التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرّنْ
٧-١

تنظيم البيانات في مصفوفات

Organising Data in Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١ – ٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

(١) $[\,٢ \quad \sqrt{٥}\,]$

١ × ٢

(٢) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٧ \end{bmatrix}$

٣ × ٣

حدّد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، $[\,\sqrt{١٦} \quad -٦ \quad \sqrt{٦٤}\,]$

لا لأن الرتب مختلفة

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر $أ_{٣٢}$.

(٤) $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

٣ × ٣ $أ_{٣٢}$ = −٧

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقّق ما يلي: [٢س س – ص] = [أ ب]؟

(أ) س = ٢أ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب

(ب) س = $\frac{١}{٢}$أ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

~~(جـ)~~ س = $\frac{١}{٢}$أ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب

(د) س = ٢أ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

في التمرينين (٦ – ٧)، أوجد قيم كل من س، ص.

(٦) $\begin{bmatrix} س^٢ & ٤ \\ -٢ & ص^٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$

$س^٢ = ٩$
س = ± ٣

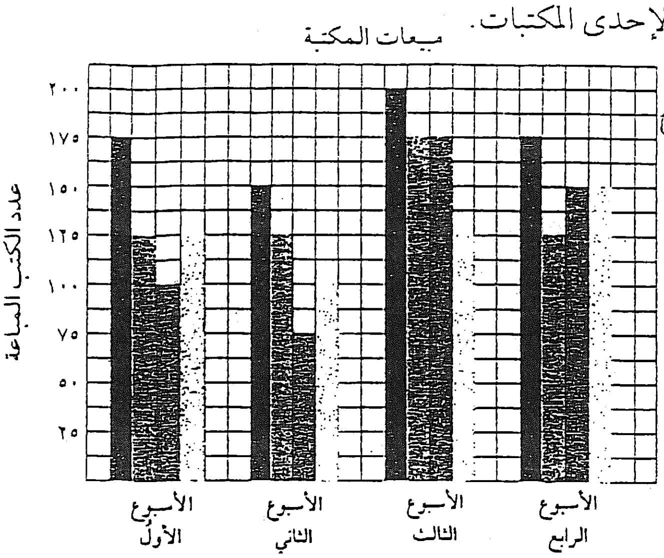
$ص^٢ - ٥ص = ٠$
ص = ٠ ، ص = ٥

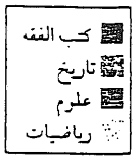
(٧) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤س - ٦ & -١٠ص + ٥س \\ ٤س & -١٥ص + ٧,٥س \end{bmatrix}$

٨ = ٤س
$\boxed{س = ٢}$

−١٠ص + ٥س = ٤
−١٠ص + ١٠ = ٤
ص = ٠,٦

(٨) يوضّح التمثيل البياني المبيعات في شهر أغسطس لإحدى المكتبات.





(أ) سجّل البيانات في جدول.

	فقه	تاريخ	علوم	رياضيات
الأسبوع الأول	١٧٥	١٢٥	١٠٠	١٢٥
الثاني	١٥٠	١٢٥	٧٥	١٠٠
الثالث	٢٠٠	١٧٥	١٧٥	١٢٥
الرابع	١٧٥	١٢٥	١٥٠	١٥٠

(ب) اِعرض البيانات في مصفوفة. ماذا تمثّل الأعمدة؟ والصفوف؟

$$\begin{bmatrix} ١٢٥ & ١٠٠ & ١٢٥ & ١٧٥ \\ ١٠٠ & ٧٥ & ١٢٥ & ١٥٠ \\ ١٢٥ & ١٧٥ & ١٧٥ & ٢٠٠ \\ ١٥٠ & ١٥٠ & ١٢٥ & ١٧٥ \end{bmatrix}$$

(٩) تحليل الخطأ: حدّد أحد الطلاب أن العنصر $أ_{٢٣}$ ، في المصفوفة: $أ = \begin{bmatrix} ٤,٥ & ٢,٥ & ٣ \\ -٣ & ٥ & ١,٥ \\ ١,٥ & ٤,٥ & ٤ \end{bmatrix}$ هو -٣.
ما خطأ الطالب؟

$أ_{٣٢} = ٥و٤$

(١٠) السؤال المفتوح: أوجد بعض البيانات التي يمكن أن تعرضها في صورة مصفوفة. ثم اكتب مصفوفة لها، وميّز الصفوف والأعمدة.

$$\begin{array}{cccc} طلال & احمد & فهد & \\ \left[\begin{matrix} ٧٠ \\ ٥١ \end{matrix}\right. & \begin{matrix} ٤٣ \\ ٣٢ \end{matrix} & \left.\begin{matrix} ٦٥ \\ ٥٠ \end{matrix}\right] & \begin{matrix} الرياضيات \\ الانجليزي \end{matrix} \end{array}$$

درجات فهد واحمد وطلال في الرياضيات والانجليزي

في التمارين (١١ – ١٤)، أوجد قيَم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتان.

(١١) $\begin{bmatrix} ٣ & ١٢ \\ ٤ص + ١٩ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢س - ٥ \\ ٢ص + ١٠ & ٥ \end{bmatrix}$

٢س – ٥ = ١٢
$\frac{٢س}{٢} = \frac{١٧}{٢}$
س = ٨و٥

٢ص + ١٠ = ٤ص + ١٩
-٢ص = ٩
ص = -٥و٤

(١٢) $\begin{bmatrix} ٢ص - ٢ & ٤ \\ ٤ك + ١٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص - ٥ & ٢س + ٤ \\ ٢ك - ٥ & ل + ٦ \end{bmatrix}$

٢س + ٤ = ٤ ⟸ س = ٠
ل + ٦ = ٤ ⟸ ل = -٢

ص – ٥ = ٢ص – ٢
$\boxed{-٣ = ص}$

٤ك + ١٥ = ٢ك – ٥
٢ك = -٢٠
$\boxed{ك = -١٠}$

٤ص + ٢ = ١١
$\frac{٤}{٤}$ص = $\frac{٩}{٤}$
ص = $\frac{٩}{٤}$

$\frac{-٤}{-٤}$س = $\frac{-٨}{-٤}$
س = ٢

(١٣)
$$\begin{bmatrix} ٤ل & -٣ & ٤ص+٢ \\ ٣ & ٢ & -٤س \\ ١ & -١٤ & ٢ن-١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ك-١ & ١١ \\ ٣ & ٢ & -٨ \\ ١ & ٣م-٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

٢ك - ١ = -٣
$\frac{٢}{٢}$ك = $\frac{-٢}{٢}$
ك = -١

٢ن - ١ = ٠ ← ن = $\frac{١}{٢}$

٣م - ٢ = -١٤
٣م = -١٢
م = -٤

(١٤)
$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢-ص & ٤س \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ١٥ & -١٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ل & ٤ص & ٢س+٥ \\ ك-ل & م & -٣ \\ ١٥ & -٤س & ٠ \end{bmatrix}$$

-٤س = -١٠ ← س = ٢٫٥
ل = ٥
ك - ل = ٢ ، ك - ٥ = ٢
ك = ٧
٤ص = ٢ - ص ← ٥ص = ٢ ← ص = ٠٫٤

(١٥) صنعت شركة لإنتاج الحاسوب جهازًا يحمل مخططًا لأربع دول تقع في قارة أفريقيا وهي:
جمهورية مصر العربية ومساحتها مليون كيلومتر مربّع، ليبيا: ١٨٠٠٠٠٠ كيلومتر مربّع،
الجزائر: ٢٤٠٠٠٠٠ كيلومتر مربّع، السودان: ٢٥٠٠٠٠٠ كيلومتر مربّع.
مثّل هذه البيانات في مصفوفة مميّزًا الصفوف والأعمدة واكتب رتبة المصفوفة.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{السودان} & \text{الجزائر} & \text{ليبيا} & \text{مصر} \end{array} \\ \text{المساحة} & \begin{bmatrix} ٢٥٠٠٠٠٠ & ٢٤٠٠٠٠٠ & ١٨٠٠٠٠٠ & ١٠٠٠٠٠٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

رتبة المصفوفة ١ × ٤

(١٦) الكتابة: حدّد معلومات تحب أن تضيفها لعمل مصفوفة تحتوي على بيانات عددية ذات معنى.
يمكن أن نضيف عدد السكان في كل دولة من الدول الأربع

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١ – ٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة مما يلي:

(١)
$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$
٢ × ٣

(٢)
$$\begin{bmatrix} ١ \\ -٩ \\ ٥ \end{bmatrix}$$
٣ × ١

في التمرينين (٣ – ٤)، حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣)
$$\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢(١,٥) & ٢(-١) \\ ٢(٠) & ٢(٢,٥) \end{bmatrix}$$

متساويتان لأن
٢(-١) = -٢ ، ٢(١٫٥) = ٣
٢(٢٫٥) = ٥ ، ٢(٠) = ٠

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -٢ & -٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ لا ، لأن الرتب مختلفة

في التمرينين (٥ — ٦)، اذكر رتبة (أبعاد) كلّ مصفوفة، مع ذكر قيمة العنصر الموضّح.

