الوحدة العاشرة — الإحصاء والاحتمال

تحليل البيانات (١-١٠)

مقاييس النزعة المركزية

المتوسط الحسابي

(١) المتوسط الحسابي لـ ن من الأعداد س١، س٢، س٣، ...، سن هو

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + س_3 + \dots + س_ن}{ن} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

(٢) المتوسط الحسابي من جدول تكراري ذو فئات

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ك_ر س_ر)}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

حيث $ك_ر$ تكرار الفئة ر، $س_ر$ مركز الفئة ر، ن عدد الفئات

حاول أن تحل ص ١٧٢

١ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٧٠ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الفئة	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣

الحل

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$ك_ر \times س_ر$
٢٠-	٢٥	٤	١٠٠
٣٠-	٣٥	٨	٢٨٠
٤٠-	٤٥	١٤	٦٣٠
٥٠-	٥٥	١٥	٨٢٥
٦٠-	٦٥	١٣	٨٤٥
٧٠-	٧٥	٩	٦٧٥
٨٠-	٨٥	٤	٣٤٠
٩٠-	٩٥	٣	٢٨٥
		٧٠	٣٩٨٠

$$\bar{س} = \frac{٣٩٨٠}{٧٠} = ٥٦,٨٥$$

يمكن تبسيط الحسابات وإيجاد قيمة تقريبية أيضًا للمتوسط الحسابي.

نأخذ وسطًا فرضيًّا ف (من المستحسن أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار للبيانات)، نطبق القانون التالي:

قانون: (الطريقة المختصرة)

$$\bar{س} = ف + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر ح_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$

حيث $ح_ر = س_ر - ف$ تسمى انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي ف.

حاول أن تحل ص ١٧٣

من الجدول في المثال (٢)، أوجد المتوسط الحسابي باستخدام الطريقة المباشرة ثم قارن النتيجتين.

الحل

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$ك_ر \times س_ر$
١٩٥-	١٩٧,٥	٥	٩٨٧,٥
٢٠٠-	٢٠٢,٥	٣	٦٠٧,٥
٢٠٥-	٢٠٧,٥	٤	٨٣٠
٢١٠-	٢١٢,٥	٩	١٩١٢,٥
٢١٥-	٢١٧,٥	٦	١٣٠٥
٢٢٠-	٢٢٢,٥	٣	٦٦٧,٥
		٣٠	٦٣١٠

$$\bar{س} = \frac{٦٣١٠}{٣٠} \simeq ٢١٠,٣٣$$

ونلاحظ أن النتيجتين متساويتين سواء بالطريقة المباشرة

أو بالطريقة المختصرة

الوسيط

الوسيط لعدد ن من القيم المرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا هو:

أ العدد الذي يتوسط القيم إذا كان العدد ن فرديًّا.

ب المتوسط الحسابي للعددين في منتصف القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

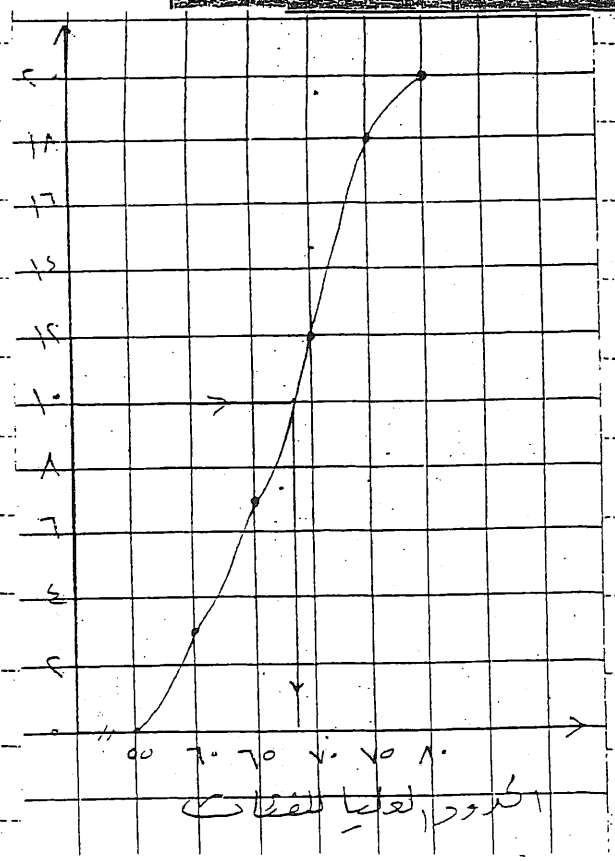
أي أن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ من الأعداد إذا كان العدد ن فرديًّا ومتوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ من الأعداد إذا كان العدد ن زوجيًّا.

يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد وللتكرار المتجمع النازل أو لكليهما.

