.25 + 288558.25 + 289848.25 + 291138.25 + 292428.25 + 293718.25 + 295008.25 + 296298.25 + 297588.25 + 298878.25 + 300168.25 + 301458.25 + 302748.25 + 304038.25 + 305328.25 + 306618.25 + 307908.25 + 309198.25 + 310488.25 + 311778.25 + 313068.25 + 314358.25 + 315648.25 + 316938.25 + 318228.25 + 319518.25 + 320808.25 + 322098.25 + 323388.25 + 324678.25 + 325968.25 + 327258.25 + 328548.25 + 329838.25 + 331128.25 + 332418.25 + 333708.25 + 334998.25 + 336288.25 + 337578.25 + 338868.25 + 340158.25 + 341448.25 + 342738.25 + 344028.25 + 345318.25 + 346608.25 + 347898.25 + 349188.25 + 350478.25 + 351768.25 + 353058.25 + 354348.25 + 355638.25 + 356928.25 + 358218.25 + 359508.25 + 360798.25 + 362088.25 + 363378.25 + 364668.25 + 365958.25 + 367248.25 + 368538.25 + 369828.25 + 371118.25 + 372408.25 + 373698.25 + 374988.25 + 376278.25 + 377568.25 + 378858.25 + 380148.25 + 381438.25 + 382728.25 + 384018.25 + 385308.25 + 386598.25 + 387888.25 + 389178.25 + 390468.25 + 391758.25 + 393048.25 + 394338.25 + 395628.25 + 396918.25 + 398208.25 + 399498.25 + 400788.25 + 402078.25 + 403368.25 + 404658.25 + 405948.25 + 407238.25 + 408528.25 + 409818.25 + 411108.25 + 412398.25 + 413688.25 + 414978.25 + 416268.25 +$$

$$1+5+1+1+0+7+1+0+1+5+5+0+8+5+1+6$$

$$Z_0 = \frac{100}{21} = 4.76$$

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات باستخدام الآلة الحاسبة.

$$9(\xi_{2,0} - 21)\tau + (\xi_{2,0} - 21)\tau + (\xi_{2,0} - 21)\tau + (\xi_{2,0} - 21)\tau + (\xi_{2,0} - 21)\tau + (\xi_{2,0} - 21)\tau = 7\xi$$

[illegible]

$$\gamma, 0 \leq \gamma, \gamma \leq \varepsilon \quad \text{für } \varepsilon = \varepsilon$$

\*(3) يبين الجدول التالي متوسط استهلاك الفرد خلال سنة للطاقة الكهربائية بالكيلوواط / ساعة وذلك من سنة ٢٠٠٠ إلى سنة ٢٠٠٨. أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. ماذا تستنتج؟

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
الكمية	١٢٣٠٥	١٢٦٧٧	١٢٨٣٢	١٢٩٩٢	١٢٩٤٠	١٢٦٧٣	١٣٠٦١	١٢٥٢٧	١٣١٤٢

عدد قيم ١٣٩ ، ص ١٢٩ : لم تذكر

(4) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لكمية المياه بالستيلتر الموجودة في ١٠٠ عبوة. سعة العبوة الواحدة المفترضة ١٠٠ ستيلتر.

الفترة	-٨٦	-٩٠	-٩٤	-٩٨	-١٠٢	-١٠٦
التكرار	٥	١٠	٣٩	٣٢	٩	٥

أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

الفترة	مكرر	تار	ترسار
-٨٦	٨٨	٥	٤٤٠
-٩٠	٩٥	١٠	٩٥٠
-٩٤	٩٦	٣٩	٣٧٤٤
-٩٨	١٠٠	٣٢	٣٢٠٠
-١٠٢	١٠٤	٩	٩٣٦
-١٠٦	١٠٨	٥	٥٤٠
		١٠٠	٩٧٨٠

$$\bar{x} = \frac{9780}{100} = 97,8 \approx 98$$

$$s^2 = \frac{5(98-88)^2 + 10(98-90)^2 + 39(98-94)^2 + 32(98-98)^2 + 9(98-102)^2 + 5(98-106)^2}{100} = \frac{5(100) + 10(64) + 39(16) + 32(0) + 9(16) + 5(144)}{100} = \frac{500 + 640 + 624 + 0 + 144 + 720}{100} = \frac{2584}{100} = 25,84$$

$$s = \sqrt{25,84} = 5,08 \approx 5,1$$

$$s, s = \sqrt{19,68} = 4,44$$

- ١٣٨ -

رقم ۳ و ۱۵۷

$$\frac{12162 + 12057 + 1271 + 12773 + 1292 + 12992 + 12832 + 12777 + 1230}{9} = 12794$$

9

$$12794 \approx 12794.2$$

سار	سار - سار	سار - سار (سار - سار)
1230	- 89	12162
12777	- 117	12057
12832	21	1271
12992	191	12773
1292	147	1292
12773	- 121	12832
12777	277	12777
1292	- 277	1230
12162	248	12162
093.97		

$$70899.7 = \frac{093.97}{9} = 10.444$$

$$70899.7 = \sqrt{70899.7} = 266.27$$

## طرق العد

## Methods of Counting

### المجموعتان الأساسيتان

في التمارين (١ - ٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) كلمات مكونة من ثلاثة حروف: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من بين ثلاثة حروف: ع، ل،