(٥) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{٣٢}$

٤×٣ ، $أ_{٣٢}$ = ٠

(٦) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ١ & -٤ \\ ٠ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب_{٢١}$

٢×٣ ، $ب_{٢١}$ = ١

في التمارين (٧ — ٩)، استخدم الجدول أدناه.

عدد التليفزيونات المستخدمة في إحدى الدول بالمليون

النوع/ السنة	١٩٨٠	١٩٨٢	١٩٨٤	١٩٨٧	١٩٩٠	١٩٩٣
ملون	٨٢	٨٥	٨٨	٩٣	٩٦	٩٨
أبيض وأسود	٥١	٤٧	٤٣	٣٦	٣١	٢٠

(٧) وضّح البيانات في صورة مصفوفة حيث الصفوف تمثّل نوع التليفزيون، والأعمدة تمثّل السنوات. وأوجد $أ_{٢٣}$. ماذا يمثّل؟

$$\begin{bmatrix} ٩٨ & ٩٦ & ٩٣ & ٨٨ & ٨٥ & ٨٢ \\ ٢٠ & ٣١ & ٣٦ & ٤٣ & ٤٧ & ٥١ \end{bmatrix}$$

$أ_{٢٣}$ = ٤٣ ، يمثل عدد التليفزيونات ابيض واسود عام ١٩٨٤

(٨) اعرض البيانات في مصفوفة بصفوف تمثّل السنوات، وأعمدة تمثّل نوع التليفزيون. أوجد $أ_{٤١}$، ووضّح ماذا يمثّل.

$$\begin{bmatrix} ٥١ & ٨٢ \\ ٤٧ & ٨٥ \\ ٤٣ & ٨٨ \\ ٣٦ & ٩٣ \\ ٣١ & ٩٦ \\ ٢٠ & ٩٨ \end{bmatrix}$$

$أ_{٤١}$ = ٩٣

يمثل عدد التليفزيونات الملونة

في عام ١٩٨٧

(٩) اذكر أبعاد المصفوفات في التمرينين رقمي ٧ ، ٨.

٢ × ٦ ، ٦ × ٢

(١٠) الجغرافيا: الجدول يوضّح المسافات بين بعض المدن بالكيلومتر.

(أ) أكمل الجدول. كيف يكون ذلك ممكنًا بالنسبة إليك؟

المدينة	الكويت	الرياض	أبوظبي	مسقط
الكويت	-	٥٣٧	١٤٨٤	٢٥٦٨
الرياض	٥٣٧	-	٧٦٨	١٧٢٢
أبوظبي	١٤٨٤	٧٦٨	-	٢٢٥٩
مسقط	٢٥٦٨	١٧٢٢	٢٢٥٩	-

(ب) اكتب مصفوفة مناظرة لهذه البيانات.

$$\begin{bmatrix} - & ٥٣٧ & ١٤٨٤ & ٢٥٦٨ \\ ٥٣٧ & - & ٧٦٨ & ١٧٢٢ \\ ١٤٨٤ & ٧٦٨ & - & ٢٢٥٩ \\ ٢٥٦٨ & ١٧٢٢ & ٢٢٥٩ & - \end{bmatrix}$$

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

جمع المصفوفات وطرحها
Adding And Subtracting Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١ — ٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ٠ \\ -٢ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$$

(٢) $$\begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

في التمارين (٣ — ٦)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

(٣) $$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

(٤) $$\begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ٤ \\ -١ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٥ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ & -١ \\ ٠ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

(٥) $$\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٠ \\ -٨ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & ١ \\ ٣ & ١١ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ & -١ \\ -١١ & ١٦ & ١٧ \end{bmatrix}$$

(٦) $$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ -٤ & ١٢ \\ -٢ & ١٠ \end{bmatrix}$$

في التمارين (٧ – ١٢)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٠,٣٣ \\ ٠,١٥ & ٧- \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & \frac{١}{٢} & ١ \\ ٩ & ٨ & \frac{٣}{٥} & ٢ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{١١}{٢} & \frac{٧}{٨} & ٤- & ٢- \\ \frac{١٠}{١١}- & ١- & ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \underline{\text{د}} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٤٤ & ٣ \\ ٠ & ١ \\ ٢٣,٣ & ١٤ \end{bmatrix} = \underline{\text{جـ}}$$

(٧) أ + د ممكن

(٨) د – أ ممكن

(٩) جـ + ب ممكن

(١٠) أ + ب غير ممكن

(١١) جـ – د غير ممكن

(١٢) ب + جـ ممكن

في التمارين (١٣ – ١٦)، أوجد س في كل مما يلي :

(١٣) ✓
$$\begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٠ & ٦- \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

(١٤) ✓
$$\begin{bmatrix} ٥٠ & ٥ \\ ١٠- & ٥٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ ١- & ٧٥ \end{bmatrix} - \underline{\text{س}}$$

(١٥) ✓
$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٥- \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٣- & ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ ٣- & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} -$$

(١٦) ✓
$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ ١ & ١٧- & ٦- \end{bmatrix} - \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢٤- & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

حل بكراسة التمارين

رقم (١٣) ص ٤٢ بطرح $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٠ & -٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -١ & ٤ \\ ٢ & -١ & -٨ \end{bmatrix}$$

رقم (١٤) ص ٤٢

بإضافة $\begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -١ & ٧٥ \end{bmatrix}$ للطرفين

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ٥٠ & ٥ \\ -١٠ & ٥٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -١ & ٧٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦٢ & ٩ \\ -١١ & ١٢٥ \end{bmatrix}$$

رقم (١٥) ص ٤٢

بطرح المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$$\therefore -س = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٨ \\ -٧ & -٥ & ٠ \\ ٠ & -٣ & -١٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٨ \\ ٧ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ١٢ \end{bmatrix}$$

رقم (١٦) بإضافة المصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ ١ & -١٧ & -٦ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ -٢٤ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ ١ & -١٧ & -٦ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ -٢٣ & -١٣ & -٤ \end{bmatrix}$$

الشباب المختار لممارسة الأنشطة في مركزين مختلفين

	عدد الذكور في المركز	عدد الإناث في المركز
الحاسوب	٥٣	٥٧
الأعمال اليدوية	٥٤	٥٨
رياضة بدنية	٣٩	٢٩
سباحة	٤١	٦٠

(١٧) تحليل البيانات: استخدم المعلومات في الجدول أدناه:

(أ) ضع البيانات في مصفوفتين. وميّز كل مصفوفة.

$$\begin{array}{c} \text{عدد الذكور} \\ \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix} \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{c} \text{عدد الإناث} \\ \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

(ب) استخدم الفقرة (أ) لإيجاد عدد الشباب (الذكور والإناث) المشترك في كل نشاط بجمع المصفوفتين.

$$\begin{array}{c} \text{عدد الذكور} \\ \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{عدد الإناث} \\ \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} ١١٠ \\ ١١٢ \\ ٦٨ \\ ١٠١ \end{bmatrix}$$

(جـ) أوجد عدد الذكور – عدد الإناث المشتركين في كل نشاط.

$$\begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ \\ -٤ \\ ١٠ \\ -١٩ \end{bmatrix}$$

(١٨) الكتابة: بفرض أن أ، ب مصفوفتان لهما الأبعاد نفسها. وضح: لإيجاد أ + ب نجمع كل عنصر مع نظيره

(أ) كيف يمكنك إيجاد: أ+ب، أ-ب. ، لإيجاد أ - ب نوجد النظير الجمعي ب ثم نجمع كل عنصر من أ مع نظيره من النظير الجمعي لـ ب

(ب) كيف يمكنك إيجاد مصفوفة أ' بحيث أ + أ' يعطي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفرًا.

~~نوجد أ' بحيث يكون كل عناصره نظير جمعي لعناصر المصفوفة أ المناظرة له~~

المجموعة ب تمارين تعزيزية

الحساب الذهني: في التمارين (١ – ٤)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $$\begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ -٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ٢ \\ -٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$$

(٢) $$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

(٣) $$\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

(٤) $$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & -٣,٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & -٣,٥ \end{bmatrix}$$

(٥) التصنيع: يوضّح الجدول عدد كرات الشاطئ المنتجة في مصنعين ومستويات الإنتاج لفترة عمل واحدة.
المصنع الأول يعمل فترتين كل يوم، والمصنع الثاني يعمل ثلاث فترات.

