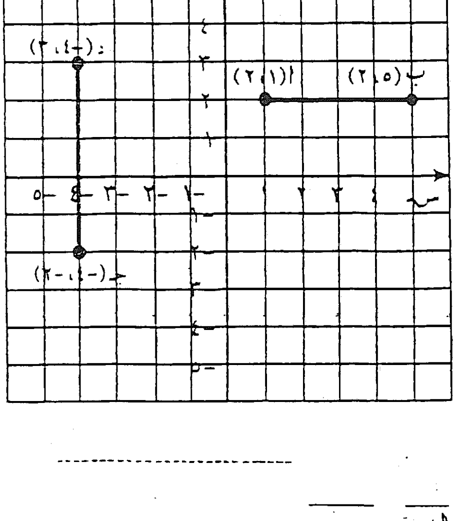
الوحدة التاسعة — الهندسة التحليلية

(٩ - ١) المستوى الإحداثي

المسافة بين نقطتين



في المخطط إلى اليسار، $\overline{\text{أب}}$ موازية للمحور السيني (قطعة أفقية). يمكنك إيجاد طولها بطرح الإحداثي السيني للنقطة أ من الإحداثي السيني للنقطة ب.

طول $\overline{\text{أب}}$ = |٥ - ١| = ٤ وحدة طول.

وبالطريقة نفسها، يمكنك إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$ قطعة موازية للمحور الصادي (قطعة رأسية) وذلك بطرح الإحداثي الصادي للنقطة جـ من الإحداثي الصادي للنقطة د.

طول $\overline{\text{جـ د}}$ = |٣ - (-٢)| = ٥ وحدة طول.

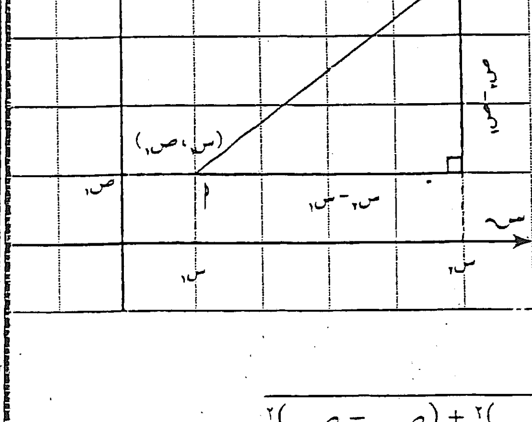
حاول أن تحل ص ١٢٩

١) إذا كانت أ(٢، ٥)، ب(١٠، ٥)، جـ(٢، ٦)، فأوجد أطوال كل من: $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

أ ب = |١٠ - ٢| = ٨ وحدة طول

أ جـ = |٥ - ٦| = ١ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{٨^٢ + ١^٢}$ = $\sqrt{٦٥}$ وحدة طول



أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانيًا وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).

نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين أ، ب.

(أب)^٢ = (أجـ)^٢ + (ب جـ)^٢ نظرية فيثاغورث

(أب)^٢ = (س$_٢$ - س$_١$)^٢ + (ص$_٢$ - ص$_١$)^٢ التعويض

أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ الجذر التربيعي الأساسي

قانون:

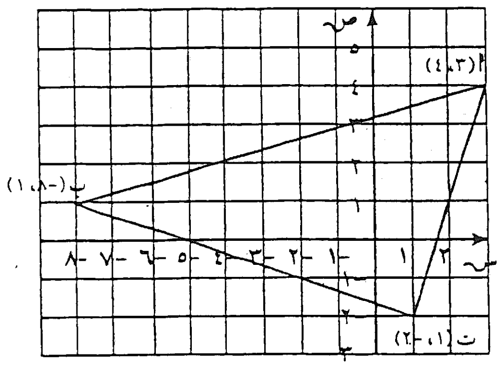
المسافة بين أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) تساوي $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

حاول أن تحل ص ١٢٩

❷ أوجد المسافة بين م(−٢، ١)، ن(−٧، ٤). قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة

الحل: م ن $= \sqrt{(-٧-(-٢))^{٢} + (٤-١)^{٢}}$

$= \sqrt{٣٤} \simeq ٥٫٨$ وحدة طول



حاول أن تحل ص ١٣٠

٣ ❶ في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب ت.

❷ أثبت أن Δ أ ب ت قائم الزاوية.

الحل: أ (٣، ٤) ، ب (−٨، ١) ، ت (١، −٢)

أ ب $= \sqrt{(-٨-٣)^{٢} + (١-٤)^{٢}} = \sqrt{١٣٠} \simeq ١١٫٤$ وحدة طول

أ ت $= \sqrt{(١-٣)^{٢} + (-٢-٤)^{٢}} = \sqrt{٤٠} \simeq ٦٫٣$ وحدة طول

ب ت $= \sqrt{(١+٨)^{٢} + (-٢-١)^{٢}} = \sqrt{٩٠} \simeq ٩٫٥$ وحدة طول

$(\text{أ ب})^{٢} = (\text{أ ت})^{٢} + (\text{ب ت})^{٢}$

∴ Δ أ ب ت قائم الزاوية

نقطة المنتصف

إذا كانت أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$

فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م (س ، ص)