م دون تكرارها (دون الاهتمام بالمعنى)؟  $٣ \times ٢ \times ١ = ٦$

(٢) الطرق الممكنة: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين

القرية ب والقرية ج. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية ج مروراً بالقرية ب؟

$٣ \times ٤ = ١٢$

(٣) الرئيس ونائب الرئيس: يوجد ثلاثة مرشحين لمنصب الرئيس وأربعة مرشحين لمنصب نائب الرئيس. كم

عدد الأزواج التي يمكن أن تكون من رئيس ونائب رئيس؟

$٣ \times ٤ = ١٢$

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

(٤) أرقام الهاتف: كم عدد أرقام الهاتف التي يمكن أن تكونها من سبعة أرقام علماً بأنه لا يمكن أن يبدأ الرقم من

اليسار بـ ٠ أو ١، لماذا؟

$١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ١٠٠٠٠٠٠$



(٥) لوحات الترخيص: كم عدد لوحات الترخيص التي يمكن أن تكونها من رقمين يتبعهما حرفان ثم ثلاثة أرقام بدون أن تتكرر أي حروف أو أرقام؟

$$99 \times 26 \times 26 \times 10 = 676 \times 26 \times 10 = 175760$$

(٦) رمي حجر نرد: عند رمي حجري نرد أحدهما أحمر والثاني أخضر معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما. كم عدد النواتج الممكنة؟

$$36 = 6 \times 6$$

في التمارين (٧-١٠)، أوجد قيمة كل مما يلي:

$$(٧) ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ =$$

$$(٨) ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ =$$

$$(٩) ١٠ \times ١١ \times ١٢ \times ١٣ \times ١٤ = 166080$$

$$(١٠) ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = 6227020800$$

في التمارين (١١-١٣)، حل المسائل التالية:

(١١) تكوين اللجان: سوف يتم انتخاب لجنة مكونة من ٣ سيدات من بين ٢٥ سيدة. كم عدد اللجان المختلفة

$$= 25 \times 24 \times 23 = 13800$$

(١٢) شراء أقراص حاسوب مدججة: لدى جيهان نقود تكفي لشراء ثلاثة أقراص حاسوب مدججة فقط من بين

$$48 \text{ قرصًا. كم عدد مجموعة أقراص الحاسوب التي يمكن شراؤها؟ } = \frac{48 \times 47 \times 46}{6} = 16816$$

(١٣) يجري مدير شؤون الموظفين مقابلات شخصية مع ثمانية أشخاص مرشحين لثلاث وظائف شاغرة. كم

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

### المجموعات التمارين التمهيدية

في التمارين (١-٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) كلمات مكونة من ثلاثة حروف: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من ثلاثة حروف دون

$$٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$$

(٢) الطرق الممكنة: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين

القرية ب والقرية ج. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية ج والرجوع إلى القرية أ مرورًا بالقرية

$$٤ = ٣ \times ٤ + ٤ \times ٣$$

(٣) تذاكر الطيران: عندما تطلب تذكرة طيران يمكنك أن تحجز في الدرجة الأولى أو درجة رجال الأعمال أو الدرجة السياحية. يمكنك أيضًا أن تختار مكانك إلى جانب نافذة الطائرة أو في الممر أو في الكرسي الأوسط، إلا في حالة عدم وجود كرسي أوسط كما هو الحال في الدرجة الأولى حيث يوجد كرسيان فقط. كم عدد

الطرق المختلفة التي يمكن أن تحجز بها مكانك على متن الطائرة؟  $2 \times 3 + 3 \times 3 = 7 + 9 = 16$

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

\* (٤) رقم التأمين الاجتماعي: كم عدد بطاقات التأمين الاجتماعي التي يمكن تكوينها من تسعة أرقام بدون الصفر؟

$$9 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$$

\* (٥) لوحات الترخيص: كم عدد لوحات الترخيص المكونة من خمسة رموز مكونة من ثلاثة أرقام مختلفة ليس من

بينها الصفر يتبعها حرفين مختلفين؟  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

\* (٦) إلقاء العملة: كم عدد النواتج الممكنة عند رمي قطعة نقد متظمة عشر مرات متتالية؟

$$2^{10} = 1024$$

في التمارين (٧-١٠)، أوجد قيمة كل مما يلي:

$$(٧) 10^0 + 10^1 = 1 + 10 = 11$$

$$(٨) 10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90$$

$$(٩) 10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900$$

$$(١٠) 10^4 - 10^3 = 10000 - 1000 = 9000$$

\* (١١) إلقاء العملة: خلال الاقتراع وذلك بإلقاء عملة معدنية ٢٠ مرة، تم تسجيل ظهور الصورة أو الكتابة في

كل مرة. كم عدد المرات (من جميع مرات الإلقاء) التي يتم فيها الحصول على ٧ صور؟

$$= \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

\* (١٢) ضع  $10^0$  على صورة مضروب، وفسر.

