تمرين
٨-١

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي
The Unit Circle in the Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
°٤٥	$\frac{\pi}{٤}$
°١٣٥	$\frac{٣\pi}{٤}$
°١٨٠ -	π -
°١٥٠-	- $\frac{٥\pi}{٦}$
°٢٢٥-	- $\frac{٥\pi}{٤}$
°١٥٠	$\frac{٥\pi}{٦}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها °٣٠، ثم أوجد كلًّا من: $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

(أ) جا°٣٠ = $\frac{١}{٢}$

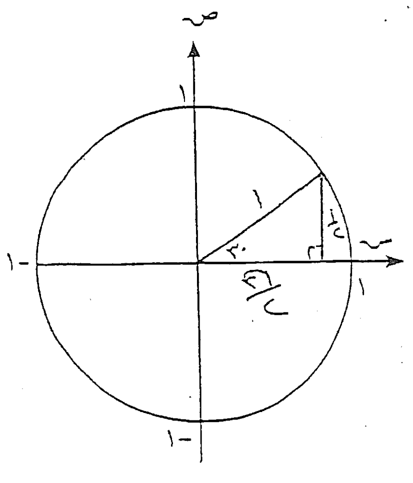
(ب) جتا°٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ج) ظا°٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(د) ظتا°٣٠ = $\sqrt{٣}$

(هـ) قا°٣٠ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(و) قتا°٣٠ ٢



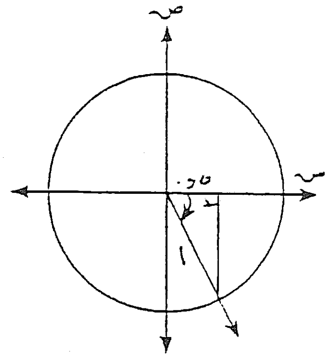
في التمرينين (٣–٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكل من:

(٣) −٦٠°

إحداثيا النقطة المثلثية $(\frac{1}{2} ، -\frac{\sqrt{3}}{2})$

جتا(−٦٠°) = $\frac{1}{2}$

جا(−٦٠°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

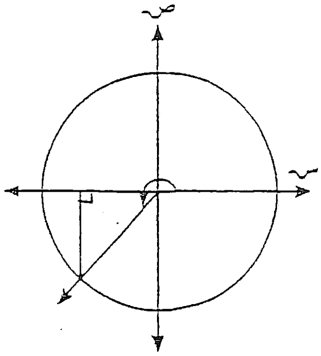


(٤) ٢٢٥°

إحداثيا النقطة المثلثية $(-\frac{\sqrt{2}}{2} ، -\frac{\sqrt{2}}{2})$

جتا ٢٢٥° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ظا ٢٢٥° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



في التمارين (٥–٨)، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية. ثمّ قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

(٥) ٣٢° جتا ٣٢° = ٠,٨٥ جا ٣٢ = ٠,٥٣ ظا ٣٢ = ٠,٦٢

(٦) −٤٥° جتا(−٤٥°) = ٠,٧١ جا(−٤٥°) = −٠,٧١ ظا(−٤٥°) = −١

(٧) −٩٧° جتا(−٩٧°) = جا(−٩٧°) = ظا(−٩٧°) =

(٨) ١٥٤° جتا(١٥٤°) = جا(١٥٤°) = ظا(١٥٤°) =

في التمارين (٩–١١)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٩) $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ظا $\frac{\pi}{4}$ = ١

(١٠) ٦٠° جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

(١١) ٠° جتا ٠° = ١ جا ٠° = ٠ ظا ٠° = ٠

في التمارين (١٢–١٥)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

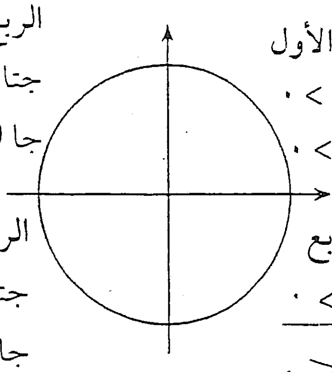
(١٢) ١٥٠° في الربع الثاني

(١٣) −π على محور السينات السالب

(١٤) −٦٠° في الربع الرابع

(١٥) $\frac{7\pi}{6}$ في الربع الثالث

(١٦) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



الربع الثاني
جتا θ < ٠
جا θ > ٠

الربع الأول
جتا θ > ٠
جا θ > ٠

الربع الثالث
جتا θ < ٠
جا θ < ٠

الربع الرابع
جتا θ > ٠
جا θ < ٠

(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في: ______

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٧) الكتابة في الرياضيات: فسّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