حيث $س = \frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $ص = \frac{ص_1 + ص_2}{2}$

حاول أن تحل ص ١٣١

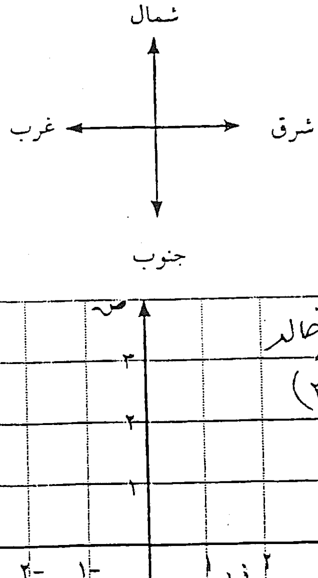
٤ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$ حيث ك (−٣، −١)، ل (٥، ٢).

الحل $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-3 + 5}{2} ، \frac{-1 + 2}{2}\right) = (1 ، 0.5)$

حاول أن تحل ص ١٣١

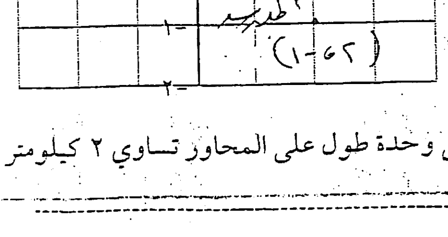
٥ إذا كان $\overline{أب}$ هو قطر دائرة، حيث: أ(−٤، ٧)، ب(−٨، −٢). فأوجد مركز الدائرة.



مركز الدائرة م $= \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-4 - 8}{2} ، \frac{7 - 2}{2}\right)$

$= (-6 ، 2.5)$



حاول أن تحل ص ١٣٢

٦ تقع المدرسة في الموقع ٢ شرق، ١ جنوب ويقع منزل خالد ٣ شرق، ٣ شمال. عيّن على المستوى الإحداثي موقع المدرسة وموقع منزل خالد، ثم أوجد المسافة من منزل خالد إلى المدرسة.

كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كيلومتر

ملاحظة: الموقع ٣ شرق، ٢ شمال يعني (+٣، ٢).

الحل

المسافة $= \sqrt{(3-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17} \simeq 4.12$ وحدة طول

$\simeq 8.24$ كيلومتر

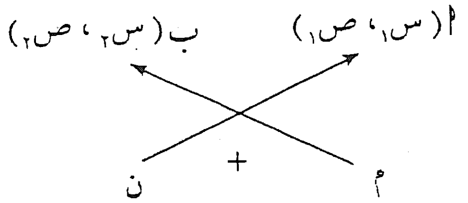
(٩ - ٢) تقسيم قطعة مستقيمة

١- التقسيم من الداخل

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (س١، ص١)،
ب (س٢، ص٢) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م : ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س، ص) فإن:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_{2} + \text{ن س}_{1}}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_{2} + \text{ن ص}_{1}}{\text{م} + \text{ن}}$$

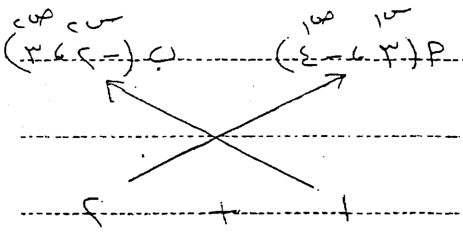


حاول أن تحل ص ١٣٥

١ إذا كان أ (٣، -٤)، ب (-٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أجـ = جـ ب ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$.

إرشاد: أجـ : جـ ب = ١ : ٢

الحل



$$\text{س} = \frac{1 \times (-2) + 2 \times 3}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

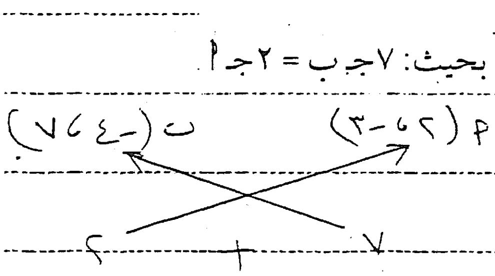
$$\text{ص} = \frac{1 \times 3 + 2 \times -4}{1 + 2} = \frac{-5}{3}$$

نقطة التقسيم هي جـ $\left(\frac{4}{3} ، \frac{-5}{3}\right)$

حاول أن تحل ص ١٣٥

٢ لتكن أ (٢، -٣)، ب (-٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ

الحل



جـ أ : جـ ب = ٧ : ٢

$$\text{س} = \frac{7 \times -4 + 2 \times 2}{7 + 2} = \frac{-8}{3} ، \quad \text{ص} = \frac{7 \times 7 + 2 \times -3}{7 + 2} = \frac{43}{9}$$

نقطة التقسيم جـ $\left(\frac{-8}{3} ، \frac{43}{9}\right)$

حاول أن تحل ص ١٣٦

٣ في المثال (٣)، يقع منزل صالح على المستقيم المار بمنزلي سلطان وفهد وهو يقسم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٤:٥. أوجد إحداثيات منزل صالح.

