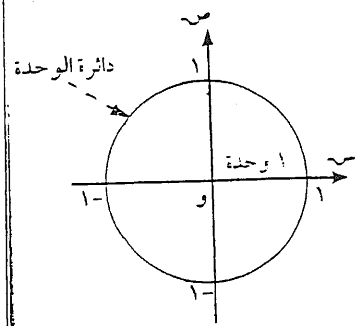
الوحدة الثامنة — حساب المثلثات

(٨-١) دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

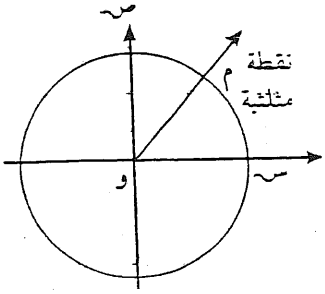
دائرة الوحدة Unit Circle



هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

النقطة المثلثية The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

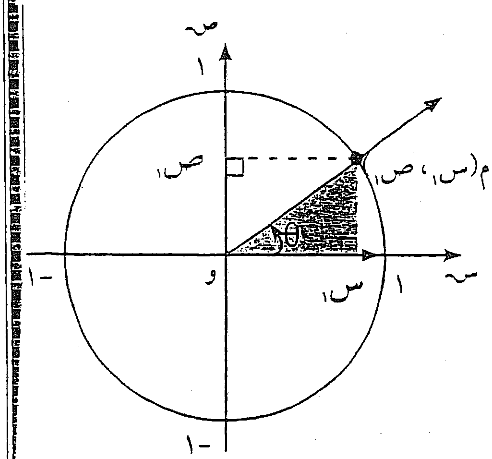


> **معلومة مفيدة:**
> عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م (س$_1$، ص$_1$).



في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.

تعرف من دراستك السابقة: أن جتاθ = $\dfrac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

∵ طول الوتر = نق = ١

∴ جتاθ = $\dfrac{\text{الضلع المجاور}}{١}$ = $\dfrac{س_1}{١}$ = س$_1$ أي أن جتاθ = س$_1$

كذلك جاθ = $\dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{ص_1}{١}$ = ص$_1$ أي أن جاθ = ص$_1$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

جتاθ = س$_1$ جاθ = ص$_1$

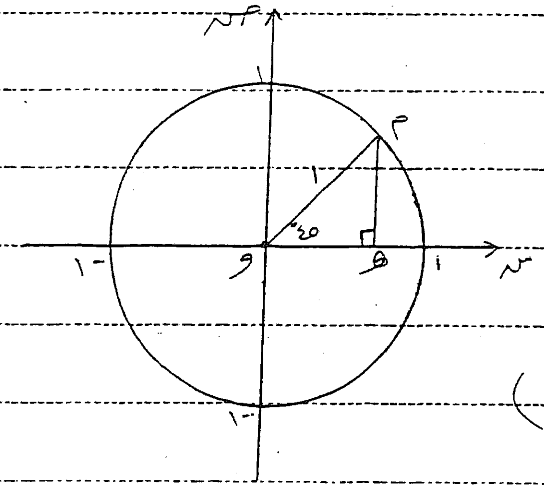
ظاθ = $\dfrac{ص_1}{س_1}$، س$_1$ ≠ ٠ ظتاθ = $\dfrac{س_1}{ص_1}$، ص$_1$ ≠ ٠

قاθ = $\dfrac{١}{س_1}$، س$_1$ ≠ ٠ قتاθ = $\dfrac{١}{ص_1}$، ص$_1$ ≠ ٠

> **معلومة مفيدة:**
> عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

حاول أن تحل ص ٩٧

١ على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°



م و = ١ وحدة طول

△ م هـ و قائم الزاوية في هـ

ق(∠ م و هـ) = ٤٥°

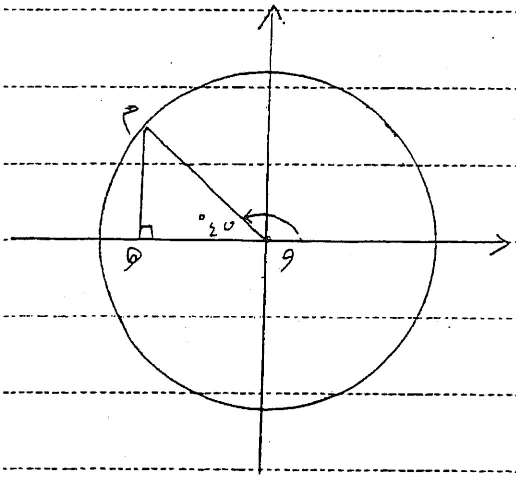
م هـ = هـ و = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ النقطة المناظرة للزاوية ٤٥° هي ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، جا ٤٥° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