حاول أن تحل ص ١٧٥

٣ أكمل جدول البيانات التالي لإيجاد الوسيط لأوزان ٢٠ طالبًا بالكيلوجرام باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٥ -	٣		
٦٠ -	٤		٧
٦٥ -	٥		
٧٠ -	٦		
٧٥ -	٢		



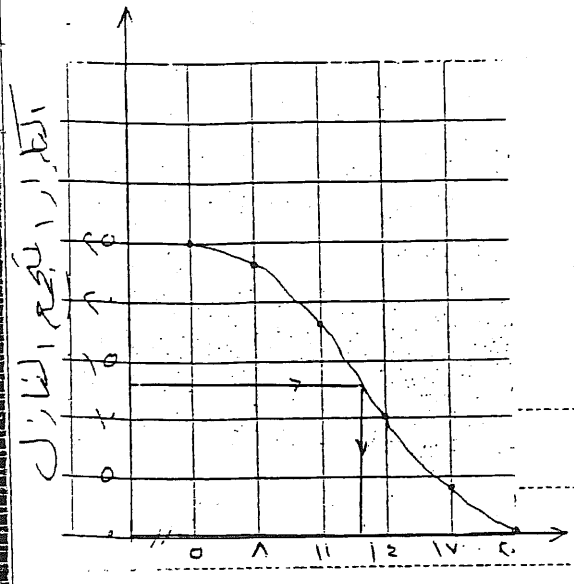
ترتيب الوسيط = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠

الوسيط ≈ ٦٨,٥

حاول أن تحل ص ١٧٧

٤ أكمل الجدول التالي لإيجاد الوسيط لدرجات ٢٥ طالبًا باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع النازل

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥-	٣		
٨-	٥		
١١-	٨		
١٤-	٦		
١٧-	٤		



ترتيب الوسيط = $\frac{٢٥}{٢}$ = ١٢,٥

الوسيط = ١٣

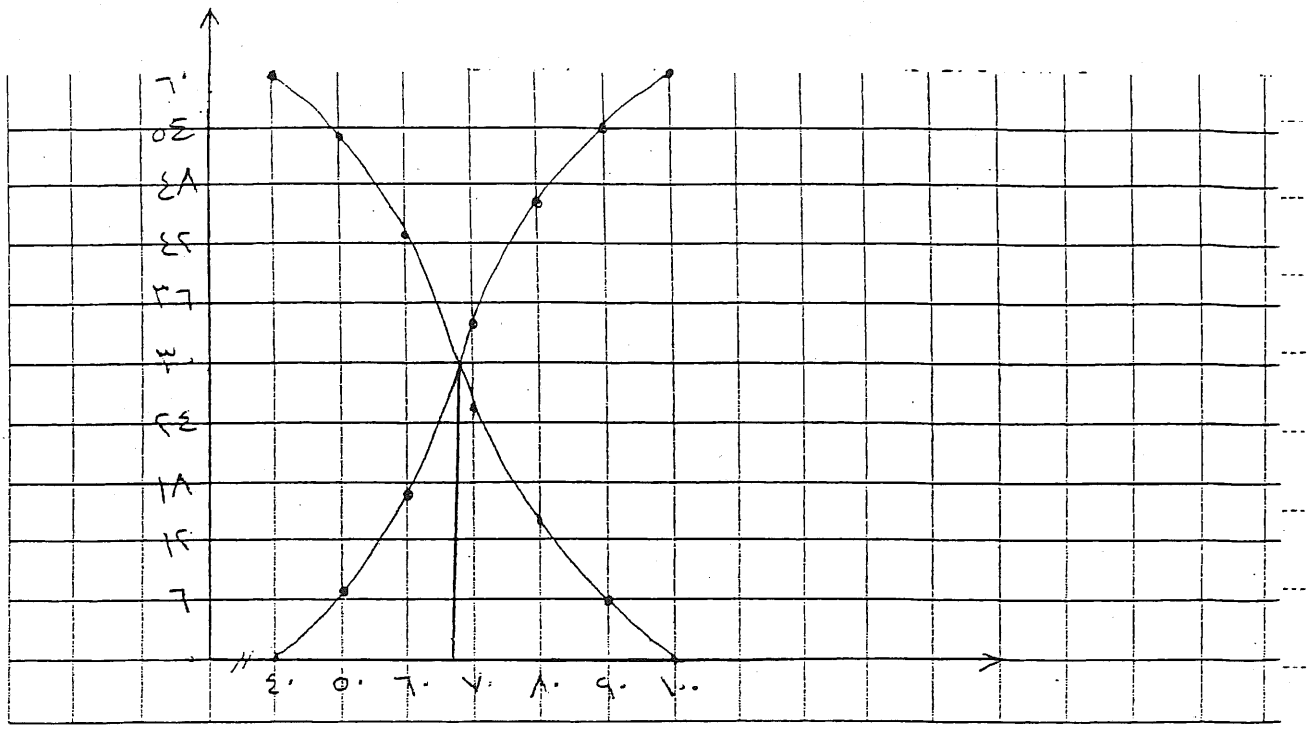
حاول أن تحل ١٧٨

٥ أكمل الجدول التالي لدرجات ٦٠ طالبًا في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٧	١٠	١٧	١٢	٨	٦