أ(٥، ٤) ب(٢، -٣)

٥ + ٤

الحل

$$س = \frac{٤ \times ٢ + ٥ \times ٥}{٤ + ٥} = \frac{١١}{٣}$$

$$ص = \frac{٤ \times -٣ + ٥ \times ٤}{٤ + ٥} = \frac{٨}{٩}$$

نقطة احداثيات منزل صالح هي $(\frac{١١}{٣} ، \frac{٨}{٩})$

---

٢ – التقسيم من الخارج

إذا كانت أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) فإن النقطة جـ(س، ص) التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ن: م من جهة ب تكون إحداثياتها:

أ (س$_١$، ص$_١$) ب (س$_٢$، ص$_٢$)

م − ن

$$س = \frac{م س_٢ - ن س_١}{م - ن}$$

$$ص = \frac{م ص_٢ - ن ص_١}{م - ن}$$

تدريب ص ١٣٨

أوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ١ : ٤ من جهة أ.
حيث أ(١، ٢)، ب(٤، ٨).

أ(١، ٢) ب(٤، ٨)

٤ ١

الحل

$$س = \frac{١ \times ٤ - ٤ \times ١}{١ - ٤} = ٠$$

$$ص = \frac{١ \times ٨ - ٤ \times ٢}{١ - ٤} = ٠$$

نقطة التقسيم من الخارج هي (٠، ٠)

حاول أن تحل ص ١٣٨

٤ لتكن أ(-٢، ٢)، ب(٣، ١). أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة ب بنسبة ٣ : ٨ .

الحل

أ(-٢، ٢) ب(٣، ١)

٨ − ٣

$$س = \frac{٣ \times -٢ - ٨ \times ٣}{٣ - ٨} = ٦$$

$$ص = \frac{٣ \times ٢ - ٨ \times ١}{٣ - ٨} = \frac{٢}{٥}$$

∴ نقطة التقسيم جـ = $\left(٦ ، \frac{٢}{٥}\right)$

حاول أن تحل ص ١٣٩

٥ (أ) في المثال (٥)، أوجد نسبة التقسيم: $\dfrac{\text{مسافة (شمس، قمر)}}{\text{مسافة (شمس، أرض)}}$.

(ب) إذا افترضنا أن إحداثيات الأرض هي (٧، ١١). فما هي إحداثيات القمر؟

الحل: المسافة بين الأرض والقمر = ٣٨٤٠٠٠ كم

" " الأرض والشمس = ١٤٩٦٠٠٠٠٠ كم

المسافة بين الشمس والقمر = ١٤٩٢١٦٠٠٠ كم

(أ) $\text{نسبة التقسيم} = \dfrac{\text{مسافة (شمس، قمر)}}{\text{مسافة (شمس، أرض)}} = \dfrac{١٤٩٢١٦٠٠٠}{١٤٩٦٠٠٠٠٠} = \dfrac{٤٦٦٣}{٤٦٧٥}$

(ب) القمر تقسم المسافة بين الأرض والشمس   الأرض (٧، ١١)   الشمس (٠، ٠)

بنسبة $\dfrac{١٢}{٤٦٦٣}$ من الداخل

٤٦٦٣ + ١٢

$$س = \frac{٧ \times ٤٦٦٣ + ٠ \times ١٢}{٤٦٦٣ + ١٢} = ٦٫٩٨$$

$$ص = \frac{١١ \times ٤٦٦٣ + ٠ \times ١٢}{٤٦٦٣ + ١٢} = ١٠٫٩٧$$

أي أن إحداثيات القمر هي تقريباً (٦٫٩٨ ، ١٠٫٩٧)

(٩-٣) (٤) ميل الخط المستقيم

Rate of Change

معدل التغير

في المخطط أعلاه، أب، ب جـ لهما معدلا تغيّر مختلفان. يسمح معدل التغير بمتابعة العلاقة بين كميتين تتغيران باستمرار. يكون ما يلي صحيحًا إذا ارتبطت إحدى الكميتين بالأخرى فإن:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$$

> **معلومة رياضية:**
> المعدل هو مقارنة بين كميتين بوحدات قياس مختلفة.

مثال (١)

باستخدام البيانات في الجدول أدناه أوجد معدل التغير. هل معدل التغير لكل يومين متتاليين هو نفسه؟

عدد الأيام	كلفة تأجير الحاسوب
١	٦ دنانير
٢	٧,٥ دنانير
٣	٩ دنانير
[illegible]	١٠,٥ دنانير
٥	١٢ دينارًا

الحل:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في الكلفة}}{\text{التغير في عدد الأيام}}$$

ترتبط الكلفة بعدد الأيام

$$\frac{٧,٥ - ٦}{٢ - ١} = \frac{١,٥}{١} \qquad \frac{٩ - ٧,٥}{٣ - ٢} = \frac{١,٥}{١}$$

$$\frac{١٠,٥ - ٩}{٤ - ٣} = \frac{١,٥}{١} \qquad \frac{١٢ - ١٠,٥}{٥ - ٤} = \frac{١,٥}{١}$$

معدل التغير لكل يومين متتاليين هو $\frac{١,٥}{١}$

وبالتالي، معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول.