باستخدام النقطة الشبيه ٠° ← (١، ٠)
٩٠° ← (٠، ١) ، ١٨٠° ← (-١، ٠)
٢٧٠° ← (٠، -١) ، ٣٦٠° ← (١، ٠)

في التمارين (١٨ -٢٥)، استخدم المنقلة وارسم كلًّا من الزوايا التالية على دائرة الوحدة، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٨) ٢١٠° $\alpha = ٣٠°$
(١٩) $\frac{٢\pi}{٣}$ $\alpha = \frac{\pi}{٣}$
(٢٠) ١٧٠° $\alpha = ١٠°$
(٢١) $\frac{٧\pi}{٣}$ $\alpha = \frac{\pi}{٣}$
(٢٢) -١٣٥° $\alpha = ٤٥°$
(٢٣) $-\frac{٧\pi}{٦}$ $\alpha = \frac{\pi}{٦}$
(٢٤) -٢٤٠° $\alpha = ٦٠°$
(٢٥) $-\frac{١١\pi}{٦}$ $\alpha = \frac{\pi}{٦}$

(٢٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي: ______

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°
(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

(٢٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) التي تقع على دائرة الوحدة هي: ______

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°
(جـ) ٣١٥° (د) ٣٣٠°

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ – ٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا (−٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ)   (ب)

(٢) جا (١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ)   (ب)

(٣) ظا (−١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ)   (ب)

(٤) قا (٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ)   (ب)

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) −٣٢٠°   (ب) −٢٧٠°

(ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(ج) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(ج) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي −٢٢٥°. فإن النقطة التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$ (د) (−١ ، ١)

(٩) [جا(−١٣٥°)]^{٢} + [جتا(−١٣٥°)]^{٢} =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا$(\pi + \theta)$ = − حا θ

(ب) جتا$(\pi - \theta)$ = − حتا θ

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = حتا θ

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = حا θ

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س) = − ظا س

(ب) جتا(١٨٠° + س) = − حتا س

(جـ) جا(− س) = − حا

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) ظتا$(\pi + \theta)$

= ظتا θ

(ب) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

= قا θ

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

= − ظا θ

(د) قا$(-\theta)$

= قا θ

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) ظا(-٢٢٥°) = - ظا ٢٢٥° = - ظا (١٨٠° + ٤٥°) = - ظا ٤٥ = - ١

(ج) جتا(-١٣٥°) = جتا ١٣٥° = جتا (١٨٠ - ٤٥) = - جتا ٤٥ = - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = جتا (π + $\frac{\pi}{٦}$) = - جتا $\frac{\pi}{٦}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = - جا $\frac{٢\pi}{٣}$ = - جا (π - $\frac{\pi}{٣}$) = - جا $\frac{\pi}{٣}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ج) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ = ظا (٢π - $\frac{\pi}{٦}$) = - ظا $\frac{\pi}{٦}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) ظتا ٣٩٠° = ظتا (٣٦٠ + ٣٠) = ظتا ٣٠ = $\sqrt{٣}$

(ب) جا ٣٩٠° = جا (٣٦٠ + ٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

(ج) قتا ٤٥٠° = قتا (٣٦٠ + ٩٠) = قتا ٩٠ = ١

(د) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$ = قا ($\frac{\pi}{٤}$ + ٤π) = قا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٢}$

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = -٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا(π - θ) - جتا(- θ) + جا(π + θ) + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

= - جتا θ - جتا θ - جا θ + جا θ = - ٢ جتا θ

(ب) جا(π + θ) - جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا(π - θ) + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

= - جا θ + جا θ - جتا θ + جتا θ = صفر

٧٦

✓ (١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = $+\frac{١}{٢}$

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = $+\sqrt{٢}$

(د) جا(٤س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) جتا$\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(\text{س} - \frac{٣\pi}{٤}\right)$