الحل

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٤٠-	٧	أقل من ٥٠	٧	٤٠ فأكثر	٦٠
٥٠-	١٠	" " ٦٠	١٧	" ٥٠	٥٣
٦٠-	١٧	" " ٧٠	٣٤	" ٦٠	٤٣
٧٠-	١٢	" " ٨٠	٤٦	" ٧٠	٢٦
٨٠-	٨	" " ٩٠	٥٤	" ٨٠	١٤
٩٠-	٦	" " ١٠٠	٦٠	" ٩٠	٦



الوسيط = ٦٨

المنوال هو الأكثر تكراراً في البيانات.

حاول أن تحل ص ١٧٩

٦ أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٧، ٥، ١٢، ٦، ٧، ١٤

ب ١٥، ٨، ٩، ١٢، ١٥، ٨، ٧، ١٠

جـ ١، ١، ١، ١، ١

د ٣، ٨، ٣، ٨، ٨، ٣، ٤، ٤

ملاحظة:
إذا لم يوجد تكرار في البيانات فلا يوجد منوال لها.
ويمكن أن يوجد أكثر من منوال لمجموعة القيم.

الحل

أ لا يوجد منوال

ب يوجد منوالان لها ١٥، ٨

جـ المنوال = ١

د يوجد منوالان لها ٣، ٨

إيجاد المنوال للتوزيع التكراري باستخدام قانون الرافعة:

نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

نحدد التكرار للفئتين السابقة مباشرة واللاحقة مباشرة للفئة المنوالية على الترتيب $ك_1$ ، $ك_2$.

المنوال يقسم الفئة المنوالية كما في الشكل بحيث إن:

$ك_1 \times س = ك_2 \times (ف - س)$

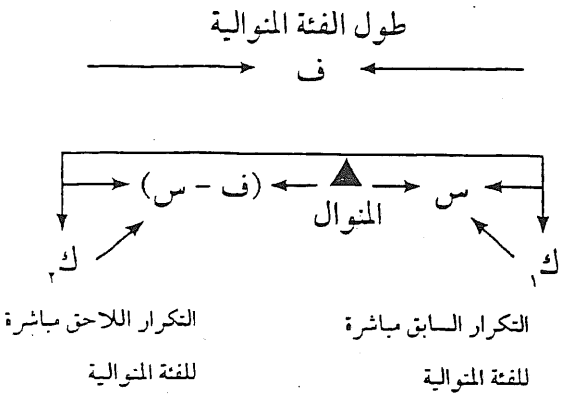
ف = طول الفئة المنوالية

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

هذا ما يعرف «بطريقة الرافعة» لحساب المنوال.

ويمكن وضع صيغة رياضية لقانون الرافعة على الشكل التالي:

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{ك_2}{ك_1 + ك_2} \times ف$



حاول أن تحل ص ١٨١

٧ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٢٠ شخصًا.

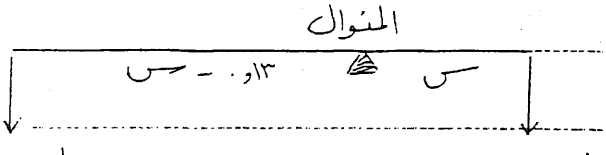
أوجد المنوال لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص.

الفئة	٤٠ - ٥٠	٥٠ - ٦٠	٦٠ - ٧٠	٧٠ - ٨٠	٨٠ - ٩٠	٩٠ - ١٠٠
التكرار	٢	٣	٤	٧	٤	٢

الحل

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٠٫٤٣

ف طول الفئة المنوالية = ٠٫١٣



$ك_1 = ٤$

$ك_2 = ٤$

$ك_1 \times س = ك_2 (ف - س)$

$٤ \times س = ٤ (٠٫١٣ - س)$

$س = ٠٫١٣ - س$

$٢س = ٠٫١٣$

$س = ٠٫٠٦٥$

المنوال = ٠٫٤٣ + ٠٫٠٦٥

= ٠٫٤٩٥

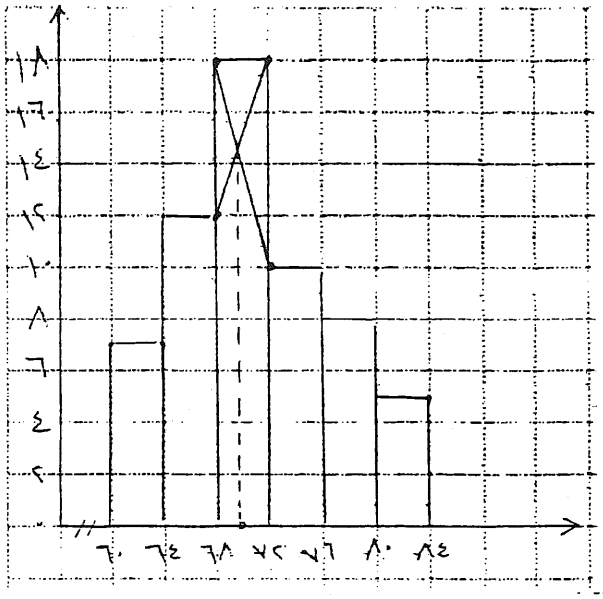
يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمنوال بيانيًّا باستخدام المدرج التكراري ثم تحديد فئة المنوال والفئة السابقة مباشرة والفئة اللاحقة مباشرة.