∴ كلفة تأجير الحاسوب تزداد ٥ , ١ دينار لكل يوم بعد اليوم الأوّل.

> **تذكر:**
> معدل التغير يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا أو صفرًا.

حاول أن تحل

أ) أوجد معدل التغير مستخدمًا اليوم الخامس واليوم الثاني.

ب) تفكير ناقد: هل إيجاد معدل التغير لزوج واحد من الأيام المتتالية يعني أن معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول؟ فسّر إجابتك.

أ) معدل التغير = $\frac{١٢ - ٧,٥}{٥ - ٢} = \frac{١,٥}{١}$

ب) لا لأن معدل التغير يعني ارتباط احدى الكميتين بالأخرى وهذا لا يكفي ايجاد معدل التغير لزوج واحد

إيجاد الميل

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}\ ،\ س_٢ - س_١ \neq ٠$$

حاول أن تحل ص ١٤٢

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

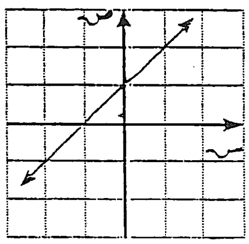
أ جـ(٢، ٥)، د(٤، ٧)   ب ق(-١، ٤)، ك(٣، -٢)   جـ م(٤، ٣)، ن(-٧، ٣)

الحل

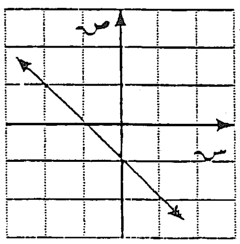
ميل $\overleftrightarrow{جـ د} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٥}{٤ - ٢} = ١$

ميل $\overleftrightarrow{ق ك} = \frac{-٢ - ٤}{٣ + ١} = \frac{-٣}{٢}$

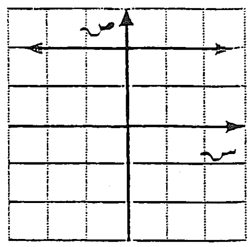
ميل $\overleftrightarrow{م ن} = \frac{٣ - ٣}{-٧ - ٤} = ٠$



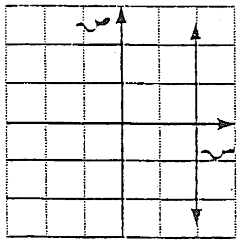
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

حاول أن تحل ص ١٤٣

٣ أثبت أن النقاط أ(٢، -١) ، ب(-١، ٥) ، جـ(٣، -٣) على استقامة واحدة.

الحل

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{5 + 1}{-1 - 2} = -2$

ميل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{-3 + 1}{3 - 2} = -2$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$

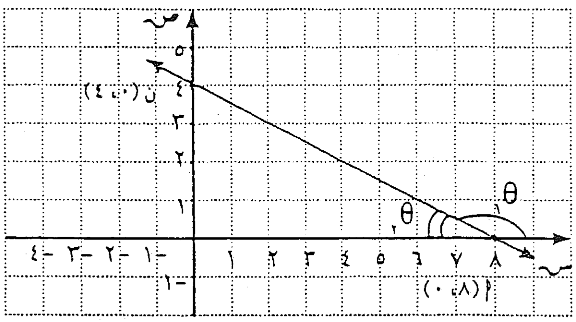
∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ

∴ النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي: م = ظا θ.

حاول أن تحل ص ١٤٤

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها θ_2 وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها θ_1



الحل

ميل $\overleftrightarrow{\text{أن}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{4 - 0}{0 - 8} = -\frac{1}{2}$

ظا $\theta_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ظا θ_1 = ظا$(180 - \theta_2)$ = − ظا $\theta_2 = -\frac{1}{2}$

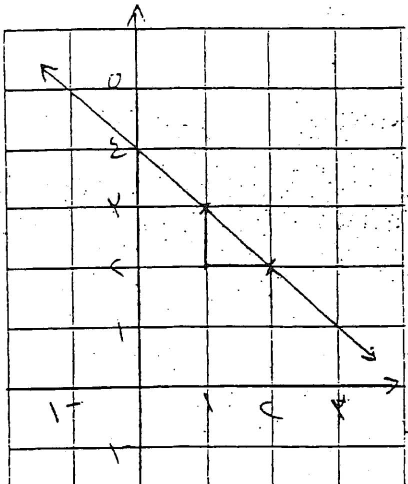
حاول أن تحل ص ١٤٥

٥ ارسم المستقيمات التالية بمعلومية نقطة من كل مستقيم وميله:

أ (١، ٣)، الميل = -١.

ب (١، ٢)، الميل = $\frac{٣}{٢}$.

ج (-٢، ٣)، الميل = $-\frac{٥}{٢}$.