$$\frac{1.100}{1.100} = 1$$

تَمَرْنُ

٥-١٠

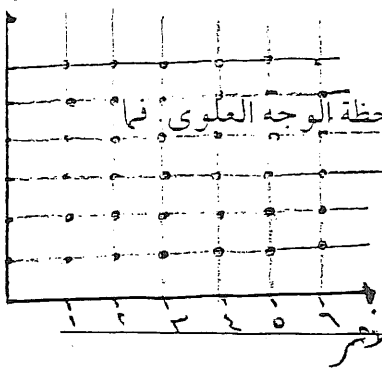
التاريخ الهجري: ..... التاريخ الميلادي:

## الاحتمال المشروط

## Conditional Probability

المجموع على التمارين السابقة

نواحي



في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي، فما  
النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال وقوع كل حدث مما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين ٩.

$$\frac{1}{9} = \frac{4}{36} =$$

(٢) مجموع العددين الظاهرين هو عدد زوجي.

$$\frac{1}{2} = \frac{18}{36} =$$

(٣) العدد الظاهر على الحجر الأحمر أكبر من العدد الظاهر على الحجر الأخضر.

$$\frac{5}{12} = \frac{15}{36} =$$

في التمارين (٤-٩)، ج تتضمن عينة لألوان الحلوى التقليدية التي ينتجها مصنع للحلوى وهي:

ج = {البنّي، الأخضر، البرتقالي، الأحمر، البرونزي، الأصفر}.

احتمال كل حدث في ج يساوي نسبة إنتاج هذا اللون من الحلوى من إجمالي الألوان. وقد صرح المسؤول في هذا

المصنع ببعض المعلومات عن احتمال الإنتاج في الجدول التالي:

اللون	البنّي	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي	البرونزي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,١	٠,١	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًا من علبة مفتوحة حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أن تأخذ حلوى  
بالألوان التالية:

(٤) البنّي أو البرونزي؟  $0.3 + 0.1 = 0.4$

(٥) الأحمر أو الأخضر أو البرتقالي؟  $0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$

(٦) الأحمر؟

(٧) أي لون عدا الأحمر؟  $1 = (٢٩ - ٨) = ٨$

(٨) أي لون عدا البرتقالي أو الأصفر؟  $1 = (١٠ + ٢٩ - ٨) = ٤١$

(٩) أي لون عدا البني أو البرونزي؟  $1 = (٣٠ + ١٠ - ٨) = ٣٢$

في التمارين (١٠-١٣)، ما احتمال أن يحقق رمز عدد عشوائي مكون من رقمين من ١ إلى ٩ الشروط التالية؟

(١٠) رقمان عشوائيان. الأول فردي والثاني من مضاعفات العدد ٤.  $\frac{٢}{٩} = \frac{٤}{٩} + \frac{٥}{٩}$

(١١) رقمان عشوائيان. الأول زوجي والثاني فردي.  $1 = \frac{٥}{٩} + \frac{٤}{٩}$

→ (١٢) رقمان عشوائيان. كلا الرقمين أصغر من ٧.  $\frac{٤٩}{٨١} = \frac{٦}{٩} \times \frac{٨}{٩}$

→ (١٣) رقمان عشوائيان. الرقم الثاني هو الرقم الأول نفسه.

(١٤) تأجير السيارات: لدى شركة لتأجير السيارات ٢٥ سيارة للإيجار، ٢٠ منها من الحجم الكبير و ٥ سيارات

من الحجم المتوسط. إذا تم اختيار سيارتين بشكل عشوائي للإيجار لمدة يوم واحد، فما احتمال أن تكون

السيارتان من الحجم الكبير؟  $P(ف) = \frac{(٢٥)}{(٤)} = \frac{٣}{٢} = \frac{١٩}{٢٠}$   $P(ع) = \frac{(٩)}{(٤)} = \frac{٣}{٢}$   $١٩٠ = (٤) = (٩) = (٢)$

(١٥) اكتب لتعلم: علل لماذا العبارة التالية غير صحيحة: احتمال أن يبيع بائع الحواسيب ١، ٠، ٢ أو ٣ أجهزة

حاسوب في أي يوم من الأيام هو: ١٢، ٤٥، ٠٠، ٣٨، ٠٠، ١٥، ٠٠، بحسب الترتيب.

$12 + 45 + 38 + 15 = 110$  وهذا معروفه لانه مجموع الاحتمالات = ١

(١٦) علبة تحتوي على ٣ كرات حمراء اللون و ٥ كرات بيضاء اللون. سحب سالم كرة، من دون إعادتها إلى العلبة ٣ مرات

ثم سحب كرة ثانية من العلبة. ليكن الحدث أ: «الكرة الأولى حمراء»، الحدث ب: «الكرة الثانية بيضاء».

١. احسب: (أ) ل (ب)  $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

(ب) ل (ب/ب)  $\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

(ج) ل (ب/ب)  $\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$



٢. لنفترض أن السحب الثاني تم بعد إعادة الكرة التي سحبت أولاً.

$$(أ) \text{ احسب: ل(ب)} = \frac{0}{8}$$

$$(ب) \text{ احسب: ل(ب/ب)} = \frac{\frac{0}{8} \times \frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{\cancel{3} \cancel{8} \cancel{8}}{\cancel{3} \cancel{8}} = \frac{1}{8}$$

(١٧) ليكن ل(ب) = ٣، ٠، ٧، ٠، ل(ب ∩ ب) = ٠، ٨، ٠، ٠ احسب:

$$(أ) \text{ ل(ب ∩ ب)} = \text{ل(ب)} + \text{ل(ب)} - \text{ل(ب ∪ ب)} = ٣ + ٣ - ٨ = -٢$$

$$(ب) \text{ ل(ب/ب)} = \frac{\text{ل(ب ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{-٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$$

$$(ج) \text{ ل(ب/ب)} = \frac{\text{ل(ب ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{-٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$$

(١٨) ليكن ب، حدثان مستقلان في فضاء حتمية ف حيث ل(ب) = ٥، ٠، ل(ب) = ٥، ٠.