(و) جا$\left(\frac{\pi}{٦} - \text{س}\right)$ = جا$\left(٢\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(ز) جتا$\left(\frac{\pi}{٨} + \text{س}\right)$ = ١

(حـ) ظا(٣π + ٢س) = ظتا(٢س)

ملاحظة حل رقم (١٢) ص٨١ في الصفحة القادمة

تمرين (١٢) ص ٧٧

(ب) $جتا\ س = \frac{١}{٢}$

$\because جتا\ س > ٠$

$\therefore$ س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

$\therefore س = \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$

أو $س = \frac{-\pi}{٣} + ٢ن\pi$ (ن ∈ ص)

(ج) $جا\ س = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$جا\ س > ٠$

$\therefore$ س تقع في الربع الأول أو الثاني

$\therefore س = \frac{\pi}{٤} + ٢ن\pi$ (ن ∈ ص)

أو $س = (\pi - \frac{\pi}{٤}) + ٢ن\pi$

$= \frac{٣\pi}{٤} + ٢ن\pi$

(د) $ظتا\ س = \sqrt{٣}$

$ظا\ س = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$ظا\ س = ظا\ \frac{\pi}{٦}$

$\therefore س = \frac{\pi}{٦} + ن\pi$ (ن ∈ ص)

(ى) $جا(٤س) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$جا(٤س) > ٠$

$\therefore$ ٤س تقع في الربع الأولى أو الثانى

$٤س = \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$

$\therefore س = \frac{\pi}{١٢} + \frac{١}{٢}ن\pi$

أو $٤س = (\pi - \frac{\pi}{٣}) + ٢ن\pi$

$\therefore ٤س = \frac{٢\pi}{٣} + ٢ن\pi$

$س = \frac{\pi}{٦} + \frac{١}{٢}ن\pi$ (ن ∈ ص)

(هـ) $جتا(٢س + \frac{\pi}{٤}) = جتا(س - \frac{٣\pi}{٤})$

إما $٢س + \frac{\pi}{٤} = س - \frac{٣\pi}{٤} + ٢ن\pi$ أو $٢س + \frac{\pi}{٤} = -س + \frac{٣\pi}{٤} + ٢ن\pi$

$س = -\pi + ٢ن\pi$ أو $٣س = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$

$س = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}ن\pi$

(و) $جا(\frac{\pi}{٦} - س) = جا(٢س - \frac{٢\pi}{٣})$

إما $\frac{\pi}{٦} - س = ٢س - \frac{٢\pi}{٣} + ٢ن\pi$ أو $\frac{\pi}{٦} - س = \pi - ٢س + \frac{٢\pi}{٣} + ٢ن\pi$

$-٣س = -\frac{٥\pi}{٦} + ٢ن\pi$ $س = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ن\pi$

$س = \frac{٥\pi}{١٨} - \frac{٢}{٣}ن\pi$

(ز) $جتا(\frac{\pi}{٨} + س) = ١$

$\therefore \frac{\pi}{٨} + س = ٠ + ٢ن\pi$

$س = \frac{-\pi}{٨} + ٢ن\pi$

(ن ∈ ص)

(ع) $٣\pi + ٢س + ٢س = \frac{\pi}{٢}$

$٤س = \frac{-٥\pi}{٢}$

$س = \frac{-٥\pi}{٨}$

(١) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°)　　　(ب) جتا(-٢٤٠°)

(جـ) ظتا(-١٥٠٠°)　　　(د) ظا٧٦٥°

(٢) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$　　　(ب) جا $\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$

(جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$　　　(د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٣) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة

ظا٢٢٥° - ٣جا١٢٣٠° + ٢جتا(-٩٦٠°) = $-\frac{٣}{٢}$　　　أ　　ب

قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$ - ٢قا $\frac{١٣\pi}{٦}$ + جا $\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right)$ - جتا $\left(\frac{١٧\pi}{٦}\right)$ = ٢　　　أ　　ب

ظتا $\frac{١٩\pi}{٤}$ - ٣ظا $\left(-\frac{١١\pi}{٤}\right)$ + جتا $\left(\frac{٢٤\pi}{٣}\right)$ - ٢جا $\left(\frac{٤٥\pi}{٦}\right)$ = ١　　　أ　　ب