حاول أن تحل ص ١٨٢

٨ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٦٠ طالبًا ثانويًّا بالكيلوجرام. استخدم المدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال أوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٦٠	٦٤	٦٨	٧٢	٧٦	٨٠
التكرار	٧	١٢	١٨	٢	٨	٥

الحل



المنوال ≈ ٦٩,٥

(١٠-٢) الأرباعيات

المدى = القيمة العظمى - القيمة الصغرى

حاول أن تحل ص ١٨٤

١ أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ٥٧، ٥٣، ٤٠، ٤٥، ٤٨، ٥٩

ب ١٢٥، ١٧٦، ١٢٨، ١٣٠، ١٣٢، ١٢٤

الحل

أ المدى = ٥٩ - ٤٠ = ١٩

ب المدى = ١٧٦ - ١٢٤ = ٥٢

الأرباعيات Quartiles

يقسم الوسيط قيم البيانات إلى نصفين وتقسم الأرباعيات قيم البيانات إلى ٤ أرباع ومنها نستنتج:

أ الأرباعي الأول $ر_1$ وهو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويسمى الأرباعي الأدنى.

ب الأرباعي الثاني $ر_2$ وهو وسيط قيم البيانات ويسمى الوسيط.

جـ الأرباعي الثالث $ر_3$ وهو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويسمى الأرباعي الأعلى.

د المدى الأرباعي = $ر_3 - ر_1$.

تسمى (القيمة الصغرى، الأرباعي الأدنى، الوسيط، الأرباعي الأعلى، القيمة العظمى) "مجمل الأعداد الخمسة".

حاول أن تحل ص ١٨٥

٢ يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي لكرة القدم ٢٠١٠- ٢٠١١.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	كاظمة	الجهراء	النصر	السالمية	الشباب
النقاط	٥١	٤٧	٣٩	٣٨	١٩	١٦	١٤	١٢

أ أوجد الوسيط والمدى والأرباعيات والمدى الأرباعي لقيم هذه البيانات.

ب اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

الترتيب التصاعدي: ١٢، ١٤، ١٦، ١٩، ٣٨، ٣٩، ٤٧، ٥١

أ المدى = ٥١ - ١٢ = ٣٩

الوسيط = $\frac{١٩ + ٣٨}{٢}$ = ٢٨,٥

$ر_1 = \frac{١٤ + ١٦}{٢} = ١٥$ ، $ر_3 = \frac{٣٩ + ٤٧}{٢} = ٤٣$

المدى الأرباعي = $ر_3 - ر_1 = ٤٣ - ١٥ = ٢٨$

(ب) مجمل الأعداد الخمسة:

(١٢ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٥١)

مخطط الصندوق Box Plot

هو تمثيل بياني يصف مجمل الأعداد الخمسة لقيم البيانات وهو يتكون من مستطيل مركزي (الصندوق) يمثل الأرباعي الأدنى $ر_1$ والوسيط $ر_2$ والأرباعي الأعلى $ر_3$ وقطعتين مستقيمتين من الجهتين تمثلان القيمة الصغرى والقيمة العظمى ونسميهما العارضتين.

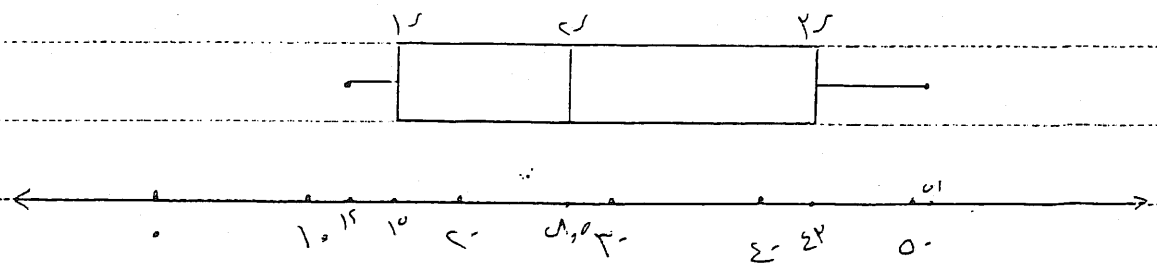
حاول أن تحل ص ١٨٦

٣ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين للبيانات الموجودة في فقرة "حاول أن تحل (٢)". فسّر النتائج.