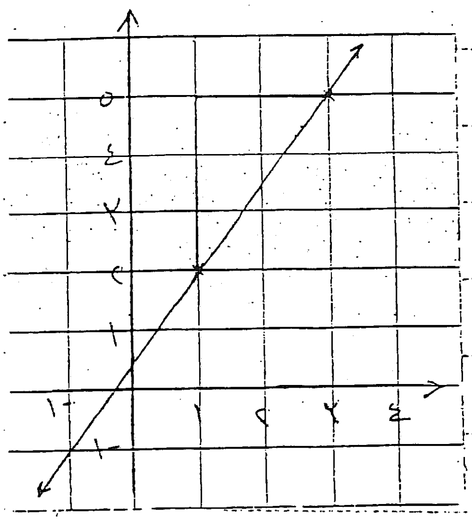


الحل أ الميل = $-١ = \frac{-١}{١}$

التغير الرأسي = -١

التغير الأفقي = ١

نبدأ بالنقطة (١، ٣) ونتحرك وحدة لأسفل ووحدة لليمين

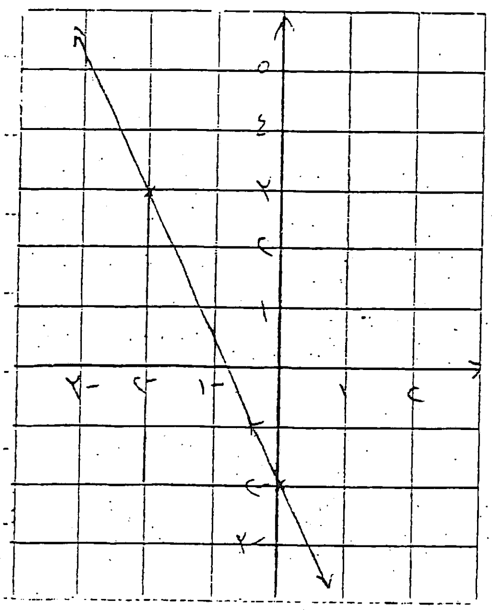


ب الميل = $\frac{٣}{٢}$

التغير الرأسي = ٣

التغير الأفقي = ٢

نبدأ بالنقطة (١، ٢) ونتحرك ٣ وحدات لأعلى ووحدتين لليمين



ج الميل = $\frac{-٥}{٢}$

التغير الرأسي = -٥

التغير الأفقي = ٢

نبدأ بالنقطة (-٢، ٣) ونتحرك ٥ وحدات لأسفل ووحدتين لليمين

(٩ - ٣) (ب) معادلة الخط المستقيم

لكتابة معادلة خط مستقيم نحن بحاجة إلى معرفة:

- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن $(س_{1}، ص_{1})$.

تكون معادلة المستقيم: $ص - ص_{1} = م(س - س_{1})$.

حاول أن تحل ص ١٤٦

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

الحل

$ص - ص_{1} = م(س - س_{1})$

$ص - ٥ = \frac{-٣}{٢}(س + ٦)$

$ص - ٥ = \frac{-٣}{٢}س - ٩$

$ص = \frac{-٣}{٢}س - ٩ + ٥$

$ص = \frac{-٣}{٢}س - ٤$

حاول أن تحل ص ١٤٧

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ج(٣، −١)، د(٢، −٢).

الحل $م = \frac{ص_{2} - ص_{1}}{س_{2} - س_{1}} = \frac{-٢ + ١}{٢ - ٣} = ١$

المعادلة $ص - ص_{1} = م(س - س_{1})$

$ص + ١ = ١ \times (س - ٣)$

$ص + ١ = س - ٣$

$ص = س - ٤$

حاول أن تحل ص ١٤٨

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم أ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

الحل
٣ص = −س − ٣

ص = $\frac{-1}{3}$ س − ١

ميل المستقيم ك = $\frac{-1}{3}$

أ) ∵ المستقيمان ك، أ متوازيان

∴ ميل المستقيم أ = $\frac{-1}{3}$

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٢ = $\frac{-1}{3}$ (س + ٣)

ص − ٢ = $\frac{-1}{3}$ س − ١

ص = $\frac{-1}{3}$ س + ١

ب) المستقيمان ك، ز متعامدان

∴ ميل المستقيم ز = ٣

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٤ = ٣ (س − ١)

ص − ٤ = ٣س − ٣

ص = ٣س + ١

حاول أن تحل ص ١٤٩

س	ص
-١١	-٧
-١	-٣
٤	-١
١٩	٥

٤ هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في جدول البيانات المرسوم؟ في حال وجود تلك العلاقة، اكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات .

$$\frac{-٣+٧}{-١+١١} = \frac{٢}{٥}$$

$$\frac{-١+٣}{٤+١} = \frac{٢}{٥}$$

$$\frac{٥+١}{١٩-٤} = \frac{٢}{٥}$$

معدل التغير $\frac{٢}{٥}$ ∴ $م = \frac{٢}{٥}$

$ص - ٥ = \frac{٢}{٥}(س - ١٩)$

$ص - ٥ = \frac{٢}{٥}س - \frac{٣٨}{٥}$

$ص = \frac{٢}{٥}س - \frac{١٣}{٥}$

حاول أن تحل ص ١٥٠

٥ في المثال (٥)، ما عدد ساعات استهلاك الطاقة كي تكون النسبة المئوية للطاقة المتبقية في البطارية تساوي ٧٠٪؟

٦ جاءت نتائج تمدد شريط زنبركي بالسنتيمتر بحسب الأوزان المعلقة عليه كما يبين الجدول التالي:

الوزن س (كيلوجرام)	٢	٤	٥	٧	١٠
التمدد ص (سنتيمتر)	٨	١١	١٢,٥	١٥,٥	٢٠

هل العلاقة بين الوزن والتمدد يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

الحل ٥ ص = -٢ر٠ س + ١

ص = ٧ر٠ ٧ر٠ = -٢ر٠ س + ١

-٢ر٠ س = ١ - ٧ر٠ = ٣ر٠

س = ٥ر١ أي ساعة ونصف

٦) نوجد معدل التغير $\frac{٤-٢}{١١-٨} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{٥-٤}{١٢{,}٥-١١} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٧-٥}{١٥{,}٥-١٢{,}٥} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{١٠-٧}{٢٠-١٥{,}٥} = \frac{٢}{٣}$ ∴ معدل التغير ثابت $م = \frac{٢}{٣}$

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٨ = \frac{٢}{٣}(س - ٢)$

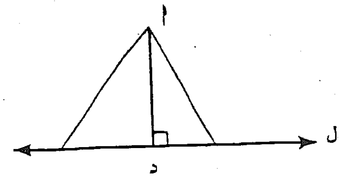
$ص - ٨ = \frac{٢}{٣}س - \frac{٤}{٣}$

$ص = \frac{٢}{٣}س + \frac{٢٠}{٣}$

(٩ - ٤) البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: ا س + ب ص + جـ = ٠ ، فإن البعد ف بين النقطة د (س $_1$ ، ص $_1$) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $\text{ف} = \dfrac{|\text{ا س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$.

ملاحظة:
أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.



ا د هي أقصر مسافة بين النقطة ا والمستقيم ل.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

حاول أن تحل ص ١٥١

١ أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

الحل: ص = −س + ٣

س + ص − ٣ = ٠

ا = ١ ، ب = ١ ، جـ = −٣

س $_1$ = ٢ ، ص $_1$ = ٥

البعد ف = $\dfrac{|\text{ا س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} = \dfrac{|١ \times ٢ + ١ \times ٥ - ٣|}{\sqrt{١^2 + ١^2}}$

$= \dfrac{٤}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

حاول أن تحل ص ١٥٢

٢ أوجد البعد من النقطة ط(٣، −٤) إلى المستقيم ل: ص = $-\dfrac{٤}{٣} + \dfrac{\text{س}}{٦}$

الحل: ص = $-\dfrac{٤}{٣} + \dfrac{\text{س}}{٦}$ ×٦

٦ص = −٨ + س

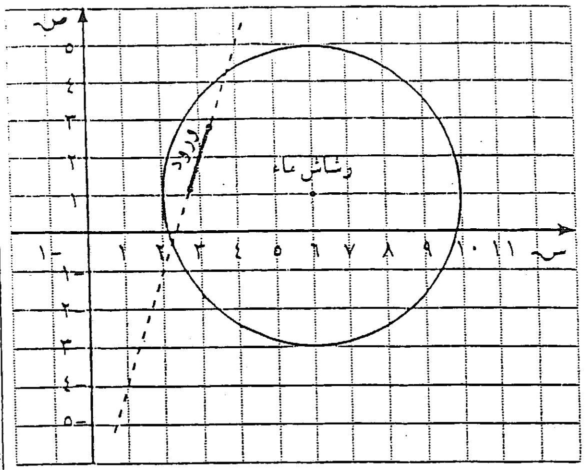
س − ٦ص − ٨ = ٠

ا = ١ ، ب = −٦ ، جـ = −٨ ، س $_1$ = ٣ ، ص $_1$ = −٤

البعد ف = $\dfrac{|\text{ا س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} = \dfrac{|١ \times ٣ - ٦ \times -٤ - ٨|}{\sqrt{١^2 + (-٦)^2}}$

$= \dfrac{١٩}{\sqrt{٣٧}} = ٣,١٢$ وحدة طول

حاول أن تحل ص ١٥٣



٣ تمّ زرع مجموعة ورود في حديقة على خط مستقيم (كما في الشكل المقابل) معادلته على الصورة: ص − ٣س + ٧ = ٠.

بالقرب من الورود رشاش ماء دوّار إحداثياته (٦ ، ١) ومداه الأقصى ٤ أمتار. فهل تصل مياهه إلى الورود؟

الحل

−٣س + ص + ٧ = ٠

أ = −٣ ، ب = ١ ، جـ = ٧

س١ = ٦ ، ص١ = ١

البعد ف = $\frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٣ \times ٦ + ١ \times ١ + ٧|}{\sqrt{(-٣)^٢ + ١^٢}}$

$= \frac{١٠}{\sqrt{١٠}} = \sqrt{١٠}$

≃ ٣,١٦ متر

نعم ستصل مياه رشاش الماء إلى الورود

(٩ - ٥) معادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

* معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) وطول نصف قطرها نق هي

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

* معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق هي

$س^2 + ص^2 = نق^2$

حاول أن تحل ص ١٥٤

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، -٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

الحل

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$(س - ٥)^2 + (ص + ٣)^2 = ٥^2$

حاول أن تحل ص ١٥٥

٢ أوجد معادلة دائرة مركزها م (٤، -٤) وتمس كل من محور السينات ومحور الصادات.