	المصنع الأول		المصنع الثاني	
	بلاستيك	مطاط	بلاستيك	مطاط
لون واحد	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	١٢٠٠
ثلاثة ألوان	١٣٠٠	١٩٠٠	٦٠٠	١٦٠٠

(أ) اكتب مصفوفات لتمثل الإنتاج اليومي لكلّ مصنع.

$$\begin{bmatrix} ١٢٠٠ & ٤٠٠ \\ ١٦٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix} \text{،ب} \qquad \begin{bmatrix} ٧٠٠ & ٥٠٠ \\ ١٩٠٠ & ١٣٠٠ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(ب) استخدم النتائج من الفقرة أ. أوجد ناتج طرح المنتج الكلي في المصنع الثاني من المنتج الكلي في المصنع الأول.

$$\begin{bmatrix} -٥٠٠ & ١٠٠ \\ ٣٠٠ & ٧٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢٠٠ & ٤٠٠ \\ ١٦٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧٠٠ & ٥٠٠ \\ ١٩٠٠ & ١٣٠٠ \end{bmatrix} = \text{ب} - \text{أ}$$

في التمارين (٦ – ٨)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(٦) $$\begin{bmatrix} -٦ & -٦ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ -٥ & ٩ \end{bmatrix}$$

(٧) $$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ -٦ & ٦ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٢ & ٠ \\ -٦ & ٥ & -٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

(٨) $\begin{bmatrix} ٩ & -٧ & ٨ \\ ٦ & -٣ & -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & -٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & -٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ & ٦ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

(٩) يوضح الجدول التالي، ما يبيعه كل محل من العبوات المختلفة لنوعين من الشاي الأخضر و الشاي العادي:
حيث يشير العدد (١) إلى أن المحل يبيع هذا المنتج، والعدد (٠) إلى أن المحل لا يبيع هذا المنتج.

	محل أ		محل ب		محل ج	
العبوة	شاي أخضر	شاي عادي	شاي أخضر	شاي عادي	شاي أخضر	شاي عادي
٥ جرامات	٠	٠	٠	٠	١	١
١٠ جرامات	١	١	٠	٠	١	١
٢٥ جرامًا	١	١	٠	٠	٠	٠
٥٠ جرامًا	١	٠	١	١	٠	٠

(أ) اكتب ثلاث مصفوفات من الرتبة ٤ × ٢ لتمثّل الأنواع المتوفّرة لكل منتج في كل محل.

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(ب) اكتب مصفوفة من الرتبة ٤ × ٢ لتمثّل مجموع عدد المحلات التي تبيع كل منتج.

$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

(١٠) **السؤال المفتوح:** صف موقفًا يتطلّب جمع أو طرح معلومات مخزّنة على صورة مصفوفات.

في التمارين (١١ – ١٣)، اختر الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(١١) $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ٠ & -١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & -٢ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٨ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} -٩ & ١ & ٦ \\ -٥ & ٠ & -٩ \\ ٢ & -٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٦ & ٧ \\ -٢ & ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١ & ١٠ \\ ٠ & -٦ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٣)

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ١- & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٤ – ١٧)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & \frac{١}{٢} & ١ \\ ٩ & ٨ & \frac{٣}{٥} & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٠,٣٣ \\ ٠,١٥ & ٧- \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٤٤ & ٣ \\ ٠ & ١ \\ ٢٣,٣ & ١٤ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{د} = \begin{bmatrix} \frac{١١}{٢} & \frac{٧}{٨} & ٤- & ٢- \\ \frac{١٠}{١١} & ١- & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

(١٤) ب – جـ ممكن

(١٥) د + أ ممكن

(١٦) أ + ب + جـ غير ممكن

(١٧) أ + (جـ – د) غير ممكن

في التمارين (١٨ – ٢١)، أوجد س في كل مما يلي:

(١٨)

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٥ \\ ٠ & ١ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \text{س} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$$

(١٩)

$$\begin{bmatrix} ١٣- & ٣ & ١١ \\ ٨ & ٩- & ١٥ \end{bmatrix} = \text{س} - \begin{bmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

(٢٠)

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٢- & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٢- & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} - \text{س}$$

(٢١)

$$\begin{bmatrix} ٢٠ & ١٤ \\ ٠ & ٥- \\ ١٩- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢٨ & ١٧ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} + \text{س}$$

حل

رقم (١٨) ص٤٦ نطرح $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$$\therefore س = \begin{bmatrix} -٦ & ٥ \\ ٠ & ١ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & ٤ \\ -١ & -١ \\ ١ & ١١ \end{bmatrix}$$

رقم (١٩) ص٤٦

نطرح $\begin{bmatrix} -١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$$\therefore -س = \begin{bmatrix} -١٣ & ٣ & ١١ \\ ٨ & -٩ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٢ & ٢ & ٩ \\ ٧ & -١١ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ١٢ & -٢ & -٩ \\ -٧ & ١١ & -١٥ \end{bmatrix}$$

رقم (٢٠) ص٤٦ بإضافة $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ لطرفي المعادلة

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٢ \\ -٤ & ٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

رقم (٢١) ص٤٦ نطرح $\begin{bmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢٨ & ١٧ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ٢ & ١٤ \\ & ٥ \\ -١٩ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢٨ & ١٧ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٢ \\ -٢٨ & -١٢ \\ -٢١ & ٦ \end{bmatrix}$$

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

ضرب المصفوفات

Matrices Multiplication

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١ — ٤)، أوجد ناتج ضرب كلٍّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٢- \\ ٩ & ٦- \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٢١- & ٢ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٣- & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٤ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ١- & ٥- \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٥ \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix}$

(٥) **الأعمال**: أعدّ منسق أزهار ثلاث باقات. وضع في الأولى ثلاث زهرات ياسمين وفي الثانية ثلاث زهرات ياسمين وأربع زهرات قرنفل؛ وفي الثالثة أربع زهرات فل وثلاث زهرات قرنفل.

يبلغ ثمن زهرة الياسمين الواحدة ٠,٢١٥ دينار وثمن زهرة القرنفل الواحدة ٠,٠٩٠ دينار وثمن زهرة الفل الواحدة ٠,١٣٠ دينار.

(أ) اكتب مصفوفة تمثل عدد كل نوع من الأزهار في كل باقة.

$$\begin{array}{c} \\ \text{الباقة الأولى} \\ \text{الثانية} \\ \text{الثالثة} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{الياسمين} & \text{القرنفل} & \text{الفل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} \end{array}$$

(ب) اكتب مصفوفة تمثل ثمن كل نوع من الأزهار.

$$\begin{array}{r} \text{ثمن الياسمين} \\ \text{،، القرنفل} \\ \text{،، الفل} \end{array} \begin{bmatrix} ٢,١٥ \\ ٠,٩٠ \\ ١,٣٠ \end{bmatrix}$$

(جـ) اكتب مصفوفة تمثل ثمن كل باقة.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢,١٥ \\ ٠,٩٠ \\ ١,٣٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦,٤٥ \\ ١٠,٠٥ \\ ٧,٩٠ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ثمن الباقة الأولى} \\ \text{،، ،، الثانية} \\ \text{،، ،، الثالثة} \end{array}$$

في التمارين (٦ – ١٠)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، $د = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(٦) أ × ب معرف (٧) أ × جـ معرف (٨) جـ × ب غير معرف

(٩) د × أ معرف (١٠) د × جـ معرف

في التمارين (١١ – ١٣)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١١) $٢ \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix}$

---

(١٢) $٠,٥ \begin{bmatrix} ٣ & ١٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١,٥ & ٧ \\ ٣,٥ & -٢ \end{bmatrix}$

---

(١٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

---

(١٤) الاختيار من متعدد: تبيّن الأعمدة في المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$ بالترتيب، عدد المماحي وعدد الأقلام المباعة. وتبيّن الصفوف بالترتيب الأعداد المباعة يومي الاثنين والثلاثاء. تبيّن المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ٠,٠٥٠ \\ ٠,٠٢٥ \end{bmatrix}$ ، كلفة كل من الممحاة والقلم. ما الذي يبيّنه ناتج الضرب أب؟

(أ) ثمن كل المماحي المباعة يومي الاثنين والثلاثاء، وثمن الأقلام في هذين اليومين.

(ب) مجموع ثمن المماحي والأقلام يوم الاثنين ومجموع ثمنهما يوم الثلاثاء.

(جـ) مجموع ثمن الأقلام والمماحي.

(د) ثمن قلم واحد وممحاة واحدة.