الحل: مجمل الأعداد الخمسة:

(١٢ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٥١)

مخطط الصندوق



نلاحظ أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى

كما أن المخطط يبين عدم وجود قيم متطرفة

حاول أن تحل ص ١٨٨

٤ ارسم مخططين لصندوقين لقيم البيانات التالية وفسّر النتائج:

أ ٧، ٨، ٤، ٥، ٩، ١٠، ٦

ب ١٢، ١٠، ١٥، ١٦، ٢٠، ١٧، ١٨، ٣٨

الحل

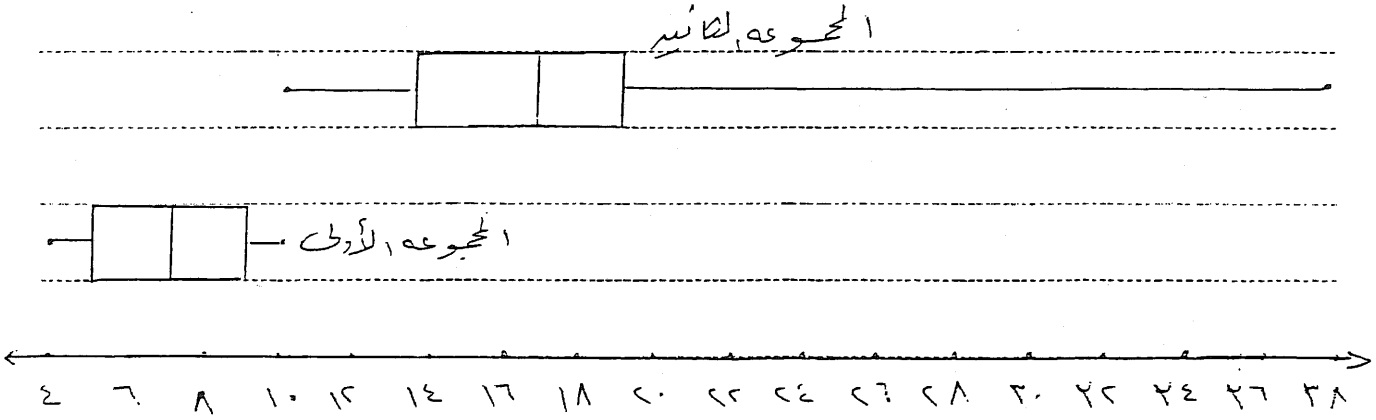
أ الترتيب التصاعدي ٤، ٥، ٦، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

الوسيط = ٧ ، $ر_١$ = ٥ ، $ر_٣$ = ٩

ب الترتيب التصاعدي ١٠، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ٢٠، ٣٨

الوسيط = $\frac{١٦ + ١٧}{٢}$ = ١٦,٥

$ر_١$ = $\frac{١٢ + ١٥}{٢}$ = ١٣,٥ ، $ر_٣$ = $\frac{١٨ + ٢٠}{٢}$ = ١٩



نلاحظ ان الصندوق الأول يوجد به كمائل اى ان الوسيط يقع فى منتصف الصندوق

اما فى الصندوق الثانى فنلاحظ وجود قيمة تتطرف وهى ٣٨

(١٠-٣) الانحراف المعياري

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت س١، س٢، س٣، ... ، سن مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\bar{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري = $ع = \sqrt{ع^2}$

حاول أن تحل ص ١٩١

١ أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

الحل

$\bar{س} = \frac{٩+٧+٨+٦+٤+٢}{٦} = ٦$

الصف س ر	س ر - $\bar{س}$	(س ر - $\bar{س}$)^2
٩	٣	٩
٧	١	١
٨	٢	٤
٦	٠	٠
٤	-٢	٤
٢	-٤	١٦
٣٦		٣٤

التباين $ع^2 = \frac{٣٤}{٦}$

$ع^2 = ٥٫٦٦$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٥٫٦٦}$

$ع \simeq ٢٫٣٨$

من المتعارف عليه عند الإحصائيين أنه كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا كلما كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي، وكلما كان كبيرًا كان تشتت قيم البيانات بعيدًا عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل ص ١٩٣

٢ لتكن (أ)، (ب) مجموعتين من البيانات

(أ): ١٢، ١٠، ٧، ١٥، ٨، ١٩، ٢٠

(ب): ١٤، ١٨، ١٢، ٩، ٨، ١١، ١٩

(أ) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لقيم (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ لقيم (ب). ماذا تلاحظ؟

(ب) أوجد وسيط قيم المجموعة (أ)، ثم وسيط قيم المجموعة (ب). ماذا تلاحظ؟

(جـ) أوجد الانحراف المعياري $ع_1$ لقيم المجموعة (أ) والانحراف المعياري $ع_2$ لقيم المجموعة (ب). أي القيم أقل تشتتًا عن متوسطها الحسابي؟ اشرح إجابتك.