الحل

$نق = |٤| = ٤$

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$(س - ٤)^2 + (ص + ٤)^2 = ١٦$

حاول أن تحل ص ١٥٥

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.

الحل

$س^2 + ص^2 = نق^2$

$س^2 + ص^2 = ٣٦$

حاول أن تحل ص ١٥٦

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات.

الحل: نق = ٣

المعادلة: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$(س - ٣)^2 + (ص - ٤)^2 = ٩$

حاول أن تحل ص ١٥٦

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

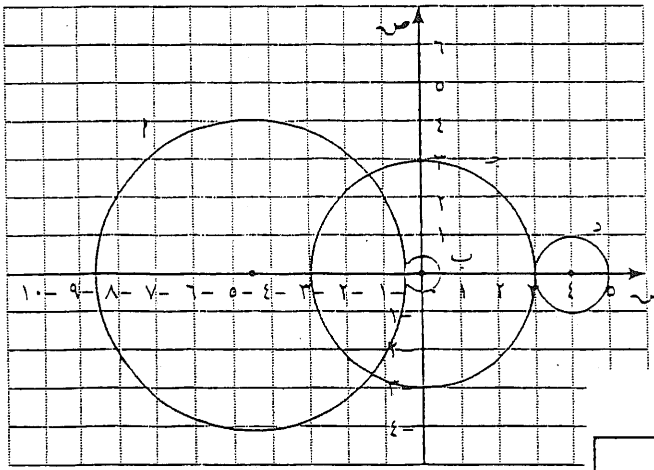
أ $س^2 + ص^2 = ٤٩$.

ب $(س - ٤)^2 + (ص + ٥)^2 = ٣٦$.

الحل: أ المركز: نقطة الأصل ، نق = ٧

ب المركز (٤ ، −٥) ، نق = ٦

تدريب (١) ص ١٥٧



من الشكل أكمل الجدول التالي:

دوائر التروس	(د، هـ)	طول نق	المعادلة
أ	(−٥ ,٤ ، ٠)	٤	$(س + ٥و٤)^2 + ص^2 = ١٦$
ب	(٠ ، ٠)	$\frac{١}{٢}$	$س^2 + ص^2 = \frac{١}{٤}$
جـ	(٠ ، ٠)	٣	$س^2 + ص^2 = ٩$
د	(٤ ، ٠)	١	$(س - ٤)^2 + ص^2 = ١$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = 0$ حيث ل، ك، ب ثوابت

مركزها $\left(\frac{-ل}{2}, \frac{-ك}{2}\right)$

وطول نصف قطرها $نق = \frac{1}{2}\sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب}$

الصورة العامة: $س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = 0$ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

1. إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.
2. معامل $س^2$ = معامل $ص^2$.
3. لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

حاول أن تحل ص ١٥٨

6. عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $2س^2 + 2ص^2 - 12س - 4ص - 30 = 0$

الحل: $س^2 + ص^2 - 6س - 2ص - 15 = 0$ بالقسمة على 2

$ل = -6$ ، $ك = -2$ ، $ب = -15$

المركز $= \left(\frac{-ل}{2}, \frac{-ك}{2}\right) = (3, 1)$

$نق = \frac{1}{2}\sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 4 \times (-15)} = 5$ وحدة طول

حاول أن تحل ص ١٥٩

7. هل يمكن رسم الدائرة التي معادلتها: $س^2 + ص^2 - 10س - 12ص - 60 = 0$ على ورقة (A_4) أبعادها 21 سم × 29,7 سم؟

الحل: $ل = -10$ ، $ك = -12$ ، $ب = -60$

$نق = \frac{1}{2}\sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب} = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 144 - 4 \times (-60)} = 11$ سم

طول القطر $= 2 نق = 22$ سم

لا يمكن رسم الدائرة لأن أحد بعدي الورقة 21 سم فقط

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠
يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًا هذه المعادلة بمجرد مقارنة
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب مع الصفر.

١ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب < ٠ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

٢ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٠ فإن المعادلة تمثل نقطة.

٣ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠ فإن المعادلة تمثل دائرة.

حاول أن تحل ص ١٦١

٨ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠

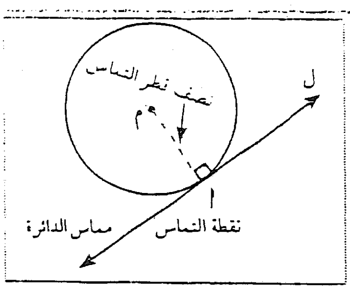
ب س^{٢} + ص^{٢} + ٥س − ٦ص − ٤ = ٠

ج س^{٢} + ص^{٢} − ٢س − ٢ص + ٢ = ٠

الحل (أ) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = −٤ ، ك = ٧ ، ب = ١٧
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ١٦ + ٤٩ − ٤ × ١٧ = −٣ < ٠
∴ المعادلة لا تمثل دائرة

(ب) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = ٥ ، ك = −٦ ، ب = −٤
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٢٥ + ٣٦ − ٤ × −٤ = ٧٧ > ٠
∴ المعادلة تمثل دائرة