حاول أن تحل ص ٩٨

٢ مستخدمًا طريقة المثال (٢)، أوجد جتا $\frac{3\pi}{4}$، جا $\frac{3\pi}{4}$.



النقطة المناظرة هي ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

∴ جتا $\frac{3\pi}{4}$ = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

، جا $\frac{3\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

تدريب ص ٩٨

استخدم آلة حاسبة وأكمل الجدول التالي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

قياس الزاوية θ / النسبة	٢٠°	٤٠°	٨٠°	١٣٠°	١٦٠°	٢٢٠°	٢٥٠°	٣١٠°
جا θ (sinθ)	٠,٣٤	٠,٦٤	٠,٩٨	٠,٧٧	٠,٣٤	-٠,٦٤	-٠,٩٤	-٠,٧٧
جتا θ (cosθ)	٠,٩٤	٠,٧٧	٠,١٧	-٠,٦٤	-٠,٩٤	-٠,٧٧	-٠,٣٤	٠,٦٤
ظا θ (tanθ)	٠,٣٦	٠,٨٤	٥,٦٧	-١,١٩	-٠,٣٦	٠,٨٤	٢,٧٥	-١,١٩

إشارة النسب المثلثية

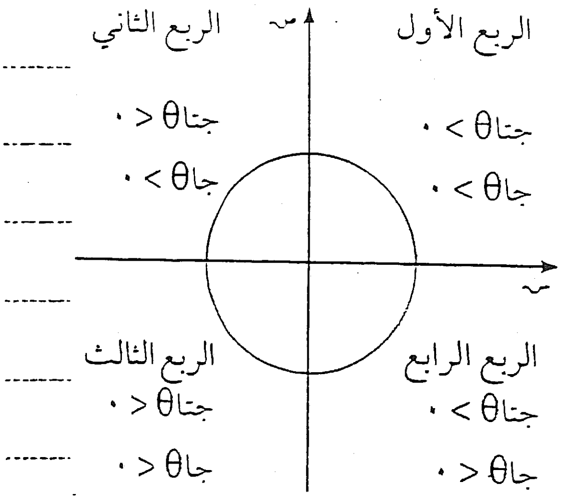
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠ ، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠ ، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠ ، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠ ، جتاθ > ٠