احسب: ل(ب/ب) =

$$\text{ل(ب ∩ ب)} = \text{ل(ب)} \times \text{ل(ب)} = ٥ \times ٥ = ٢٥$$

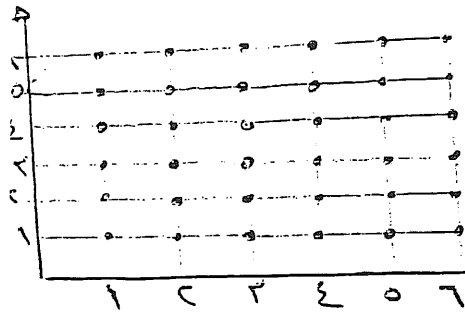
$$\text{ل(ب)} = ٥$$

$$\text{ل(ب/ب)} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

الحدثان ب و ب متباعدان

في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معاً وملاحظة الوجه العلوي لهما. فما النتائج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال ونوع كل حدث في ما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين أصغر من ١٠.



$$= \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ حدث مركب}$$

(٢) العددين الظاهران عدداً فرديان.  $\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$  حدث مركب

(٣) العددين الظاهران عدداً زوجيان.  $\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$  حدث مركب

في التمرين (٤)، حل المسألة التالية:

(٤) رقم التأمين الاجتماعي: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم تأمين اجتماعي مكون من تسعة أرقام مختلفة ليس بينها الصفر؟

(٥) ما احتمال اختيار رقمًا عشوائيًا واحدًا من ١ إلى ٩ يحقق الشرطين التاليين:

$$\text{رقم أولي أو من مضاعفات الرقم ٦} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$$

في التمارين (٦-١١)، ينتج المصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان الموضحة بالجدول. يوضح الجدول التالي احتمال إنتاج الحلوى بحسب لونها:

اللون	البنّي	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًا من كل من علبتين مفتوحتين حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أخذ حلوى بالألوان التالية؟

(٦) كلتاهما بنية اللون.  $0.3 \times 0.3 = 0.09$

(٧) كلتاهما برتقالية اللون.  $0.1 \times 0.1 = 0.01$

\*(٨) واحدة حمراء وواحدة خضراء.  $0.2 \times 0.2 = 0.04$

(٩) الأولى بنية اللون والثانية صفراء.  $0.3 \times 0.2 = 0.06$

(١٠) ولا واحدة صفراء.  $0.8$

(١١) الأولى ليست حمراء والثانية ليست برتقالية.  $0.8 \times 0.9 = 0.72$

في التمارين (١٢-١٧)، أُلقيت ثلاث عملات معدنية من فئة العشرة فلوس تحمل تواريخ من ١٩٩٤ إلى ١٩٩٦. فما احتمال كل حدث مما يلي؟

(١٢) ظهور الصورة على عملة بتاريخ ١٩٩٤ فقط.  $\frac{1}{8}$

(١٣) ظهور الصورة على عملتين بتاريخ ١٩٩٥، ١٩٩٦.  $\frac{3}{8}$

(١٤) ظهور الصورة على الثلاث عملات.  $\frac{1}{8}$

(١٥) ظهور الصورة على عملتين فقط.  $\frac{3}{8}$

(١٦) ظهور الصورة على عملة واحدة على الأقل.  $\frac{7}{8}$

(١٧) ظهور الصورة على عملتين على الأقل.  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(١٨) أسباب الوفاة: قامت الحكومة بتحديد سبب واحد لكل حالة وفاة، فوجدت أن البيانات الناتجة تشير إلى أن ٤٥٪ من حالات الوفاة تسببها الأزمات القلبية ومرض في الأوعية الدموية وأن ٢٢٪ يسببها مرض السرطان.

(أ) ما احتمال أن يكون موت شخص تم اختياره بشكل عشوائي سببه مرض في الأوعية الدموية أو مرض

السرطان؟  $25\% + 22\% = 47\%$

(ب) ما احتمال أن تكون وفاة هذا الشخص نتيجة لأسباب أخرى؟

$33\%$

(١٩) رمى حمد مرتين متتاليتين هرماً منتظماً مرقماً من ١ إلى ٤ ولاحظ رقم الوجه الذي استقر عليه الهرم وبحسب

ناتج جمع الأرقام التي يلاحظها.

(أ) ممّ يتألف الناتج؟ وما هو عدد النواتج الممكنة؟

فأ = { (١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤) }

١٦ = (ف) ن

(ب) احسب احتمال الحدث: «ناتج الجمع يساوي ٦ علماً أن نتيجة الرمية الأولى ٣».

$$= \frac{1}{16}$$

(ج) احسب احتمال الحدث: «ناتج الجمع هو أكبر من ٧ علماً أن نتيجة الرمية الأولى ٢».