الحل

(أ) ٢٠، ١٩، ٨، ١٥، ٧، ١٠، ١٢

$\overline{س} = \frac{١٢ + ١٠ + ٧ + ١٥ + ٨ + ١٩ + ٢٠}{٧} = \frac{٩١}{٧} = ١٣$

الترتيب التصاعدي ٧، ٨، ١٠، (١٢)، ١٥، ١٩، ٢٠

الوسيط = ١٢

(ب) ١٩، ١١، ٨، ٩، ١٢، ١٨، ١٤

$\overline{ص} = \frac{١٤ + ١٨ + ١٢ + ٩ + ٨ + ١١ + ١٩}{٧} = \frac{٩١}{٧} = ١٣$

الترتيب التصاعدي ٨، ٩، ١١، (١٢)، ١٨، ١٤، ١٩

الوسيط = ١٢

القيمة س ر	س ر − $\overline{س}$	(س ر − $\overline{س}$)^2
١٢	−١	١
١٠	−٣	٩
٧	−٦	٣٦
١٥	٢	٤
٨	−٥	٢٥
١٩	٦	٣٦
٢٠	٧	٤٩
		١٦٠

$ع_1^2 = \frac{١٦٠}{٧} = ٢٢٫٨٥$

$ع_1 = \sqrt{٢٢٫٨٥} = ٤٫٧٨$

القيمة ص ر	ص ر − $\overline{ص}$	(ص ر − $\overline{ص}$)^2
١٤	١	١
١٨	٥	٢٥
١٢	−١	١
٩	−٤	١٦
٨	−٥	٢٥
١١	−٢	٤
١٩	٦	٣٦
		١٠٨

$ع_2^2 = \frac{١٠٨}{٧} = ١٥٫٤٣$

$ع_2 = \sqrt{١٥٫٤٣} = ٣٫٩٢$

نلاحظ أن س̄ = ص̄ = الوسيط = الوسط

ع١ < ع٢

وبذلك يكون الانحراف المعياري لقيم المجموعة (أ) أكبر من الانحراف المعياري لقيم المجموعة ب

وتكون قيم المجموعة (ب) أقل تشتتاً عن متوسطها الحسابي من قيم المجموعة أ

حاول أن تحل ص ١٩٤

٣ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
التكرار	٥	١٨	[illegible]	[illegible]	٨
مركز الفئة	٦٢	٦٦	٧٠	٧٤	٧٨

أوجد المتوسط الحسابي س̄ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

الحل

$$\bar{س} = \frac{(٥ \times ٦٢) + (١٨ \times ٦٦) + (٢٤ \times ٧٠) + (٢٧ \times ٧٤) + (٨ \times ٧٨)}{٥ + ١٨ + ٢٤ + ٢٧ + ٨} = ٧٠٫٦$$

$$\text{التباين } ع^٢ = \frac{٥(٦٢ - ٧٠٫٦)^٢ + ١٨(٦٦ - ٧٠٫٦)^٢ + ٢٤(٧٠ - ٧٠٫٦)^٢ + ٢٧ \times (٧٤ - ٧٠٫٦)^٢ + ٨ \times (٧٨ - ٧٠٫٦)^٢}{٥ + ١٨ + ٢٤ + ٢٧ + ٨}$$

$$= \frac{١٥١٦}{١٠٠} = ١٥٫١٦ \quad \therefore \text{الانحراف المعياري } ع = ٣٫٨٩$$

حاول أن تحل ص ١٩٥

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠. فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل

$$(٤)^٢ = \frac{٤٨٠}{ن} \quad \therefore ن = \frac{٤٨٠}{١٦} = ٣٠$$

(١٠ - ٤) طرق العد

جاول أن تحل ص١٩٦

١ ما عدد الرموز التي يمكن تكوينها من حروف " نواف " من دون تكرار لأي حرف منها شرط ألّا يبدأ الرمز بـ " أ "؟

الحل عدد الرموز = ٣ × ٣ × ٢ × ١ = ١٨

جاول أن تحل ص١٩٧

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

الحل

- سلطة
  - دجاج
    - حلويات
    - فاكهة
  - سمك
    - حلويات
    - فاكهة
  - لحمة
    - حلويات
    - فاكهة
- حساء
  - دجاج
    - حلويات
    - فاكهة
  - سمك
    - حلويات
    - فاكهة
  - لحمة
    - حلويات
    - فاكهة

عدد الوجبات = ١٢ وجبة ممكنة

مبدأ العد

حاول أن تحل ص ١٩٨

٣ استخدم معطيات المثال (٣)، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فردي؟

الحل عدد طرق رقم اللوحة = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ٩ × ٨

= ٢٧٤١٦٠ طريقة

تذكر:

مضروب ن أو ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

حاول أن تحل

٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل). ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

الحل عدد النتائج الممكنة = ٢٠ × ١٩ × ... × ٣ × ٢ × ١ = ٢٠!