٤٨

(١٥) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج. رتبة مصفوفة الضرب هي ٣ × ٢

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ & -٢ \\ -\frac{٤}{٥} & ٣ & ٦ \\ ٠ & -\frac{٢}{٣} & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٤ \\ \frac{٧}{٥} & -\frac{١١}{٥} \\ -\frac{٢}{٣} & -\frac{١٤}{٣} \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٦ – ١٩)، استخدم المصفوفات $\underline{د}$، $\underline{و}$، $\underline{ف}$. نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

$$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} ،\quad \underline{و} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix} ،\quad \underline{ف} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

(١٦) $\underline{د} \times \underline{و}$ معرفة $\underline{د} \times \underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & -٦ & -٥ \\ ٦ & ١ & -٥ \\ -٣ & -١٢ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٧) $(\underline{د} \times \underline{و}) \times \underline{ف}$ معرفة $\begin{bmatrix} ١ & -٦ & -٥ \\ ٦ & ١ & -٥ \\ -٣ & -١٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & -٢٤ \\ -٣٣ & -٧ \\ ٦٩ & -١٨ \end{bmatrix}$

(١٨) $\underline{د} - ٢ \times \underline{و}$ معرفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -١٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -٤ \\ ٦ & ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ١٢ & -١ \\ -٢ & ٣ & ٥ \\ -٤ & -٣ & -٤ \end{bmatrix}$

(١٩) $(٢ \times \underline{د})(٣ \times \underline{ف})$ معرفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٢ \\ ٠ & ٦ & ٢ \\ ٤ & -٢ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٩ & ٦ \\ -١٥ & ٣ \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩٠ & ٠ \\ -٧٨ & ٤٢ \\ -٣٠ & -٣٠ \end{bmatrix}$

(٢٠) تعرض شركة تبيع الخردوات في محلاتها الأسعار في مصفوفة من الرتبة ١ × ٣ ومبيعات المحال الثلاثة اليومية في مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

مطرقة	منبه ضوئي	قنديل
٣٠٠,٠ دينار	٥٠٠,٠ دينار	٧٠٠,٠ دينار

	المحل أ	المحل ب	المحل ج
مطرقة	١٠	٩	٨
منبه ضوئي	٣	١٤	٦
قنديل	٢	٥	٧

(أ) أوجد ناتج ضرب المصفوفتين. اشرح ما الذي يمثله.

ناتج الضرب = [٥,٩٠٠ ١٣,٢٠٠ ١٠,٣٠٠] وتمثل دخل كل من المحلات الثلاثة بالترتيب من بيع الأنواع الخردوات الثلاثة

(ب) كيف يمكن إيجاد المبيع العام في المحال الثلاثة؟

المبيع العام = ٢٩٫٤٠٠ دينار

(جـ) أوجد مبيع المنبهات الضوئية في المحال الثلاثة.

المبيع من المنبهات الضوئية = ٢٣ × ٥٠٠٫٠ = ١١٫٥٠٠ دينار

(٢١) **السؤال المفتوح**: اكتب مصفوفتين س، ص من الرتبة ٢ × ٢ ليست كل العناصر متساوية بحيث يكون س × ص = ص × س.

س = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(٢٢) أوجد قيمة كل من س ، ص: $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

٢س + ٢ = -٤

٢س = -٦ ⟸ س = -٣ ٦س - ص = -٩ -١٨ - ص = -٩ ⟸ ص = -٩

في التمرينين (٢٣ – ٢٤) استخدم المصفوفات أ، ب ، جـ، د. حدّد ما إذا كان التعبيران في كل زوج مما يلي متساويين.

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ د = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

✓ (٢٣) (أ + ب) × جـ ، أ × جـ + ب × جـ.

✓ (٢٤) (أ + ب) × (جـ + د) ، (أ + ب) × جـ + (أ + ب) × د.

(٢٥) إذا كانت م = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$، ن = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$، فهل م × ن = ن × م؟ فسّر.

م × ن = $\begin{bmatrix} -٨ & -٢٣ \\ ٤ & -٩ \end{bmatrix}$ ، ن × م = $\begin{bmatrix} ١ & -٢٠ \\ ١١ & -١٨ \end{bmatrix}$ م × ن ≠ ن × م

ضرب المصفوفات غير إبدالي

(٢٦) أي ضرب مما يلي غير معرّف؟

(أ) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

حل :-

رقم (٢٣) ص . بكراسة التمارين

$$\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 4} \\ 4 \quad 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 \\ -2\end{matrix}} & \begin{matrix}4 \\ 1\end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{جـ}} + \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} -5 & 16 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{جـ}} + \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{جـ}}$$

رقم (٢٤) ص . بكراسة التمارين

$$\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{\text{جـ}}+\underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times (\underline{\text{جـ}}+\underline{\text{د}}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}} + (\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times (\underline{\text{جـ}}+\underline{\text{د}}) = (\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}} + (\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{د}}$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ – ٤)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٤- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨- \\ ٨- & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣٤ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٤ & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٥- \\ ٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥ – ٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا مع تفسير إجابتك.

$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٥- \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، $د = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

(٥) ب × أ معرف لذا (٢ × ٢) (٢ × ٢) متساويان

(٦) جـ × أ غير معرف (٢ × ١) (٢ × ٢) غير متساويان

(٧) ب × جـ معرف (٢ × ٢) (٢ × ١) متساويان

(٨) أ × د غير معرف (٢ × ٢) (١ × ٢) غير متساويان

(٩) جـ × د معرف (٢ × ١) (١ × ٢) متساويان

في التمرينين (١٠ – ١١)، أوجد ناتج الضرب.

(١٠) $١- \begin{bmatrix} ٤- & ٧- & ٩ \\ ٣ & ٢- & ٨- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٧ & ٩- \\ ٣- & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١- \\ ١ & ١- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ & ١ \\ ١- & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٢) أوجد رتبة مصفوفة ناتج الضرب، ثم أوجد ناتج الضرب. رتبة ناتج الضرب ٤ × ٤

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ -٢ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & \text{ب} & ٠ & \text{أ} \\ \text{د} & ٠ & \text{جـ} & ٠ \\ \text{ف} & ٠ & ٠ & \text{و} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & \text{ب} & ٠ & \text{أ} \\ -٢\text{ف} & \text{ب} & ٠ & \text{أ} - ٢\text{و} \\ ٢\text{ف} & ٠ & ٠ & ٢\text{و} \\ \text{ف} & -\text{ب} & ٠ & -\text{أ} + \text{و} \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٣ – ١٦)، استخدم المصفوفات د، و، ن ثم نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

$$\text{د} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٠ \\ -٢ & -١ & ٢ \end{bmatrix} \qquad \text{و} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \text{ن} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & -٥ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

(١٣) -٣ × ن

$$= \begin{bmatrix} -٦ & ٩ \\ -٣ & ١٥ \\ -١٢ & -٦ \end{bmatrix}$$

(١٤) د × (و × ن)

(١٥) (و − د) × ن

(١٦) (د × د) × و

(١٧) الكتابة في الرياضيات: لنفرض أن المصفوفة أ هي من الرتبة ٢ × ٣ والمصفوفة ب من الرتبة ٣ × ٢.
هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ اشرح تفكيرك.

أ × ب ≠ ب × أ لأنه ضرب المصفوفات غير إبدالي

حل :-

رقم (١٤) ص ٥٢ $\underline{د} \times (\underline{و} \times \underline{ن})$

$$\underline{و} \times \underline{ن} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & -١ \\ -٧ & -٦ \\ -١٢ & ١١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{د} \times (\underline{و} \times \underline{ن}) = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٩ & -١ \\ -٧ & -٦ \\ -١٢ & ١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & -٢٤ \\ -٣٣ & -٧ \\ ٦٩ & -١٨ \end{bmatrix}$$

رقم (١٥) ص ٥٢ $(\underline{و} - \underline{د}) \times \underline{ن}$

$$(\underline{و} - \underline{د}) = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٧ & ١ \\ ١ & -٣ & -٣ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$(\underline{و} - \underline{د}) \times \underline{ن} = \begin{bmatrix} ١ & -٧ & ١ \\ ١ & -٣ & -٣ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٤ & -١ \\ ٦ & -١٣ \\ -٧ & ١٦ \end{bmatrix}$$

رقم (١٦) ص ٥٢ $(\underline{د} \times \underline{د}) \times \underline{و}$

$$\underline{د} \times \underline{د} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٩ & ٣ \\ ٢ & ٨ & ١ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$(\underline{د} \times \underline{د}) \times \underline{و} = \begin{bmatrix} -١ & ٩ & ٣ \\ ٢ & ٨ & ١ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٨ & -١٥ \\ ١٥ & -٩ & -١٥ \\ ٢ & ١١ & -٥ \end{bmatrix}$$

(١٨) اكتب مصفوفة تمثل العائد اليومي للبطاقات المباعة مستخدمًا الجدولين التاليين:

	درجة ١	درجة ٢	درجة ٣
أسعار البطاقات بالدينار	٧	٦	٥

	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
عدد البطاقات المباعة درجة ١	١٥٠	١٣٠	١٦٠
عدد البطاقات المباعة درجة ٢	١٢٥	١٣٠	١٧٥
عدد البطاقات المباعة درجة ٣	٦٠	٥٢	٨٠

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١٥٠ & ١٣٠ & ١٦٠ \\ ١٢٥ & ١٣٠ & ١٧٥ \\ ٦٠ & ٥٢ & ٨٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢١٠٠ & ١٩٥٠ & ٢٥٧٠ \end{bmatrix}$$

(١٩) حل المعادلة المصفوفية، ثم أوجد قيمة كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢س & ٦س - ص \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

$٢س = -٤$

$\boxed{س = -٢}$

$٦س - ص = -٩$

$-١٢ - ص = -٩$

$-ص = -٩ + ١٢$

$-ص = ٣$

$\boxed{ص = -٣}$

في التمرينين (٢٠ – ٢١)، استخدم المصفوفات أ، ب، جـ، د، هـ لتبيين صحة العبارة في كل منهما.