صفر

(٢٠) ليكن  $A, B$  حدثان مستقلان في فضاء عينة  $S$  حيث  $P(A) = 0.2, P(B) = 0.7$ .

احسب:

$$(أ) P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.2 \times 0.7 = 0.14$$

$$(ب) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.14}{0.2} = 0.7$$

$$(ج) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.7 - 0.14 = 0.76$$

$$(د) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.14}{0.7} = 0.2$$



## اختبار الوحدة العاشرة

(١) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد الرجال والإناث غير المتزوجين في إحدى الدول.

الفئة (العمر)	الرجال	الإناث
٢٠ -	٤٥٠٠	٣٤٠٠
٣٠ -	٤٨٠	٣٠٠
٤٠ -	٣٧٠	٢٤٠
٥٠ -	٢٩٠	٢٥٠
٦٠ -	١٨٠	٢١٠
٧٠ -	١١٠	٢٢٠
٨٠ -	٣٠	١٤٠

(أ) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات والتكرار المتجمع الصاعد.

الفئة (العمر)	الرجال	الإناث	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد (رجال)	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع الصاعد (إناث)
٢٠ -	٤٥٠٠	٣٤٠٠	أقل من ٣٠	٤٥٠٠	٣ فأكثر	٤٧٦٠
٣٠ -	٤٨٠	٣٠٠	أقل من ٤٠	٤٩٨٠	٣ فأكثر	١٣٦٠
٤٠ -	٣٧٠	٢٤٠	أقل من ٥٠	٥٣٥٠	٤ فأكثر	١١٢٠
٥٠ -	٢٩٠	٢٥٠	أقل من ٦٠	٥٦٤٠	٥ فأكثر	٨٧٠
٦٠ -	١٨٠	٢١٠	أقل من ٧٠	٥٨٢٠	٦ فأكثر	٦٦٠
٧٠ -	١١٠	٢٢٠	أقل من ٨٠	٥٩٣٠	٧ فأكثر	٤٤٠
٨٠ -	٣٠	١٤٠	أقل من ٩٠	٥٩٦٠	٨ فأكثر	٣٠٠

(ب) أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الرجال والإناث. ✓

١٣٧ تاريخ

المتوسط افساي لعدد الرجل رقم ١٣٧

الفئة	نار	نار	نار
١-٢	٥٥	٤٥٠٠	١١٢٥٠٠
٣	٣٥	٤٨٠	١٦٨٠٠
٤	٤٥	٣٧٠	١٦٦٥٠
٥	٥٥	٢٩٠	١٥٩٥٠
٦	٦٥	١٨٠	١١٧٠٠
٧	٧٥	١١٠	٨٢٥٠
٨	٨٥	٤٠	٢٥٥٠
		٥٩٦٠	١٨٤٤٠٠

$$\text{متوسط} = \frac{١٨٤٤٠٠}{٥٩٦٠} \approx ٣٠٩ \text{ سنة}$$

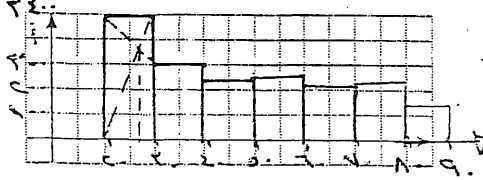
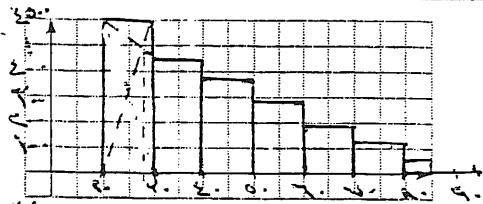
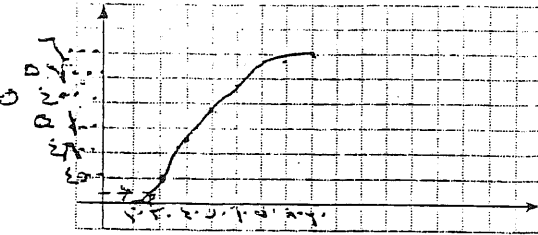
المتوسط افساي لعدد الدفاتر

الفئة	نار	نار	نار
١-٢	٢٥	٣٤٠٠	٨٥٠٠٠
٣	٣٥	٣٠٠	١٠٥٠٠
٤	٤٥	٢٤٠	١٠٨٠٠
٥	٥٥	٢٥٠	١٣٧٥٠
٦	٦٥	٢١٠	١٣٦٥٠
٧	٧٥	٢٢٠	١٦٥٠٠
٨	٨٥	١٤٠	١١٩٠٠
		٤٧٦٠	١٦٢١٠٠

$$\text{متوسط} = \frac{١٦٢١٠٠}{٤٧٦٠}$$

$$= ٣٤,١ \text{ سنة}$$

١٣٧ تاريخ



(ج) أوجد الوسيط لأعمار الرجال والوسيط لأعمار الإناث  
مستخدماً منحنى التكرار المتجمع الصاعد لكل من  
أعمار الرجال والإناث. ثم اشرح ما يمثله كل عدد.