التعليل

حاول أن تحل ص ١٩٩

٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل عدد الطرق = ٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠

$ن ل_ر = ن(ن-١)(ن-٢) ... (ن-ر+١)$ ، ن، ر ∈ ح+ ، ر ≤ ن

$ن ل_ر = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ ، $ن ل_٠ = ١$

حاول أن تحل ص ٢٠١

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٥}ل_{٣}$ ب $^{١٠}ل_{٤}$ ج $^{ن}ل_{٤}$

الحل

أ $^{٥}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

ب $^{١٠}ل_{٤} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤٠$

ج $^{ن}ل_{٤} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$

حاول أن تحل ص ٢٠١

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

الحل عدد الأعداد $= {}^{٩}ل_{٤} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٠٢٤$

التوافيق

$$\binom{ن}{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$$

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

حاول أن تحل ص ٢٠٢

٨ ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

الحل عدد اللجان $= \binom{٤}{٢} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{٢!} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$

حاول أن تحل ص ٢٠٣

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

الحل عدد الفرق $= \binom{٢٠}{١١} = \frac{^{٢٠}ل_{١١}}{١١!} = ١٦٧٩٦٠$

حاول أن تحل ص ٢٠٤

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

الحل $_{٦٠}ق_{١٥} = \frac{٦٠!}{١٥!\ ٤٥!} = ٥٣١٩٤٨٩١٩$

حاول أن تحل ص ٢٠٤

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

أ التركيب غير مهم توفيق

ب الترتيب مهم تبديل

(١٠ - ٥)

الاحتمال المشروط

التجربة العشوائية، فضاء العينة، احتمال الحدث

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف). كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$ل(\text{الحدث أ}) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠، ١].

معلومة مفيدة:
فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ $٠ \le ل(أ) \le ١$

٢ إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ حدثًا مستحيلًا.

٣ إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ حدثًا مؤكدًا.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

حاول أن تحل ص٢٠٦

١ في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

الحل: ب = {(١، ٦)، (٢، ٥)، (٣، ٤)، (٤، ٣)، (٥، ٢)، (٦، ١)}

$ل(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

جـ = ∅ ، ل(جـ) = صفر

د = {(١، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)}

$ل(د) = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$

حاول أن تحل ص ٢٠٧

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

الحل ب = ف

ل(ب) = $\frac{٣٦}{٣٦}$ = ١

مثال (٣) ص ٢٠٧

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًّا فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل:

التجربة: اختيار قطعتي حلوى من بين ١٢ قطعة دون اعتماد الترتيب.

∴ عدد نواتج التجربة ن (ف) = $\binom{١٢}{٢}$ = $\frac{ل^{١٢}_{٢}}{٢!}$ = $\frac{١٢ \times ١١}{٢ \times ١}$ = ٦٦ ناتجًا.

الحدث أ: اختيار قطعتين بالشوكولاتة، دون اعتماد الترتيب

∴ عدد نواتج الحدث أ = ن (أ) = $\binom{٤}{٢}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦ نواتج.

∴ ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٦}{٦٦}$ = $\frac{١}{١١}$.

حاول أن تحل ص ٢٠٧

٣ في المثال (٣)، ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيًّا ليستا بالشوكولاتة؟

الحل نفرض أن حدث اختيار قطعتي حلوى عشوائيا ليستا بالشوكولاتة هو ب

ن(ف) = $\binom{٨}{٢}$ = $\frac{٨ \times ٧}{٢ \times ١}$ = ٢٨

ل(ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)}$ = $\frac{٢٨}{٦٦}$ = $\frac{١٤}{٣٣}$

مخطط ف

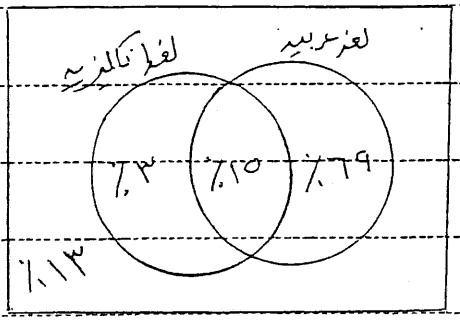
حاول أن تحل ص ٢٠٨

٤ يقرأ ٨٤٪ من طلاب الصف العاشر كتب مطالعة باللغة العربية، ويقرأ ١٨٪ من طلاب هذا الصف كتبًا باللغة الإنكليزية، ويقرأ ١٥٪ من الطلاب كتبًا باللغتين. اختير طالب عشوائيًا من طلاب هذا الفصل،

أ ما احتمال أن يكون ممن يقرأون كتبًا باللغة الإنكليزية فقط؟

ب ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا؟

الحل



أ احتمال أن يكون الطالب ممن يقرأون كتبا باللغة الانكليزية فقط = ٣٪ أو ٠,٠٣

ب احتمال أن يكون الطالب ممن لا يقرأون كتبا باللغتين معاً = ١ - ١٥,٠ = ٨٥,٠

العمليات على الأحداث واحتمالاتها

تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ، ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

الحدثان أ، ب هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅.