(ج) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = −٢ ، ك = −٢ ، ب = ٢
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٤ + ٤ − ٤ × ٢ = ٠
∴ المعادلة تمثل نقطة



معادلة مماس لدائرة Tangent to a Circle

سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.
باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

حاول أن تحل ص ١٦١

٩ **أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س − ٢)^2 + (ص − ١)^2 = ٢٥ عند النقطة أ(٦، ٤).**

المركز = (٢، ١) ، النقطة أ (٦، ٤) تنتمي إلى الدائرة

ميل نق = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١) = (٤ − ١) / (٦ − ٢) = ٣ / ٤

ميل المماس = −٤ / ٣

معادلة المماس ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٤ = −٤/٣ (س − ٦)

ص − ٤ = −٤/٣ س + ٨

∴ ص = −٤/٣ س + ١٢

حاول أن تحل ص ١٦٢

١٠ أثبت أن النقطة أ(١، ١) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: س^2 + ص^2 + ٦س + ٨ص − ١٦ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

الحل

بالتعويض بالنقطة (١، ١) في معادلة الدائرة

(١)^2 + (١)^2 + ٦(١) + ٨(١) − ١٦ = ٠ ✓

∴ النقطة أ(١، ١) تنتمي إلى الدائرة

ل = ٦ ، ك = ٨ ، ج = −١٦

المركز و = (−ل/٢ ، −ك/٢) = (−٣، −٤)

نق = ½ √(ل^2 + ك^2 − ٤ج) = ½ √(٣٦ + ٦٤ − ٤ × (−١٦)) = √٤١ وحدة طول

ميل نصف قطر التماس $= \frac{1+4}{1+3} = \frac{5}{4}$

ميل المماس $= -\frac{4}{5}$

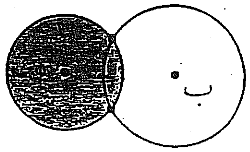
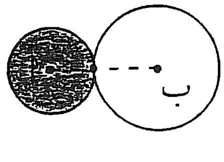
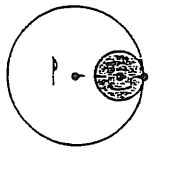
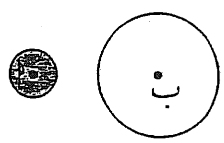
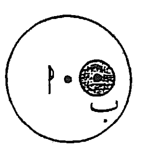
المعادلة هي $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - 1 = -\frac{4}{5}(س - 1)$

$ص - 1 = -\frac{4}{5}س + \frac{4}{5}$

$ص = -\frac{4}{5}س + \frac{9}{5}$

العلاقة بين دائرتين في المستوي

العلاقة بين أب وطولي نصفي القطرين	العلاقة بين الدائرتين	الشكل	ملاحظة
$\|نق_1 - نق_2\| < أب < نق_1 + نق_2$	الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين		البعد بين المركزين أصغر من مجموع طولي نصفي القطرين وأكبر من الفرق بينهما.
$أب = نق_1 + نق_2$	الدائرتان متماستان خارجيًا		- البعد بين المركزين يساوي مجموع طولي نصفي القطرين - مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
$أب = \|نق_1 - نق_2\|$	الدائرتان متماستان داخليًا		- البعد بين المركزين يساوي الفرق بين طولي نصف القطرين. - مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
$أب > نق_1 + نق_2$	الدائرتان لا تتقاطعان (متباعدتان)		- البعد بين المركزين أكبر من مجموع طولي نصف قطري الدائرتين.
$أب < \|نق_1 - نق_2\|$	الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان)		- البعد بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصفي القطرين.

حاول أن تحل ص ١٦٤

٤ حدد وضع الدائرة التي معادلتها: $س^٢ + ص^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$ بالنسبة إلى كل من الدائرتين التاليتين:

أ) $هـ_١ : (س - ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

ب) $هـ_٢ : س^٢ + ص^٢ = ١٦$

الحل: بالنسبة للمعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$

$ل = -٤$ ، $ك = ٠$ ، $جـ = -١٢$

∴ مركز الدائرة هو م $(٢ ، ٠)$ ، $نق_١ = \frac{١}{٢}\sqrt{١٦ + ٤ \times ١٢} = ٤$

أ) $هـ_١ : (س - ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

مركز الدائرة هو ن $(١ ، -٣)$ ، $نق_٢ = ٥$

$م ن = \sqrt{(١ - ٢)^٢ + (-٣ - ٠)^٢} = \sqrt{١٠}$

$نق_١ + نق_٢ = ٤ + ٥ = ٩$ ، $|نق_١ - نق_٢| = ١$

$١ < \sqrt{١٠} < ٩$

∴ الدائرتان متقاطعتان في نقطتين مختلفتين

ب) $هـ_٢ : س^٢ + ص^٢ = ١٦$

المركز جـ $(٠ ، ٠)$ ، $نق_٣ = ٤$

$م جـ = ٢$

$نق_١ + نق_٣ = ٤ + ٤ = ٨$ ، $|نق_١ - نق_٣| = ٠$

$٠ < ٢ < ٨$

∴ الدائرتان متقاطعتان في نقطتين مختلفتين