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \quad جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$د = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \quad هـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad أ + ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(أ + ب) \times هـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

(٢٠) (أ + ب) × هـ = أ × هـ + ب × هـ.

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \leftarrow ١$$

(٢١) (أ + ب) (جـ + د) = أ × جـ + أ × د + ب × جـ + ب × د.

$$أ \times هـ + ب \times هـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \leftarrow ٢$$

من ١، ٢ نجد أن (أ + ب) × هـ = أ × هـ + ب × هـ

رقم ٢١ (أ + ب) (جـ + د) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٤ \\ ٤ & ٢٠ \end{bmatrix}$

$$أ \times جـ + أ \times د + ب \times جـ + ب \times د = \begin{bmatrix} -٥ & ١٦ \\ -٣ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ ٧ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ١٤ \\ ٤ & ٢٠ \end{bmatrix}$$ ∴ العبارة صحيحة

تمرّن
٧-٤

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس)
Identity Matrices and Inverse Matrix

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١ – ٢)، بين أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

في التمارين (٣ – ٧)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{vmatrix} = -٢١ - ٠ = -٢١$

(٤) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{vmatrix} = -١٢ - (-١٢) = ٠$

(٥) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{vmatrix} = \frac{١}{٨} - \frac{٢}{٥} = \frac{-١١}{٤٠}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ١٥ - ٢ = ١٣$

(٧) $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ - ٦ = -٦$

في التمارين (٨ — ١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٨) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$أ^{-١} = \frac{١}{١}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$

$أ^{-١} = \frac{١}{١٦}\begin{bmatrix} -٨ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٠) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} -٨ & ٦ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$

لا يوجد نظير ضربي لأنه $\begin{vmatrix} -٨ & ٦ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix}$ = صفر

في التمرينين (١٢ — ١٣)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٢) $\begin{bmatrix} ٧ & ١٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ١٢ & -٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٧ & -١٥ \\ ٢٩ & ٢٦ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

لا يمكن حلها لأنه $\begin{vmatrix} ٠ & -٤ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix}$ = صفر

* (١٤) **تحليل البيانات:** يجدد ٩٩,٥٪ من مشتركي اللاقط التليفزيوني اشتراكهم للعام التالي بينما ٠,٥٪ منهم لا يجددون اشتراكهم. ٩٨٪ من غير المشتركين يبقون دون اشتراك بينما ٢٪ منهم يشتركون في اللاقط العام التالي.

(أ) اكتب مصفوفة تبيّن التغير في اشتراك اللاقط.

$$أ = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{غير مشترك} & \text{مشترك} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{مشترك} \\ \text{غير مشترك} \end{array} & \begin{bmatrix} ٠,٠٢ & ٠,٩٩٥ \\ ٠,٩٨ & ٠,٠٠٥ \end{bmatrix} \end{array}$$

$أ^{-١} = \frac{١}{٠,٩٧٥}\begin{bmatrix} -٠,٠٢ & ٠,٩٨ \\ ٠,٩٩٥ & -٠,٠٠٥ \end{bmatrix}$

(ب) في عينة من ٣٠٠٠٠ شخص اشترك ٢٠٠٠٠ منهم باللاقط. توقّع عدد مشتركي اللاقط من هذه العينة العام القادم.

عدد مشتركي اللاقط للعام القادم

$\begin{bmatrix} ٠,٠٢ & ٠,٩٩٥ \\ ٠,٩٨ & ٠,٠٠٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢٠٠٠٠ \\ ١٠٠٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠١٠٠ \\ ٩٩٠٠ \end{bmatrix}$ = ٢٠١٠٠

(جـ) استخدم النظير الضربي للمصفوفة في (أ) لإيجاد عدد مشتركي اللاقط في العام السابق.

$$\begin{bmatrix} ١٩٨٩٧ \\ ١٠١٠٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠٠٠٠ \\ ١٠٠٠٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-٠٫٠٢٠}{٠٫٩٧٥} & \frac{٠٫٩٨}{٠٫٩٧٥} \\ \frac{٠٫٩٩٥}{٠٫٩٧٥} & \frac{-٠٫٠٠٥}{٠٫٩٧٥} \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٥–١٧)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٥) $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٤ & -٤ \end{vmatrix} = ١٦ + ٢٠ = ٣٦$

∴ عدد مشتركي اللاقط العام السابق $= ١٩٨٩٧$

(١٦) $\begin{vmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ ٨ & -٢ \end{vmatrix} = -٤ + ٤ = ٠$

(١٧) $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٢ - ٠ = ٢$

في التمرينين (١٨–١٩)، هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح إجابتك.

(١٨) $\begin{bmatrix} ٠٫٥ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -٤ & ١٠ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -٤ & ١٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠٫٥ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

(١٩) $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٨ & ٦ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$$و \neq \begin{bmatrix} ٨ & ٢٣ \\ -١٦ & -٤٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٨ & ٦ \end{bmatrix}$$

لا، لأن حاصل ضربهما $\neq$ و

في التمارين (٢٠–٢٣)، حدّد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي. في حال وجوده أوجد النظير الضربي للمصفوفة وفي حال عدم وجوده. اشرح السبب.

(٢٠) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ $أ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

(٢١) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ $أ^{-١} = \frac{١}{-٦} \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$

(٢٢) $\begin{bmatrix} ١١ & -٣ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix}$ $أ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -١١ & -٧ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٧ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(٢٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ لا يوجد نظير ضربي لأن $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٠ & ٦ \end{vmatrix} = $ صفر

٥٦

(٢٤) أوجد المصفوفة س: $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ س + $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

---

(٢٥) حل المعادلة: $-٢ \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times$ س + $\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & -٢٧ \\ ١٠ & -٢٤ \end{bmatrix}$

---

(٢٦) إذا كانت س $\in$ ح: أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$ ونظيرها الضربي: س $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، فما قيمة س؟

حل رقم ٢٤، ٢٥، ٢٦ في الصفحة القادمة ص٥٤

حل :-

رقم (٢٤) ص ٥٧

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \text{س} + \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \text{س} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

رقم (٢٥) ص ٥٧

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times \text{س} + \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & -٢٧ \\ ١٠ & -٢٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times \text{س} + \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & -٢٧ \\ ١٠ & -٢٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ١٩ & -٢٧ \\ ١٠ & -٢٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ١٥ & -٢٤ \\ ٥ & -٢٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ -٥ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٥ & -٢٤ \\ ٥ & -٢٢ \end{bmatrix} = \frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} -٤٥ & ٣٠ \\ -٧٥ & ١٢٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$$

رقم (٢٦) ص ٥٧

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{س} & -٢\text{س} \\ ٣\text{س} & ٤\text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\text{س} & ٠ \\ ٠ & ٢\text{س} \end{bmatrix}$$

$٢\text{س} = ١$ ، $\text{س} = \frac{١}{٢}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

ص٥٦

بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

في التمارين (٢ – ٦)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٢) $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta = 0 - 0.75 = -0.75$

(٣) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta = -2 - 15 = -17$

(٤) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\Delta = 2 - 0 = 2$

(٥) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta = 5 + 6 = 11$

(٦) $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$ $\quad ٣- = ٥ + ٨- = \Delta$

في التمارين (٧–١٠)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إذا وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي».

(٧) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} \frac{١}{١-} = {}^{١-}أ$

(٨) $\begin{bmatrix} ٣ & ١,٥- \\ ٠,٥- & ٢,٥ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ٣- & ٠,٥- \\ ١,٥- & ٢,٥- \end{bmatrix} \frac{١}{٦,٧٥-} = {}^{١-}أ$

(٩) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} \frac{١}{٦-} = {}^{١-}أ$

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix} \frac{١}{٦} = {}^{١-}أ$

(١١) أوجد س: $\begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix} \times$ س $= \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \frac{١}{٢} =$ س

$\begin{bmatrix} ١٧,٥ \\ ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥- \\ ٣٠ \end{bmatrix} \frac{١}{٢} =$

في التمرينين (١٢–١٣)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٢) $\begin{vmatrix} ١٠ & ٣- \\ ٢٠ & ٦ \end{vmatrix}$ $\quad ١٢٠- = ٦٠ - ٦٠- =$

(١٣) $\begin{vmatrix} ٩ & ٦ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix}$ $\quad ٩ = ٢٧ - ٣٦ =$

(١٤) هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح.

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} -2.5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2.5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \text{و}$$

لا ، لأن حاصل ضربها $\neq$ مصفوفة الوحدة

في التمارين (١٥–١٨)، حدّد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي. في حال وجوده أوجد المصفوفة وفي حال عدم وجوده اشرح السبب.