قا(-٣١٥°) + ٢قتا٥٨٥° - ٢جتا٨٥٥° = $\sqrt{٢}$　　　أ　　ب

٧٧

(٤) إن قيمة المقدار قا(٢π − θ) − قتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جا θ هي:

(أ) −١ (ب) صفر

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅	أ	ب
إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$	أ	ب
ذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$	أ	ب
مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي ∅	أ	ب
ظا (١٥ π) = صفر	أ	ب

تمرّن
٨-٣

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$. فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ. حا² θ + حتا² θ = ١

ومنه حتا θ = ٠,٩٧ ، ظا θ = ٠,٢٠٦

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$، جتاθ < ٠. أوجد جاθ، جتاθ. قا² θ = ١ + ظا² θ

ومنه قا θ = -٣ ، حتا θ = $\frac{-١}{٣}$ ، حا θ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$، جاθ < ٠. أوجد جاθ، ظتاθ.. حا² θ + حتا² θ = ١

ومنه حا θ = $-\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

في التمارين (٤ – ٧)، أوجد قيمة كلًّا مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)² – ٢جاθ جتا θ. = حا² θ + حتا² θ + ٢حا θ حتا θ - ٢حا θ حتا θ = ١

(٥) (ظا² θ + ١)جتا² θ. = قا² θ حتا² θ = (قا θ حتا θ)² = ١² = ١

(٦) ١ + ظا² (–θ) – قا² θ. = قا² θ - قا² θ = ١

(٧) ٩قا² θ – ٥ظا² θ – $\frac{٤}{\text{جتا}^٢ \theta}$. = ٩قا² θ - ٩ظا² θ = ٩ (قا² θ - ظا² θ) = ٩

في التمارين (٨ – ١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٨) ١ + ظتا² (–θ) = قتا² θ.

١ + ظتا² (- θ) = ١ + (ظتا - θ)² = ١ + (- ظتا θ)² = ١ + ظتا² θ = قتا² θ

(٩) قا⁴ θ – قا² θ = ظا⁴ θ + ظا² θ. قا⁴ θ - ظا⁴ θ = (قا² θ + ظا² θ) (قا² θ - ظا² θ)

$\therefore$ قا⁴ θ - ظا⁴ θ = قا² θ + ظا² θ $\therefore$ قا⁴ θ - قا² θ = ظا² θ + ظا⁴ θ

(١٠) (١ – جتا² θ) (١ + ظتا² θ) = ١.

الأيمن = حا² θ × قتا² θ = ١ = الأيسر

(١١) ٣جا$^٢\theta$ + ٤جتا$^٢\theta$ = ٣ + جتا$^٢\theta$.

الايسر = ٣ جا$^٢\theta$ + ٣جتا$^٢\theta$ + جتا$^٢\theta$ = ٣ + جتا$^٢\theta$

في التمارين (١٢ – ١٦)، حل المعادلات التالية حيث $\theta \in$ (٠، ٢π) حيث المقام ≠ ٠

* (١٢) $\frac{\text{جا}^٣\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ظاθ

جا$^٣\theta$ – جاθ = ٠ ، جاθ(جا$^٢\theta$ – ١) = ٠ ، إما جاθ = ٠ أو جتا$^٢\theta$ = ٠ مرفوض

$\theta = \frac{\pi}{٢}$ ، $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$

* (١٣) $\frac{\text{جا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta}$ × قاθ = ظاθ

ظاθ(ظاθ – ١) = ٠ ، إما ظاθ = ٠ أو ظاθ = ١

$\theta = \frac{\pi}{٢}$ ، $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٤}$

* (١٤) $\frac{\text{قا}\theta}{\text{ظتا}\theta}$ = – قتاθ

ظاθ = – ظتاθ م ح = $\varnothing$

(١٥) ٢جتا$^٢\theta$ + جتاθ – ١ = ٠ حيث جتاθ > ٠

(٢جتاθ – ١)(جتاθ + ١) = ٠

∴ جتا$\theta = \frac{١}{٢}$ ، جتاθ = –١ مرفوض

$\theta = \frac{\pi}{٣}$ ، أو $\theta = \frac{-\pi}{٣}$

(١٦) ظتا$^٢\theta$ = ١ ظتاθ = ±١ ظاθ = ±١

$\theta = \frac{\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٤}$ ، $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$ ، $\theta = \frac{-\pi}{٤}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) إذا كانت جتاθ = – $\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$