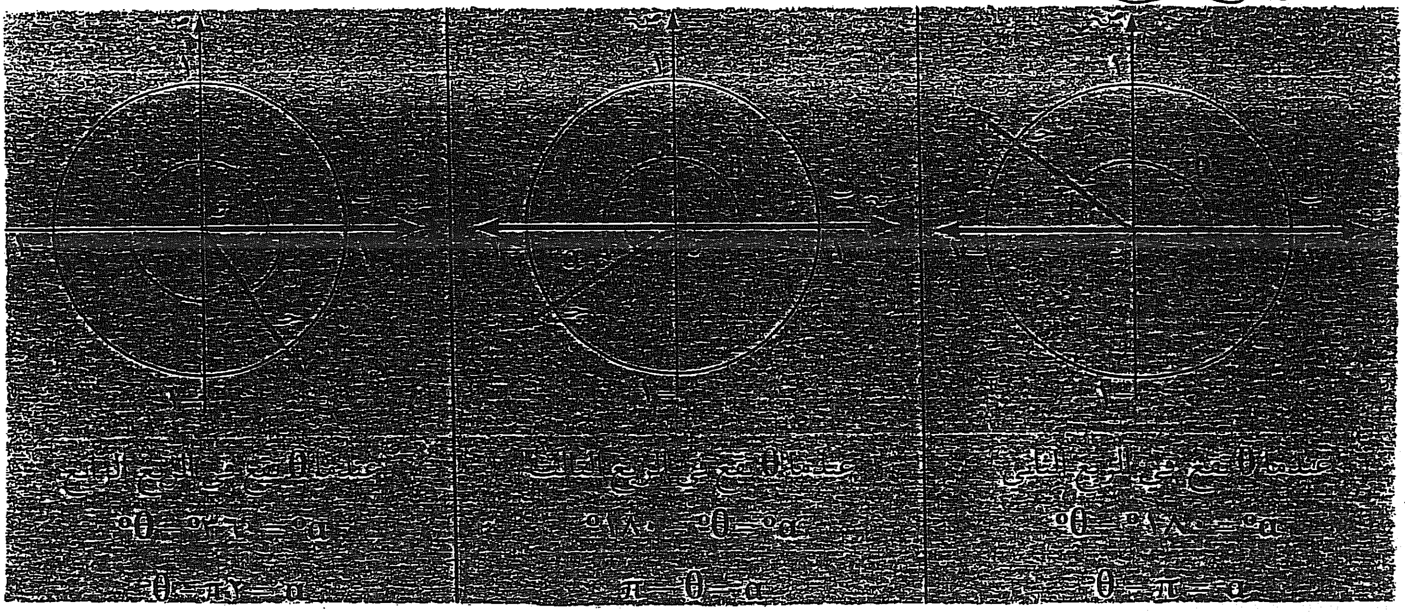


حاول أن تحل ص ١٠٠

٣ (أ) إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟ جتا θ < ٠

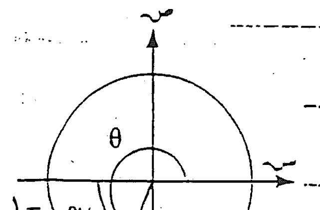
(ب) إذا كانت ٠ < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟ جا θ > ٠

زوايا الإسناد



حاول أن تحل ص ١٠٢

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.



الحل

α = ٧٠°

θ = ١٨٠° + α

= ١٨٠° + ٧٠° = ٢٥٠°

(٨ – ٢) العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

١ النسب المثلثية للزاويتين θ ، $-\theta$

قانون:

جتا($-\theta$) = جتاθ

جا($-\theta$) = $-$جاθ

وبالتالي ظا($-\theta$) = $-$ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

حاول أن تحل ص ١٠٤

١ أكمل إذا كان:

أ جا م = ٠,٣ فإن جا($-$ م) = $-$٠,٣

ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا($-$ ل) = ٠,٣٨

ج ظا س = ٣,١٤ فإن ظا($-$ س) = $-$٣,١٤

د جتا($-$ ص) = $\frac{1}{4}$ فإن جتا ص = $\frac{1}{4}$

٢ النسب المثلثية للزاويتين θ ، ($\pi - \theta$)

قانون:

جتا($\pi - \theta$) = $-$جتاθ

جا($\pi - \theta$) = جاθ

وبالتالي ظا($\pi - \theta$) = $-$ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

حاول أن تحل ص ١٠٥

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{4}{5}$ ، فأوجد جتا(π – س).

ج ظا $\frac{\pi}{12}$ = ٢ – $\sqrt{3}$، فأوجد ظا $\frac{11\pi}{12}$.

الحل

أ جا ١٥٠ = جا(١٨٠ – ٣٠)

= جا ٣٠ = $\frac{1}{2}$

ب جتا(π – س) = $-$ جتا س

= $-\frac{4}{5}$

ج ظا $\frac{11\pi}{12}$ = ظا ($\pi - \frac{\pi}{12}$) = $-$ ظا $\frac{\pi}{12}$ = $\sqrt{3}$ – ٢

[٣] النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π + θ)

قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

حاول أن تحل ص ١٠٦

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جا ٢٢٠°.