(١٥) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

(١٦) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(١٧) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \text{أ}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(١٩) أوجد س: $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \text{س} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(٢٠) حل المعادلة: $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \text{س} - \begin{bmatrix} 2 & -26 \\ 3 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 25 \\ 2 & 24 \end{bmatrix}$

حل رقم ١٩، ٢٠ في الصفحة القادمة ص٥٨

حل :-

رقم (١٩) ص ٥٩

$$\begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

رقم (٢٠) ص ٥٩

$$-\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times س + \begin{bmatrix} -2 & 20 \\ -2 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 25 \\ 2 & 24 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} 3 & 25 \\ 2 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 20 \\ -2 & 20 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{-1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرين
٧-٥

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

حل نظام من معادلتين خطيتين

Solving System of Two Linear Equations

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١ – ٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٥ \\ \text{س} - ٢\text{ص} = -٤ \end{cases}$

معاملات   متغيرات   ثوابت

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

(٢) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٥\text{ص} = ٠ \\ \text{س} + \text{ص} = ٢ \end{cases}$

معاملات   متغيرات   ثوابت

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

في التمرينين (٣ – ٤)، اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات.

(٣) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$

٣س - ص = -١
٢س + ٤ص = ٣

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$

٢س + ٤ص = ٥
-س - ٢ص = -٢

في التمارين (٥ – ٧)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

(٥) ✓ $\begin{cases} \text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٤\text{ص} = ٦ \end{cases}$

(٦) ✓ $\begin{cases} \text{س} - ٣\text{ص} = -١ \\ -٥\text{س} + ١٦\text{ص} = ٥ \end{cases}$

(٧) ✓ $\begin{cases} \text{س} + ٥\text{ص} = -٤ \\ \text{س} + ٦\text{ص} = -٥ \end{cases}$

ملاحظة حل رقم ٥ ، ٦ ، ٧ صفحة ٦٠ في الصفحة القادمة

حل

رقم [٥] ص ٦٠

$$\begin{bmatrix}١ & ٣\\ ١ & ٤\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٥\\ ٦\end{bmatrix}$$

$$أ \times ع = ب \qquad ع = أ^{-١} \times ب$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١}\begin{bmatrix}٤ & -٣\\ -١ & ١\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٤ & -٣\\ -١ & ١\end{bmatrix}$$

$$ع = \begin{bmatrix}٤ & -٣\\ -١ & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٥\\ ٦\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٢\\ ١\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٢\\ ١\end{bmatrix} \qquad س = ٢ \text{ ، } ص = ١$$

رقم (٦) ص ٦٠ $\begin{bmatrix}١ & -٣\\ -٥ & ١٦\end{bmatrix}\begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-١\\ ٥\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١٦ & ٣\\ ٥ & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-١\\ ٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-١\\ ٠\end{bmatrix} \quad \therefore س = -١ \text{ ، } ص = ٠$$

رقم (٧) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix}١ & ٥\\ ١ & ٦\end{bmatrix}\begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-٤\\ -٥\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٦ & -٥\\ -١ & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-٤\\ -٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١\\ -١\end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = -١

في التمارين (٨ – ١١)، بيّن ما إذا كان لنظام معادلات حلًا وحيدًا أم لا.

(٨)
٢٠س + ٥ص = ٢٤٠
ص + ٢٠س = ٠

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٢٠ & ١ \end{vmatrix} = -٨٠ \neq ٠$ حل وحيد

(٩)
٣س + ٢ص = ١٠
٦س + ٤ص = ١٦

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ لا

(١٠)
ص = $\frac{٢}{٣}$ س – ٣
ص = –س + ٧

$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{٢}{٣} & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} \neq ٠$ حل وحيد

(١١)
٢٠س + ٥ص = ١٤٥
٣٠س – ٥ص = ١٢٥

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٣٠ & -٥ \end{vmatrix} \neq ٠$ حل وحيد

في التمارين (١٢ – ١٤)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(١٢)
٢س + ص = ٤
٣س – ص = ٦

(١٣)
٢س + ص = ٧
–٢س + ٥ص = –١

(١٤)
٢س + ٤ص = ١٠
٣س + ٥ص = ١٤

(١٥) ينتج أحد المصانع أقلام رصاص ومماحي. يبلغ ثمن علبة تحتوي على ٥ مماحي وقلمي رصاص ١٥٠٠ فلس. ويبلغ ثمن علبة أخرى تحتوي على ٧ مماحي و٥ أقلام ٢٦٥٠ فلسًا. أوجد ثمن المحاة وثمن القلم مستخدمًا النظير الضربي للمصفوفة.

٥س + ٢ص = ١٥٠٠
٧س + ٥ص = ٢٦٥٠

$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥٠٠ \\ ٢٦٥٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{١١} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٧ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٥٠٠ \\ ٢٦٥٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٥٠ \end{bmatrix}$

∴ ثمن المحاة = ٢٠٠ فلس
∴ ثمن القلم = ٢٥٠ فلس

المجموعة ب تمارين تحريرية

في التمرينين (١ – ٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية، محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١)
ص = ٣س – ٧
ص = ٢

–٣س + ص = –٧
ص = ٢

$\underset{\text{معاملات}}{\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}} \underset{\text{متغيرات}}{\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}} = \underset{\text{ثوابت}}{\begin{bmatrix} -٧ \\ ٢ \end{bmatrix}}$

ملاحظة حل رقم ١٢، ١٣، ١٤، ١٥ صـ٦٢ في الصفحة التي بعدها

حل

رقم (12) ص 61

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$ ، $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -10$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{0}{-5} = 0$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ ، م.ح = $\{(2 ، 0)\}$

رقم (13) ص 61

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 12$ ، $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 36$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 12$ ، م.ح = $\{(3 ، 1)\}$

رقم (14) ص 61 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$

، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = -6$ ، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = -2$

$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$ م.ح = $\{(3 ، 1)\}$

رقم (15) ص 61 باستخدام قاعدة كرامر (المحددات)

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 1500 & 2 \\ 2650 & 5 \end{vmatrix} = 2200$

، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 5 & 1500 \\ 7 & 2650 \end{vmatrix} = 2750$ ، $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{2200}{11} = 200$

، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{2750}{11} = 250$

ثمن الحقيبة = 200 فلس ، ثمن القلم = 250 فلس

(٢) س + ٢ص = ١١
٢س + ٣ص = ١٨

$$\begin{bmatrix}١١\\١٨\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢&١\\٣&٢\end{bmatrix}$$

في التمارين (٣–٥)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام المعادلات.

رقم ⑤

$$\begin{bmatrix}٥\\٦\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٣&٢\\٢&١\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}٨-\\٧\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٥\\٦\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٣-&٢\\٢&١-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}$$

∴ س = −٨ ، ص = ٧

(٣) ٣٠٠س − ص = ١٣٠
٢٠٠س + ص = ١٢٠

(٤) ٢س + ٣ص = ١٢
س + ٢ص = ٧

(٥) ٢س + ٣ص = ٥
س + ٢ص = ٦

رقم ⑥

$$\begin{bmatrix}٦\\٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٨\\١٠\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١-&٢\\١&١-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}$$

∴ س = ٦ ، ص = ٢

في التمارين (٦–٨)، حلّ المعادلة المصفوفية إن أمكن:

(٦) $\begin{bmatrix}٨\\١٠\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١&١\\٢&١\end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix}١\\٢-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٣-&٢\\٦&٤-\end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix}٣-&٢\\٦&٤-\end{vmatrix}=٠$ ∴ حل المعادلة غير ممكن

(٨) $\begin{bmatrix}١٠\\٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١&٢\\٣&٤\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}١٤\\١٨-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٠\\٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١-&٣\\٢&٤-\end{bmatrix}\frac{١}{٢}=\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}$$

∴ س = ١٤ ، ص = −١٨

في التمارين (٩–١٢)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(٩) ٥,٠س + ٥,١ص = ٧
٥,٢س − ٥,٣ص = −٩

(١٠) −٢,١س − ٣,٠ص = ١,٢
−٢,٠س + ٨,٠ص = ٦,٤

رقم ⑫

$\triangle = \begin{vmatrix}\frac{١}{٤}&\frac{١}{٢}\\ -\frac{٣}{٨}&\frac{١}{٤}\end{vmatrix} = -٠,٢٥$

(١١) $\frac{س}{٥}-\frac{٢ص}{٥}=٤$
$\frac{٢س}{٥}-\frac{٣ص}{٥}=٥$

(١٢) $\frac{س}{٢}+\frac{ص}{٤}=٤$
$\frac{س}{٤}-\frac{٣ص}{٨}=-٢$

$\triangle_س = \begin{vmatrix}\frac{١}{٤}&٤\\ -\frac{٣}{٨}&-٢\end{vmatrix} = -١$

$\triangle_ص = \begin{vmatrix}٤&\frac{١}{٢}\\ -٢&\frac{١}{٤}\end{vmatrix} = -٢$

$س = \frac{\triangle_س}{\triangle} = \frac{-١}{-٠,٢٥} = ٤$ ، $ص = \frac{\triangle_ص}{\triangle} = \frac{-٢}{-٠,٢٥} = ٨$