(جـ) $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

(٢) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمارين (٣ – ٨)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٣) قاθ × جتاθ – ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٤) ظتا^{٢} ($-\theta$) – قتا^{٢} θ = –١ (أ) (ب)

(٥) (قاθ + ظاθ)(قاθ – ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٦) جاθ قتاθ – جتا^{٢} θ – جا^{٢} θ = ٠ (أ) (ب)

(٧) $\dfrac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}\theta}$ – جتاθ = –١ (أ) (ب)

(٨) ظاθ + ظتاθ – قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

في التمرينين (٩ – ١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

$$\text{جا}\theta\left(\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} + \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}\right)$$

$$= \text{جا}\theta\left(\frac{\text{جتا}^{٢}\theta + \text{جا}^{٢}\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}\right) = \cancel{\text{جا}\theta} \times \frac{١}{\cancel{\text{جا}\theta}\,\text{جتا}\theta}$$

$$= \text{قا}\theta$$

(١٠) $\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \dfrac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}$

$$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta}}{\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta} - \dfrac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}} = \frac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}$$

اختبار الوحدة الثامنة

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جاθ = $\frac{١}{٣}$. الربع الأول أو الربع الثاني

(ب) قاθ = -١. محور السينات السالب

(ج) ظاθ = -٣. الثاني أو الرابع

(د) جتاθ = $-\frac{٧}{٨}$. الربع الثاني أو الربع الثالث

(٢) إذا كان ظاθ = ٤ فأوجد:

(أ) قا²θ. = ١ + ظا²θ = ١ + ٤² = ١٧

(ب) ظتاθ. = $\frac{١}{٤}$

(ج) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$. = ظاθ = ٤

(د) قتا²θ. = ١ + ظتا²θ = ١ + $\left(\frac{١}{٤}\right)^2$ = $\frac{١٧}{١٦}$

(٣) إذا كان جا ٣٨° ≃ ٠,٦٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°. جتا٣٨ = $\sqrt{١ - \text{جا}^2 ٣٨}$ = $\sqrt{١ - (٠,٦٢)^2}$ = ٠,٧٨

(ب) جا(-٥٢°). = - جا ٥٢ = - جتا ٣٨ = - ٠,٧٨

(ج) ظا(١٤٢°) - جتا(٢١٨°) + ظتا(-٣٨°). = - ظا٣٨ + جتا٣٨ - ظتا٣٨

= $-\frac{٠,٦٢}{٠,٧٨}$ + ٠,٧٨ - $\frac{٠,٧٨}{٠,٦٢}$ = - ١,٢٧

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(-٦٠°) + ظا(٦٠°) - ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°) = - قا٦٠° + ظا٦٠° - ظتا٣٠° + قتا٣٠°

= - ٢ + $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٣}$ + ٢ = صفر

(ب) جتا$\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)$ + ٢جا(-π) + جتا(-٨π) + جا$\left(-\frac{٧\pi}{٢}\right)$.

= ٠ + ٢×٠ + ١ + ١ = ٢

(٥) أثبت صحة ما يلي:

(أ) $قا^2 \theta - 2ظا^2 \theta + \frac{1}{جتا^2(-\theta)} = 2$

$قا^2\theta - 2ظا^2\theta + \frac{1}{جتا^2(-\theta)} = قا^2\theta - 2ظا^2\theta + قا^2\theta$

$= 2قا^2\theta - 2ظا^2\theta$

$= 2(قا^2\theta - ظا^2\theta) = 2 \times 1 = 2$

(ب) $جتا\theta + \frac{جا^2\theta}{1 + جتا\theta} = 1$

$جتا\theta + \frac{1 - جتا^2\theta}{1 + جتا\theta} = جتا\theta + \frac{\cancel{(1+جتا\theta)}(1 - جتا\theta)}{\cancel{(1+جتا\theta)}}$

$= جتا\theta + 1 - جتا\theta = 1$

(٦) أثبت صحة المتطابقات التالية:

(أ) $جتا^4\theta - جا^4\theta = جتا^2\theta - جا^2\theta$

$جتا^4\theta - جا^4\theta = (جتا^2\theta + جا^2\theta)(جتا^2\theta - جا^2\theta) = 1 \times (جتا^2\theta - جا^2\theta) =$

$= جتا^2\theta - جا^2\theta$

(ب) $جتا\theta\,(ظا\theta + ظتا\theta) = قتا\theta$

$جتا\theta\left(\frac{جا^2\theta + جتا^2\theta}{جا\theta\,جتا\theta}\right) = جتا\theta \times \frac{1}{جا\theta\,جتا\theta} = قتا\theta.$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية: جتا س > ٠

(أ) $جتاس = \frac{\sqrt{2}}{2}$

س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

$س = \frac{\pi}{4} + 2ك\pi$ او $س = -\frac{\pi}{4} + 2ك\pi$ (ك ∈ ص)

(ب) $2جاس - \sqrt{3} = 0$

$جاس = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا س > ٠ س تقع في الربع الأول أو الثاني

$س = \frac{\pi}{3} + 2ك\pi$ او $س = \pi - \frac{\pi}{3} + 2ك\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2ك\pi$ (ك ∈ ص)

(جـ) ظاس = ١

$ظاس = ظا\frac{\pi}{4}$

$س = \frac{\pi}{4} + ك\pi$

تمارين إثرائية

(١) تفكير ناقد: افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي، حيث جتاθ = $\frac{-١}{٢}$ ، جاθ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.
هل من الممكن أن تكون θ = ٦٠° أو θ = −١٢٠°؟

جتا θ = $-\frac{١}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثاني او الثالث ∴ θ = −١٢٠°

جا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثالث او الرابع

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) جا١٣٥° + جتا ٢٢٥° − ٢ظا(− ٢٢٥°) + ٣جا٣٣٠°.

(ب) ظتا٣٠° + ٢ظا ١٢٠° − ٣ظا٢١٠° + ٣ظتا(− ٣٣٠°).

(جـ) جتا $\frac{١٧\pi}{٣}$ + جا$\left(-\frac{١٥\pi}{٦}\right)$ + ٣جتا$\left(-\frac{٢٥\pi}{٣}\right)$.

(د) ظا $\frac{٩\pi}{٤}$ + ظتا $\frac{١٧\pi}{٤}$ + قا$\left(-\frac{٥\pi}{٤}\right)$ + قتا $\frac{١٩\pi}{٤}$.

(٣) أوجد قيمة:

(أ) جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا٣٥٨° + جا٣٥٩°.

(ب) جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٣٥٨° + جتا٣٥٩°.

(٤) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{\text{١ − جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{١ − جا}\theta} = \text{٢قا}\theta$$

الأيمن = $\frac{(\text{١ − جا}\theta)^٢ + \text{جتا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta(\text{١ − جا}\theta)} = \frac{\text{١ − ٢جا}\theta + \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta\ (\text{١ − جا}\theta)}$

$= \frac{٢\,\cancel{(\text{١ − جا}\theta)}}{\text{جتا}\theta\,\cancel{(\text{١ − جا}\theta)}} = \text{٢ قا}\theta$ = الأيسر

٨٤

رقم (٢) ص ٨٤

(أ) المقدار = جا ٤٥ − جتا ٤٥ + ٢ ظا ٢٢٥ − ٣ جا ٣٠°

= جا ٤٥ − جتا ٤٥ + ٢ ظا ٤٥ − ٣ جا ٣٠°

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} + ٢ \times ١ - ٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$.

(ب) المقدار = ظتا ٣٠ − ٢ ظا ٦٠° − ٣ ظا ٣٠ + ٣ ظتا ٣٠

$= \sqrt{٣} - ٢ \times \sqrt{٣} - ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} + ٣ \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

(جـ) جتا $\left(\frac{-\pi}{٣} + \frac{١٨\pi}{٣}\right)$ + جا $\left(-\frac{٣\pi}{٦} - \frac{١٢\pi}{٦}\right)$ + ٣ جتا $\left(\frac{-\pi}{٣} - \frac{٢٤\pi}{٣}\right)$