الحل: جا ٢٢٠° = جا (١٨٠° + ٤٠°) = − جا ٤٠° = −٠,٧٦٦

حاول أن تحل ص ١٠٦

٤ إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°

الحل: جا ٢٣٦° = جا (١٨٠° + ٥٦°) = − جا ٥٦° = −٠,٨٢٩

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\frac{\pi}{2} - \theta)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\frac{\pi}{2} + \theta)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = جتاθ

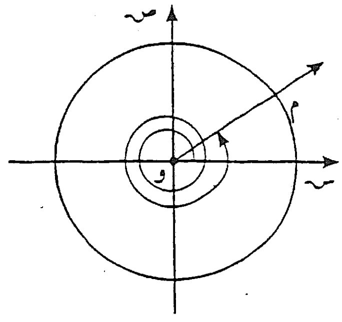
جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

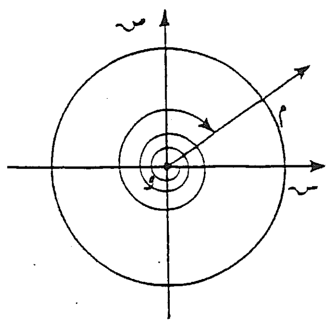
الدوال المثلثية على ح

- θجا(θ + ٢ك π) = جا
- θجتا(θ + ٢ك π) = جتا
- θظا(θ + ك π) = ظا   حيث ظاθ معرّف؛ ك عددًا صحيحًا

يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:



دوران بالاتجاه الموجب

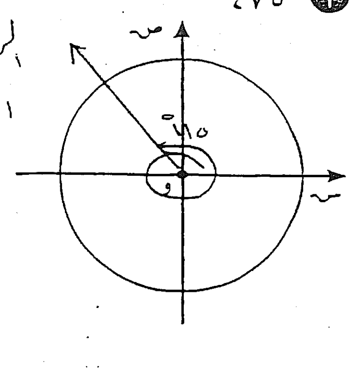


دوران بالاتجاه السالب

تدريب (١)

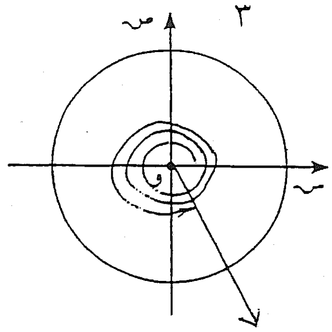
ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

أ) ٤٧٥°



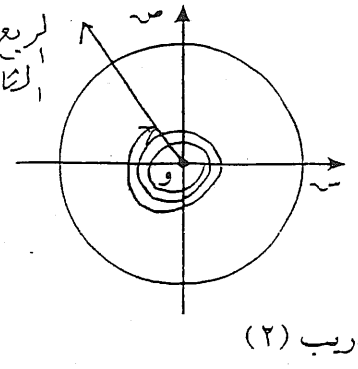
الربع الثاني

ب) $\frac{١٧\pi}{٣}$



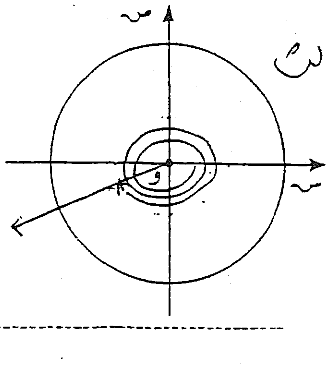
الربع الرابع

جـ) $\frac{-١٦\pi}{٣}$



الربع الثاني

د) -٨٩٠°



الربع الثالث

تدريب (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا ٣٩٠° = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ٧٦٥° = جتا(٤٥ + ٧٢٠) = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا$\left(\frac{-١١\pi}{٣}\right)$ = ظا($\frac{\pi}{٣}$ - ٤π) = ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $\sqrt{٣}$

حاول أن تحل ص ١١٠

٥ بسّط كلًا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا$(\theta + ٩\pi)$ ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ ج جا$(-٦٣٠^\circ - $ س$)$ د جا$(٢٧٠^\circ + $ س$)$

الحل (أ) جتا$(\theta + ٩\pi)$ = جتا$(\theta + \pi + ٨\pi)$

= جتا$(\theta + \pi)$

= − جتا θ

(ب) جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = − جا θ

(ج) جا$(-٦٣٠^\circ - $ س$)$ = جا$(٩٠ - $ س $- ٧٢٠)$

= جا$(٩٠ - $ س$)$ = جتا س

(د) جا$(٢٧٠^\circ + $ س$)$ = جا$(٩٠^\circ + $ س $+ ١٨٠)$

= − جا$(٩٠ + $ س$)$

= − جتا س

حل معادلات مثلثية

حاول أن تحل ص ١١١

٦ حل المعادلة : $\sqrt{2}$ جا س = ١

الحل

جا س = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع فى الربع الأول أو فى الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{-\pi}{4}$ + ٢ ك π (ك ∈ ص)