متمم الحدث أ هو $\bar{أ}$ (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

حاول أن تحل ص ٢٠٩

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٣، ل(ب) = ٠,٥، ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ ∩ ب)

ب ل($\overline{ب}$)

الحل

أ) ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

= ٠,٣ + ٠,٥ − ٠,٦

ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

ب) ل($\overline{ب}$) = ١ − ل(ب)

= ١ − ٠,٥

ل($\overline{ب}$) = ٠,٥

حاول أن تحل ص ٢١٠

٦ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥، ل(ب) = ٠,٦، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ أوجد احتمال عدم وقوع الحدث أ أو الحدث ب.

الحل ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٢

= ٠,٩

احتمال عدم وقوع الحدث أ أو الحدث ب = ل($\overline{أ ∪ ب}$)

= ١ − ل(أ ∪ ب)

= ١ − ٠,٩ = ٠,١

حاول أن تحل ص ٢١١

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤، ل(ب) = ٠,٥.

أ احسب ل(أ ∪ ب) ⇐ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) = ٠,٤ + ٠,٥ = ٠,٩

ب احسب ل($\overline{أ ∪ ب}$) ⇐ ل($\overline{أ ∪ ب}$) = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ٠,٩ = ٠,١

الأحداث المستقلة Independant Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان حدوث أحدهما ليس له أي تأثير على حدوث الآخر.

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

حاول أن تحل ص ٢١٢

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

الحل ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}

ن(ف) = ٨

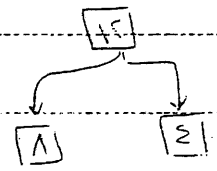
أ = {(ص، ك، ص)} ن(أ) = ١

ل(أ) = ن(أ) / ن(ف) = ١/٨

الحدث التابع Dependant Event

يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

حاول أن تحل ص ٢١٣



٩ تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاتة والباقي بنكهة الحليب.

فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

الحل ليكن الحدث أ "أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة أولاً"

، ب "أخذ قطعة بنكهة الحليب ثانياً"

ل(أ) = ٤/١٢ = ١/٣

وبعد إعادة القطعة الأولى يصبح لدينا في الكيس ١١ كرة فقط منها ٨ بالحليب

ل(ب) = ٨/١١

∴ الاحتمال المطلوب = ل(أ) × ل(ب)

= ١/٣ × ٨/١١ = ٨/٣٣

الاحتمال المشروط

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويُكتب ل(ب/ أ) ويُقرأ احتمال الحدث ب بشرط أ. ويمكن إيجاد ل(ب/ أ) باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

$$ل(ب/أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} \quad \text{حيث } ل(أ) \neq ٠$$

وكذلك ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب/ أ)

حاول أن تحل ص ٢١٥

١ في تجربة عشوائية، إذا كان ل(أ) = ٠,٣، ل(ب / أ) = ٠,٢. أوجد ل(أ ∩ ب).

الحل

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب/أ)

= ٠,٣ × ٠,٢ = ٠,٠٦

حاول أن تحل ص ٢١٥

٢ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب "الحصول على عدد زوجي"، والحدث أ" الحصول على عدد أولي". فاحسب ل(ب/ أ).

الحل

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ن(ف) = ٦

ب = {٢، ٤، ٦} ن(ب) = ٣

أ = {٢، ٣، ٥} ن(أ) = ٣

أ ∩ ب = {٢} ن(أ ∩ ب) = ١

ل(أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

∴ ل(ب/أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$

= $\frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٣}$

ملاحظة: في أي تجربة عشوائية إذا كانت الأحداث متساوية الفرص فإن:

$$ل(ب / أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{ن(ب \cap أ)}{ن(أ)}$$

حاول أن تحل ص ١٦ ٢

٢١ سئل طلاب الصف العاشر حول تفضيلهم لإحدى المواد الثلاث:

الرياضيات أو الفيزياء أو الأحياء

يبيّن الجدول التالي توزيع الإجابات.

	الرياضيات	الفيزياء	الأحياء	المجموع
الصف العاشر ١	١٢	١٦	١٢	٤٠
الصف العاشر ٢	١٦	١٤	٢٠	٥٠
المجموع	٢٨	٣٠	٣٢	٩٠

اختير طالب عشوائيًا من طلاب الصف العاشر. ما احتمال أن يفضل الرياضيات إذا علمنا أنه في الصف العاشر ١؟

الحل: ليكن الحدث أ (الطالب في الصف العاشر ١)

ليكن الحدث ب (الطالب يفضل الرياضيات)

$$ل(ب / أ) = \frac{ن(أ \cap ب)}{ن(أ)} = \frac{١٢}{٥٠} = ٠,٢٤$$