= جتا $\left(\frac{-\pi}{٣}\right)$ + جا $\left(\frac{-٣\pi}{٦}\right)$ + ٣ جتا $\left(\frac{-\pi}{٣}\right)$

= جتا $\frac{\pi}{٣}$ − جا $\frac{\pi}{٢}$ + ٣ جتا $\frac{\pi}{٣}$

$= \frac{١}{٢} - ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} = ١$

(د) ظا $\left(\frac{\pi}{٤} + ٢\pi\right)$ + ظتا $\left(\frac{\pi}{٤} + ٤\pi\right)$ + قا $\frac{٥\pi}{٤}$ + قتا $\left(\frac{٣\pi}{٤} + ٤\pi\right)$

= ظا $\frac{\pi}{٤}$ + ظتا $\frac{\pi}{٤}$ − قا $\frac{\pi}{٤}$ + قتا $\frac{\pi}{٤}$

$= ١ + ١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٢$

رقم (٣) ص ٨٤

(أ) المقدار = جا ١° + جا ٢° + جا ٣° + ... + جا(−٢)° + جا(−١)°

= جا ١° + جا ٢° + جا ٣° + ... − جا ٢° − جا ١°

= جا ١٨٠° = ٠

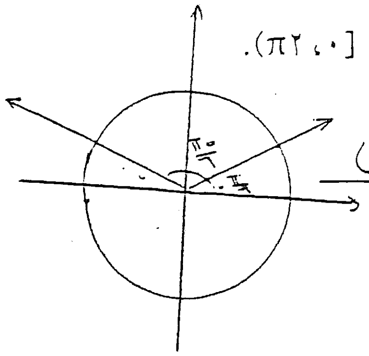
(ب) المقدار = جتا ١ + جتا ٢° + جتا ٣° + ... + جتا ٢° + جتا ١

= ٢ جتا ١° + ٢ جتا ٢° + ٢ جتا ٣° + ... + ٢ جتا ١٧٩° + جتا ١٨٠°

= ٢ جتا ١° + ٢ جتا ٢° + ٢ جتا ٣° + ... − ٢ جتا ١° + جتا ١٨٠°

= جتا ١٨٠° = −١

(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثمّ مثّلها على دائرة الوحدة، حيث θ ∈ [٠، ٢π).



٢جا٢ θ = ٤ - ٧جا θ.

٢جا٢ θ + ٧جا θ - ٤ = ٠

(٢جا θ - ١)(جا θ + ٤) = ٠

جا θ = ١/٢ ، جا θ = -٤ مرفوض

θ = π/٦ أو θ = π٥/٦

في التمرينين (٦-٧)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٦) $\frac{جاθ + جتاθ}{جتاθ} - \frac{جاθ - جتاθ}{جاθ}$ = قا θ قتا θ

الأيسر = $\frac{جا^٢θ + جاθ جتاθ - جاθ جتاθ + جتا^٢θ}{جتاθ جاθ}$ = $\frac{١}{جتاθ جاθ}$ = قا θ قتا θ

(٧) $\frac{جتا^٢θ - جا^٢θ}{١ - ظا^٢θ}$ = جتا٢ θ

الأيسر = $\frac{جتا^٢θ - جا^٢θ}{١ - \frac{جا^٢θ}{جتا^٢θ}}$ = $\frac{جتا^٢θ (جتا^٢θ - جا^٢θ)}{(جتا^٢θ - جا^٢θ)}$ = جتا٢ θ

في التمرينين (٨-٩)، حل المعادلات المثلثية التالية:

(٨) ظتا٢ س + ظتا س = ٠

(٩) قا٢ س = ٣ قا س - ٢

رقم ⑧ ظتا س (ظتا س + ١) = ٠

ظتا س = ٠ أو ظتا س = -١

ظا س = -١

س = π/٢ + πك

أو س = π٣/٢

∴ س = π٣/٤ + πك٢

أو س = -π/٤ + πك

رقم ⑨

قا٢ س - ٣ قا س + ٢ = ٠

(قا س - ١)(قا س - ٢) = ٠

اما قا س = ١

جتا س = ١

س = π/٢ + ٢كπ

أو قا س = ٢

جتا س = ١/٢

س = π/٦ + ٢كπ

س = π٥/٦ + ٢كπ

٨٥