$$\text{الوسيط للرجال} = \frac{5960}{2} = 2980$$

$$\text{ترتيب الوسيط للإناث} = \frac{4760}{2} = 2380$$

(د) أوجد المتوال لأعمار الرجال والمتوال لأعمار الإناث  
باستخدام المدرج التكراري. ماذا تلاحظ؟

السؤال ٢٨ تقريباً رجال

المتوال ٢٨ إناث  
تقارب المتوال في النسبة

(٢) جاءت درجات أحد السنة الماضية في اختبار مادة العلوم حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ١٧، ١٠، ١٥، ١٢، ١٣، ٩، ١٦، ٨، ١٤، ١٦.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

$$13 = \frac{13}{1} = \frac{17 + 10 + 15 + 12 + 13 + 9 + 16 + 8 + 14 + 16}{10}$$

(ب) أوجد الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لهذه الدرجات.

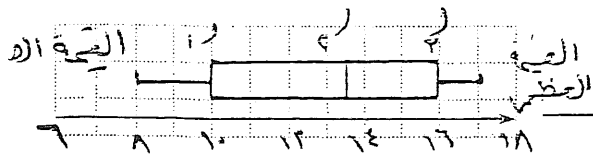
ترتيب التكرار: ١٧، ١٦، ١٦، ١٥، ١٤، ١٣، ١٢، ٩، ١٠، ٨

$$13 = \frac{13}{1} = \frac{17 + 10}{2} = 13.5$$

$$7 = \frac{17 - 10}{2} = 3.5$$

$$\text{مجل الأعداد الخمسة: } (17, 16, 13.5, 10, 8)$$

(ج) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. ماذا تلاحظ؟



المخطط أقرب إلى اليمين

(د) أوجد الانحراف المعياري لهذه الدرجات مع.

(٣) بيّنت دراسة إحصائية على ١٠٠ طالب النتيجة التالية حول جنس الطالب ولون عينيه.

	أسود	عسلي	المجموع
ولد	٣٠	٢٥	٥٥
بنت	٢٧	١٨	٤٥
المجموع	٥٧	٤٣	١٠٠

لدى اختيار طالب عشوائياً (كل الخيارات متساوية الفرص).

نسمي: الحدث و: «الطالب هو ولد»

الحدث أ: «لون عيني الطالب أسود»

الحدث ع: «لون عيني الطالب عسلي»

الحدث ب: «الطالب هو بنت»

(أ) احسب (أ).

$$P(A) = \frac{57}{100} = 0.57$$

(ب) ما احتمال أن يكون الطالب المختار ولداً ولون عينيه أسود (ل و أ)؟

$$P(A \cap L) = \frac{30}{100} = 0.3$$

(ج) ما احتمال أن يكون الطالب المختار ولداً ولون عينيه عسلي (ل و ع)؟

$$P(E \cap L) = \frac{25}{100} = 0.25$$



رقم [۱۵] [۱۶] ۱۳۹

شمار	س-س	(س-س) ۲
۱۷	۴	۱۶
۱	۳	۹
۱۵	۴	۴
۱۴	۱	۱
۱۳	.	.
۹	۴	۱۶
۱۶	۳	۹
۸	۵	۲۵
۱۴	۱	۱
۱۶	۳	۹
		۹.

س = ۱۳

$$۹ = \frac{۹.}{۱.} = ۹$$

$$۳ = \sqrt{۹} = ۳$$

(د) تحقق من أن:  $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$ ، ما احتمال  $L$  (و)؟

$$00 = 9 \quad 00 = 50 + 3.$$

$$00 = \frac{00}{\dots} = (9) \downarrow$$

(هـ) في هذا السؤال، نفترض أن الطالب المختار هو ولد. فما احتمال أن يكون لون عينيه أسود. نسمي هذا الاحتمال  $L(1/2)$ .

~~$$\frac{30}{00} = \frac{30}{00} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{(30/100)}{(100/100)} = \frac{30}{100}$$~~

(و) أوجد علاقة بين  $L(P/W)$ ،  $L(W)$ ،  $L(W \cap P)$ .

$$\frac{(f \cap g) \downarrow}{(f) \downarrow} = (f \mid g) \downarrow$$

(٤) إذا كانت درجات أحد الطلاب في اختبارات مادة الرياضيات على مدار السنة حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ٧، ١٠، ١٢، ٩، ١٤، ١٦، ١٥، ٨، ١٧.

(أ) أوجد المدى، الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه الدرجات.

الترتيب التام: ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧

المعدن - ١٤ - ١٠ = ٤  
 المعدن - ١٢ = ٢  
 المعدن - ١٥,٥ = ١  
 المعدن - ١٥,٥ = ١٠,٥ = ٧  
 المعدن - ١٤ ( ١٥,٥ ( ١٢ ( ١٠,٥ ( ٧ )

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل قيم هذه الدرجات. ماذا تلاحظ؟

القيمة العددية

القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية	القيمة العددية
٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨			

الوسيلة اقرب الى الرباني  
الاعلى

## تمارين إثرائية

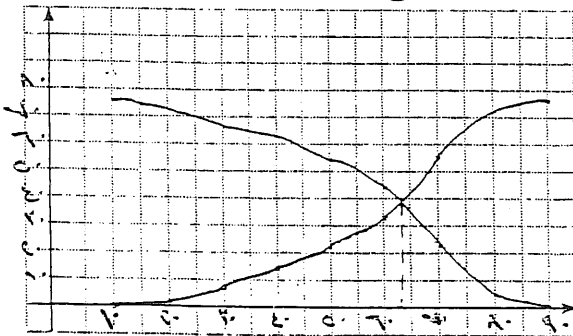
(١) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٧٥ رأساً من قطع المها العربية بالكيلوجرام.

الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠
التكرار	١	٧	٥	٨	١١	٢٢	١٧	٤

(أ) أكمل الجدول بإضافة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

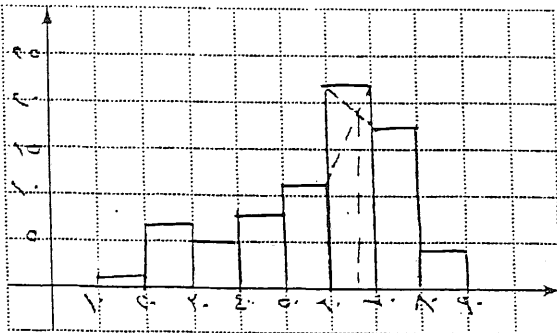
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-١٠	١	أقل من ٢٠	١	١٠ فأكثر	١٥
-٢٠	٧	أقل من ٣٠	٨	٥ فأكثر	١٤
-٣٠	٥	أقل من ٤٠	١٣	٣٠ فأكثر	٦٧
-٤٠	٨	أقل من ٥٠	٢١	٤٠ فأكثر	٦٢
-٥٠	١١	أقل من ٦٠	٣٢	٥٠ فأكثر	٥٤
-٦٠	٢٢	أقل من ٧٠	٥٤	٦٠ فأكثر	٤٣
-٧٠	١٧	أقل من ٨٠	٧١	٧٠ فأكثر	٢١
-٨٠	٤	أقل من ٩٠	٧٥	٨٠ فأكثر	٤

(ب) أوجد الوسيط لقيم هذه الأوزان باستخدام منحني التكرار المتجمع الصاعد و منحني التكرار المتجمع النازل معاً.



الوسيط = ٦٣.٥ تقريباً

(ج) أوجد المتوسط لقيم هذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة وباستخدام المدرج التكراري.



المتوسط = ٦٦

(د) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأوزان.

الحسابات للمنفقة المتوالية = ٦٠

١٧ = ١٧

١١ = ١١

١٠ = ١٠

١١ - ١٠ = ١ (فأ - س)

١١ - ١٠ = ١ (س - ١٠)

١١ - ١٠ = ١ (س - ١٠)

١١ - ١٠ = ١ (س - ١٠)

١٧ = ١٧

١٧ = ١٧

١٧ = ١٧

المنفقة	سار	تار	تار سار
١٠ -	١٥	١	١٥
٢٠ -	٢٥	٢	١٧٥
٣٠ -	٣٥	٣	١٧٥
٤٠ -	٤٥	٤	٢٦٠
٥٠ -	٥٥	٥	٦٠٥
٦٠ -	٦٥	٦	١٤٣
٧٠ -	٧٥	٧	١٢٧٥
٨٠ -	٨٥	٨	٢٤٠
المجموع		٧٥	٤٣٧٥

٤٣٧٥ = ٧٥

٣ = ٥٨ تقريباً



(٢) سجل أحد الأشخاص أسعار الحاسوب بالدينار الكويتي من عدة محلات لبيع هذه الأجهزة كما يلي: ٢٥٠، ٢٤٥، ٢٦٠، ٢٥٥، ٢٤٠، ٢٦٥، ٢٣٥، ٢٧٠، ٢٦٥.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأسعار.

$$\bar{x} = \frac{250 + 245 + 260 + 255 + 240 + 265 + 235 + 270 + 265}{9} = 250$$

(ب) أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه الأسعار.

سار	سار - سار	(سار - سار) <sup>٢</sup>
٢٥٠	٥ -	٢٥
٢٤٥	١٠ -	١٠٠
٢٦٠	٥	٢٥
٢٥٥	٠	-
٢٤٥	١٥ -	٢٢٥
٢٦٥	١٠	١٠٠
٢٦٥	١٠	١٠٠
٢٣٥	٢٠ -	٤٠٠
٢٧٠	١٥	٢٢٥
٢٦٥	١٠	١٠٠
١٣٠٠		

$$\bar{x} = \frac{1300}{10} = 130$$

$$\bar{x} = \sqrt{1300} = 36,1$$

(٣) حلوى محشوة بالفول السوداني: يتج مصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان،

كما يوضح الجدول التالي:

اللون	البنّي	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا أخذت ثلاث قطع من علبة واحدة، فكم عدد الألوان التي يحتمل الحصول عليها؟

(٤) تسلية: في إحدى الألعاب يتم رمي خمسة أحجار نرد متمايزة في وقت واحد وملاحظة الوجه العلوي لها. كم

عدد النواتج التي يمكن تمييزها إذا كان لكل حجر لون مختلف؟

٥

$$6 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

(٥) المعلم والامتحان النهائي: أعطى معلم طلابه ٢٠ سؤالاً للاستذكار على أن يحتوي الامتحان النهائي على