حل

رقم (٣٠) ص ٦٢

$$\begin{bmatrix}300 & -1\\ 200 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}130\\ 120\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\frac{1}{500}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -200 & 300\end{bmatrix}\begin{bmatrix}130\\ 120\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\frac{1}{500}\begin{bmatrix}250\\ 10000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\ 20\end{bmatrix}$$

$\text{س} = 0.5$ ، $\text{ص} = 20$

رقم (٤) ص ٦٢

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\text{س} = 3$ ، $\text{ص} = 2$

رقم (٩) ص ٦٢

$$\Delta=\begin{vmatrix}0.5 & 1.5\\ 2.5 & -3.5\end{vmatrix}=-5.5$$

$$\Delta_{\text{س}}=\begin{vmatrix}7 & 1.5\\ -9 & -3.5\end{vmatrix}=-11 \quad ، \quad \Delta_{\text{ص}}=\begin{vmatrix}0.5 & 7\\ 2.5 & -9\end{vmatrix}=-22$$

$$\text{س}=\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}=\frac{-11}{-5.5}=2 \quad ، \quad \text{ص}=\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}=\frac{-22}{-5.5}=4$$

رقم (١٠) ص ٦٢

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1.2 & -0.3\\ -0.2 & 0.8\end{vmatrix}=-1.02$$

$$\Delta_{\text{س}}=\begin{vmatrix}1.2 & -0.3\\ 4.6 & -0.8\end{vmatrix}=-3.06 \quad ، \quad \Delta_{\text{ص}}=\begin{vmatrix}-1.2 & 1.2\\ -0.2 & 4.6\end{vmatrix}=-5.1$$

$$\text{س}=\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}=\frac{-3.06}{-1.02}=3 \quad ، \quad \text{ص}=\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}=5$$

(١٣) يقوم أحد مصانع الدهانات بمزج الألوان مع بعضها بعضًا لإنتاج ألوان مميزة. إذا مزج جزئين من اللون الأحمر إلى ستة أجزاء من اللون الأصفر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون البرتقالي شبيه بلون فاكهة اليقطين. وإذا مزج خمسة أجزاء من اللون الأصفر مع ٣ أجزاء من اللون الأحمر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون الأحمر الداكن شبيه بلون الفلفل الأحمر. تباع صفيحة اللون البرتقالي بـ ٢٥ دينارًا وصفيحة اللون الأحمر الداكن بـ ٢٨ دينارًا، علمًا أن كل صفيحة تحتوي على ٨ أجزاء.

(أ) اكتب نظام معادلات يمثّل المسألة أعلاه.

نفرض ان سعر كل جزء من الدهان الأحمر = س ، سعر كل جزء من الدهان الأصفر = ص

$٢س + ٦ص = ٢٥$

$٣س + ٥ص = ٢٨$

(ب) حل النظام مستخدمًا قاعدة كرامر، استنتج سعر كلّ جزء من الدهان الأحمر وسعر كل جزء من الدهان الأصفر.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٨$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢٥ & ٦ \\ ٢٨ & ٥ \end{vmatrix} = -٤٣ \qquad س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٤٣}{-٨} = ٥٫٣٧٥$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢٥ \\ ٣ & ٢٨ \end{vmatrix} = -١٩ \qquad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-١٩}{-٨} = ٢٫٣٧٥$$

∴ سعر كل جزء من الدهان الأحمر = ٥٫٣٧٥ دينار

، سعر كل جزء من الدهان الأصفر = ٢٫٣٧٥ دينار

رقم (١١) ص ٦٢

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} \\ \frac{٢}{٥} & -\frac{٣}{٥} \end{vmatrix} = ٠٫٠٤ \qquad س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٠٫٤}{٠٫٠٤} = -١٠$$

$$، ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٠٫٦}{٠٫٠٤} = -١٥$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & -\frac{٢}{٥} \\ ٥ & -\frac{٣}{٥} \end{vmatrix} = -٠٫٤$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & ٤ \\ \frac{٢}{٥} & ٥ \end{vmatrix} = -٠٫٦$$

اختبار الوحدة السابعة

(١) يبيّن الجدول درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة في ست مناطق.

المنطقة	الدرجة العظمى	الدرجة الصغرى
١	٣٠°	-٣٧°
٢	٤٠°	-٣٣°
٣	٤٢°	-١٤°
٤	٣٧°	-١°
٥	٣٩°	-٢٨°
٦	٤٤°	-٢°

(أ) اعرض البيانات في مصفوفة (في كل صف الدرجة العظمى والدرجة الصغرى لمنطقة). ما أبعاد هذه المصفوفة؟

$$\begin{bmatrix} ٣٠ & -٣٧ \\ ٤٠ & -٣٣ \\ ٤٢ & -١٤ \\ ٣٧ & -١ \\ ٣٩ & -٢٨ \\ ٤٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة ٦ × ٢

(ب) حدّد $أ_{٢٤}$ $أ_{٤٢} = -١$

في التمرينين (٢–٣)، أوجد الناتج.

(٢) $\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٨ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ١٣ & ١٦ \\ ٢٤ & -٣ & ١٩ \\ ٩ & ١٠ & ٢٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٢ & ٧ & -١٨ \\ ٥ & ١٥ & ١١ \\ ١٢ & ١٤ & -١٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ & ٢٠ & -٢ \\ ٢٩ & ١٢ & ٣٠ \\ ١٩ & ٢٤ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٤ — ٧)، أوجد ناتج ضرب كل مما يأتي إن أمكن مع ذكر السبب وفي حالة عدم إمكانية الضرب اكتب "غير محدد".

(٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٥ \\ ١٢ & ٦ \\ ٥٢ & ١٨ \end{bmatrix}$

(٢×٢) (٢×٣)
متساويان

(٥) $-٣ \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ \\ -٤ & ٢١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٠ & -٩ \\ ١٢ & -٦٣ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٦ & ١٥ & ٩ \\ ٧ & ٢ & -٨ \\ ١ & -٨ & ٦٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٢ \\ ٨ & ٠ & -٥ \end{bmatrix}$

(٣×٢) (٣×٣)
غير متساويان
حاصل الضرب غير محدد

(٧) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢×٢) (٢×٢)
متساويان

في التمرينين (٨ — ٩)، أوجد محدد كل مصفوفة.

(٨) $\begin{bmatrix} -٧ & -٦ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$ $\Delta = (-٦ \times ٨) - (٥ \times -٧) = -١٣$

(٩) $\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ ٩ & -٢ \end{bmatrix}$ $\Delta = (١ \times ٩) - (-٢ \times -٥) = -١$

في التمرينين (١٠ — ١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة وإلّا فاكتب «لا يوجد».

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ $أ^{-١} = \frac{١}{٦} \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ -١٦ & -١٤ \end{bmatrix}$

Δ = صفر

∴ لا يوجد نظير ضربي

⑫ $س = \begin{bmatrix}-١ & -٤\\ ١ & ٣\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٣\\ ٢\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-١١\\ ٩\end{bmatrix}$

في التمارين (١٢–١٧)، حل في س.

(١٢) $\begin{bmatrix}٣ & ٤\\ -١ & -١\end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix}٣\\ ٢\end{bmatrix}$

⑬ $-س = \begin{bmatrix}٨ & ١\\ ١ & ٣\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٦ & ٢\\ -١ & ٤\end{bmatrix}$

$-س = \begin{bmatrix}٢ & -١\\ ٢ & -١\end{bmatrix}$

$\therefore س = \begin{bmatrix}-٢ & ١\\ -٢ & ١\end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix}٦ & ٢\\ -١ & ٤\end{bmatrix} - س = \begin{bmatrix}٨ & ١\\ ١ & ٣\end{bmatrix}$

(١٤) $س + \begin{bmatrix}١ & ٣ & ٦\\ -١ & ٢ & ١\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٨ & ١ & ٠\\ ١٤ & ٣ & -١\end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix}٨ & ١ & ٠\\ ١٤ & ٣ & -١\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}١ & ٢ & ٦\\ -١ & ٢ & ١\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٧ & -٢ & -٦\\ ١٥ & ١ & -٢\end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix}-٣ & -٢\\ ١ & ١\end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix}٨ & -١\\ ٦ & ٠\end{bmatrix}$

(١٦) $٤س + ٣\begin{bmatrix}٣ & ٢\\ ١ & -٢\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١٠ & ٨\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}$

رقم ⑰ $س = \frac{١}{٨}\begin{bmatrix}-٦ & ٢\\ ٨ & -٨\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{٣}{٤} & \frac{١}{٤}\\ ١ & -١\end{bmatrix}$

(١٧) $٢س = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix}-٦ & ٢\\ ٨ & -٨\end{bmatrix}$

(١٨) حل النظام: $\begin{cases} ٢س - ص = ٢ \\ ٢س - ٢ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا النظير الضربي.