ثمانية أسئلة منها. كم عدد الامتحانات النهائية المختلفة التي يمكن وضعها؟

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{1}{1} = 1$$

(٦) مسح للخريجين: اختارت إحدى الكليات عددًا من دفعة عام ١٩٩٦ المكونة من ٢٥٤ خريجًا من بينهم

١٧٢ سيدة، حيث التحق ١٢٤ سيدة بالدراسات الجامعية و٥٨ رجلًا. فما احتمال كل من الأحداث التالية؟

$$(أ) \text{ أن يكون الخريج سيدة. } = \frac{172}{254} = \frac{86}{127}$$

$$(ب) \text{ أن يلتحق الخريج بالدراسات الجامعية. } = \frac{124}{254} = \frac{62}{127}$$

$$(ج) \text{ أن يكون الخريج سيدة وقد التحقت بالدراسات الجامعية. } = \frac{124}{254} = \frac{62}{127}$$

(٧) تحديد نوع الطفل: افترض أن احتمال أن يكون الطفل المولود حديثًا من نوع معين هو ٥٠٪، في عائلة مكونة

من أربعة أطفال. فما احتمال كل حدث معطى؟

$$(أ) \text{ كل الأطفال إناث. } = \frac{1}{16}$$

٨ (ب) كل الأطفال من نوع مختلف.

$$(ج) \text{ كل الأطفال إما ذكور أو إناث. } = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(٨) عند إشارة المرور التي تتألف من ثلاثة ألوان لاحظنا أن:

٢٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الخضراء.

٦٥٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الصفراء (كما يطلب قانون المرور).

٩٧٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الحمراء.

قررنا مراقبة سلوك سيارة عند إشارة المرور. لنفترض أنه عند وصول السيارة إلى الإشارة، لون الإشارة

عشوائي وأن احتمال أن يكون اللون هو الأخضر ٦، ٠، احتمال أن يكون اللون هو الأصفر ١، ٠، احتمال

أن يكون اللون هو الأحمر ٣، ٠.

(أ) ما احتمال أن تكون السيارة المراقبة قد توقفت؟

$$= \frac{2}{100} = 0.02$$

(ب) تجاوزت السيارة الإشارة. فما احتمال أن تكون قد تجاوزت الإشارة عندما كان لونها أحمرًا.

$$= 1 - 3 = 7$$

(٩) نشاط تدريبي صيفي يعرض نشاطًا لغويًا ورياضيًا. الجدول يعطي توزيعًا لـ ١٥٠ متدربًا بحسب اللغة والرياضة التي تم اختيارها:

	كرة سلة	كرة قدم	ركوب الخيل	المجموع
إنكليزي	٤٥	١٨	٢٧	٩٠
فرنسي	٣٣	٩	١٨	٦٠
المجموع	٧٨	٢٧	٤٥	١٥٠

تم اختيار متدرب عشوائيًا.

(أ) ما احتمال الحدث أ: «المتدرب يمارس كرة السلة أو يدرس الفرنسية»

$$P(A) = \frac{45}{150} + \frac{33}{150} - \frac{60}{150} = \frac{18}{150}$$

(ب) ما احتمال الحدث ب: «المتدرب يمارس ركوب الخيل ويدرس اللغة الفرنسية»؟

$$P(B) = \frac{18}{150}$$

(ج) ما احتمال الحدث ج: «يدرس اللغة الإنكليزية علمًا أنه يمارس كرة السلة»؟

$$P(C) = \frac{25}{150}$$

(د) ما احتمال الحدث د: «يبارس كرة القدم علمًا أنه يدرس اللغة الفرنسية»؟

$$P(D) = \frac{9}{10} = 0.9$$

(هـ) هل الحدثان ر: «يبارس ركوب الخيل»، ن: «يدرس اللغة الإنكليزية» هما حدثان مستقلان؟

$$P(R) = \frac{45}{100} \quad P(N) = \frac{90}{100} \quad P(R \cap N) = \frac{45}{100}$$

$$P(R) \times P(N) = \frac{45}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{405}{1000} \neq \frac{45}{100}$$

(١٠) أرقام الهاتف: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم هاتف مكون من سبعة أرقام دون تكرار أي

$$\text{منها؟} \quad \frac{10!}{10^7}$$

(١١) ما احتمال اختيار رقم واحد عشوائي من ١ إلى ٩ يحقق الشروط التالية: عدد فردي أو من مضاعفات

$$\text{العدد ٤؟} \quad \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

(١٢) في فصل الشتاء، أصابت موجة زكام ربع المواطنين. ثلث المواطنين تلقوا اللقاحًا ضد الزكام، ولسبب عدم فاعلية اللقاح ١٠٪ نفترض أن مريضًا مصابًا بالزكام من ١٠ قد تلقى لقاحًا.

ما احتمال أن يكون مواطنًا من بين الذين تلقوا اللقاح ما زال مصابًا بالزكام؟

$$P(R) = \frac{1}{4} \quad P(N) = \frac{1}{3}$$

$$P(R \cap N) = \frac{1}{12}$$

$$P(R \cap N^c) = \frac{1}{6}$$

$$P(R \cap N^c) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1/6}{1/6 + 1/12} = \frac{2}{3}$$