(١٩) حل النظام: $\begin{cases} -٣س + ٥ص = -٤ \\ س - ٣ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا طريقة كرامر.

(٢٠) اكتب مصفوفتين أ، ب كل منهما من الرتبة ٢ × ٢. أثبت أن ضرب المصفوفات هو غير إبدالي.

(٢١) هل كل مصفوفة مما يلي هي النظير الضربي للأخرى؟

$\begin{bmatrix}٢ & -١\\ -٣ & ١\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}-١ & -١\\ -٣ & -٢\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}٢ & -١\\ -٣ & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-١ & -١\\ -٣ & -٢\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى

(٢٢) اشتريت ١٠ قرنفلات و ٥ أقحوانات بمبلغ ١٢,٥٠٠ دينارًا. وبعد ظهر اليوم نفسه اشتريت ٥ قرنفلات و ٨ أقحوانات بمبلغ ١١,٧٥٠ دينارًا. فما سعر القرنفلة الواحدة والأقحوانة الواحدة باستخدام المصفوفات؟

$١٠س + ٥ص = ١٢,٥٠٠$

$٥س + ٨ص = ١١,٧٥٠$

$\begin{bmatrix}١٠ & ٥\\ ٥ & ٨\end{bmatrix}\begin{bmatrix}س\\ ص\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١٢,٥٠٠\\ ١١,٧٥٠\end{bmatrix}$

انظر كتابي

رقم (١٥) ص ٦٦

$\text{س} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}20 & -1\\ -26 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & 1\\ 26 & -1\end{bmatrix}$

رقم (١٦) ص ٦٦

$4\,\text{س} + \begin{bmatrix}9 & 6\\ 3 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 8\\ 5 & -2\end{bmatrix}$

$4\,\text{س} = \begin{bmatrix}10 & 8\\ 5 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}9 & 6\\ 3 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$

رقم (١٨) ص ٦٦

$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}$ ∴ س = ٠ ، ص = -٢

رقم (١٩) ص ٦٦

$\Delta = \begin{vmatrix}-3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix} = 4$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix}-4 & 5\\ 4 & -3\end{vmatrix} = -8$

، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix}-3 & -4\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -8$ ∴ $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2$

رقم (٢٠) ص ٦٦

$\text{أ} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

$\text{ب} \times \text{أ} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ∴ $\text{أ} \times \text{ب} \neq \text{ب} \times \text{أ}$

رقم (٢٢) ص ٦٦
بالمثل

$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix} = \frac{1}{55}\begin{bmatrix}8 & -5\\ -5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12{,}500\\ 11{,}750\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}750\\ 1\end{bmatrix}$ ∴ س = ٠٫٧٥٠ ، ص = ١

∴ سعر القرنفلة = ٠٫٧٥٠ دينار ، سعر الأقحوانة = ١ دينار

تمارين إثرائية

(١) لنعتبر أ = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

|أ| = ٤ يوجد نظير ضربي لـ أ

|ب| = ١ " " ضربي لـ ب

أ + ب = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

(أ) هل للمصفوفات: أ، ب، أ + ب نظير ضربي؟

$\Delta_{أ+ب}$ = ٤ يوجد نظير ضربي لـ أ+ب

(ب) أوجد $أ^{-1}$، $ب^{-1}$، $(أ + ب)^{-1}$.

$أ^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $ب^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $(أ+ب)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(جـ) وضّح ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ذات نظير ضربي، أ + ب هي مصفوفة ذات نظير ضربي فإن

$(أ + ب)^{-1} = أ^{-1} + ب^{-1}$. $أ^{-1} + ب^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ∴ العبارة خطأ

(د) أعطِ مثلًا عن مصفوفتين ذات نظير ضربي شرط ألا يكون لمصفوفة مجموعهما نظيرًا ضربيًا.

أ + ب = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

المصفوفتان أ، ب لها نظير ضربي أما المصفوفة (أ + ب) ليس لها نظير ضربي

(٢) لنعتبر أ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(أ) أوجد أ + ب، ثمّ $(أ + ب)^2$. أ + ب = $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

$(أ + ب)^2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 \\ 3 & 36 \end{bmatrix}$

(ب) أوجد $أ^2$، أ × ب ، $ب^2$ ثمّ $أ^2 + 2أ × ب + ب^2$. قارن بين إجابتيك في (ب) ، (أ).

$أ^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$ ، أ × ب = $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$

$ب^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$أ^2 + 2أ × ب + ب^2 = \begin{bmatrix} 46 & 13 \\ 24 & 39 \end{bmatrix}$

$(أ + ب)^2 \neq أ^2 + 2أ × ب + ب^2$

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$$

(جـ) طبّق الخطوتين (أ)، (ب) باستخدام ب = $\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$.

$$(أ + ب)^٢ = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$أ^٢ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix} ، \quad ب^٢ = \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢ & -٤ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ١ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$أ^٢ + ٢ \times أ \times ب + ب^٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١٤ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٢ & -٤ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$$

$\therefore (أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ \times أ \times ب + ب^٢$

(٣) إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر ربيع من مثلي عمر جاد نحصل على ٥. أمّا إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر جاد من خمسة أمثال عمر ربيع نحصل على −٢.

(أ) مثّل المسألة أعلاه على شكل نظام معادلتين من متغيرين.

نفرض أن عمر جاد = س ، عمر ربيع = ص

٢س − ٣ص = ٥

٥ص − ٣س = −٢

٣س − ٥ص = ٢

(ب) اكتب نظام معادلات على شكل معادلة مصفوفية: أ× س = ب ،

حيث أ هي مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢، س = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، ب من الرتبة ٢ × ١.

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

(جـ) أوجد محدد المصفوفة أ. هل للمصفوفة أ نظير ضربي؟ إذا كان لها نظيرًا ضربيًّا فأوجد $أ^{-١}$.

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١٠ + ٩ = -١ \neq ٠$$

يوجد نظير ضربي

$$أ^{-١} = \frac{١}{-١}\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

(د) أوجد قيم س، ص باستخدام $أ^{-١}$.

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

∴ س = ١٩ ، ص = ١١

∴ عمر جاد = ١٩ ، عمر ربيع = ١١

(هـ) حل نظام معادلات مستخدمًا قاعدة كرامر.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١ ، \quad \Delta_س = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = -١٩ ، \quad \Delta_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = -١١$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = ١٩ ، \quad ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = ١١$$

(٤) لنأخذ المصفوفات التالية:

$\text{و} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{أ}^٢$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(أ) احسب $\text{أ}^٢$، $\text{أ}^٣$.

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{أ} \times \text{أ}^٢ = \text{أ}^٣$$

(ب) لكل عدد حقيقي س، نعتبر المصفوفة م(س)، حيث إن:

$\text{م}(\text{س}) = \text{و} + \text{س}\,\text{أ} + \frac{\text{س}^٢}{٢} \times (\text{أ}^٢)$.

١. احسب: م(٠)، م(٤).

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = (\text{أ}^٢)\frac{٠}{٢} + \text{أ}\,٠ + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{م}(٠)$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٤ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{م}(٤)$$

٢. س ، ص عددان حقيقيان، احسب م(س) × م(ص).

$$\begin{bmatrix} \frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{س}\,\text{ص} + \frac{\text{ص}^٢}{٢} & \text{س} + \text{ص} & ١ \\ \text{س} + \text{ص} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ص}^٢}{٢} & \text{ص} & ١ \\ \text{ص} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\text{س}^٢}{٢} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{م}(\text{س}) \times \text{م}(\text{ص})$$

٣. برهن أنّ: م(س) × م(ص) = م(س + ص).

$$\text{م}(\text{س}+\text{ص}) = \text{م}(\text{ص}) \times \text{م}(\text{س}) \therefore \quad \begin{bmatrix} \frac{(\text{س}+\text{ص})^٢}{٢} & \text{س}+\text{ص} & ١ \\ \text{س}+\text{ص} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{م}(\text{س}+\text{ص})$$

(جـ) تحقق من أنّ: $\text{م}(\text{س}) = \begin{bmatrix} \frac{\text{س}^٢}{٢} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٠ & \text{س} & ٠ \\ \text{س} & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{م}(\text{س})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\text{س}^٢}{٢} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{س}^٢}{٢} & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} +$$

(٥) التفكير الناقد: لتكن $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$. ما هي قيم العناصر أ، ب، جـ، د عندما يكون النظير الضربي للمصفوفة أ هو أ ؟ (مساعدة: هناك أكثر من إجابة صحيحة واحدة).

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}\frac{١}{-١} = \text{أ}^{-١} \qquad \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} = \text{أ}$$