حاول أن تحل

٧ حل المعادلة: ٢ جا س - ١ = ٠

الحل

جا س = $\frac{1}{2}$

جا س > ٠

س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى

س = $\frac{\pi}{6}$ + ٢ ك π أو س = (π - $\frac{\pi}{6}$) + ٢ ك π (ك ∈ ص)

= $\frac{5\pi}{6}$ + ٢ ك π

حاول أن تحل ص ١١٣

٨ حل المعادلة: $\sqrt{3}$ ظاθ = ١.

الحل

ظا θ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

ظا θ = ظا $\frac{\pi}{6}$

∴ θ = $\frac{\pi}{6}$ + ك π (ك ∈ ص)

حاول أن تحل ص ١١٤

٩ حل كلًا من المعادلتين:

أ جتا$\left(٣س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ ب جا$\left(٢س + \frac{\pi}{٥}\right)$ = جا س

الحل (أ) جتا$\left(٣س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$

$٣س - \frac{\pi}{٤} = س + \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$ أو $٣س - \frac{\pi}{٤} = -\left(س + \frac{\pi}{٣}\right) + ٢ن\pi$

$٢س = \frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$ أو $٤س = \frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$

$٢س = \frac{٧\pi}{١٢} + ٢ن\pi$ أو $٤س = \frac{-\pi}{١٢} + ٢ن\pi$

$س = \frac{٧\pi}{٢٤} + ن\pi$ أو $س = \frac{-\pi}{٤٨} + \frac{١}{٢}ن\pi$

(ب) جا$\left(٢س + \frac{\pi}{٥}\right)$ = جا س

$٢س + \frac{\pi}{٥} = س + ٢ن\pi$ أو $٢س + \frac{\pi}{٥} = \pi - س + ٢ن\pi$

$س = -\frac{\pi}{٥} + ٢ن\pi$ أو $٣س = \pi - \frac{\pi}{٥} + ٢ن\pi$

$٣س = \frac{٤\pi}{٥} + ٢ن\pi$

$س = \frac{٤\pi}{١٥} + \frac{٢}{٣}ن\pi$

حاول أن تحل ص ١١٤

١٠ حل المعادلة: جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٣}\right)$ = جا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$.

جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٣}\right)$ = جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - س + \frac{\pi}{٣}\right)$

جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٣}\right)$ = جتا$\left(\frac{٥\pi}{٦} - س\right)$

$٣س + \frac{\pi}{٣} = \frac{٥\pi}{٦} - س + ٢ن\pi$ أو $٣س + \frac{\pi}{٣} = -\frac{٥\pi}{٦} + س + ٢ن\pi$

$٤س = \frac{٥\pi}{٦} - \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$ أو $٢س = \frac{-٥\pi}{٦} - \frac{\pi}{٣} + ٢ن\pi$

$٤س = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ أو $٢س = \frac{-٧\pi}{٦} + ٢ن\pi$

$س = \frac{\pi}{٨} + \frac{١}{٢}ن\pi$ أو $س = \frac{-٧\pi}{١٢} + ن\pi$

(٨ - ٣) العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{1}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\frac{1}{\text{جتا}\theta}$ ، قتاθ = $\frac{1}{\text{جا}\theta}$

جا^2 θ + جتا^2 θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

العلاقة بين ظاθ، قاθ

إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على جتا^2 θ نحصل على:

$\frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1}{\text{جتا}^2\theta}$ حيث جتا θ ≠ ٠

١ + ظا^2 θ = قا^2 θ

∴ ١ + ظا^2 θ = قا^2 θ

العلاقة بين ظتاθ، قتاθ

∴ ١ + ظتا^2 θ = قتا^2 θ

حاول أن تحل ص ١١٦

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{3}{5}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{2}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

الحل

جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ١

$(\frac{3}{5})^2$ + جتا$^2\theta$ = ١

جتا$^2\theta$ = ١ - $(\frac{3}{5})^2$ = $\frac{16}{25}$

جتاθ = $\frac{4}{5}$ أو جتاθ = $-\frac{4}{5}$ مرفوض لأن ٠ < θ < $\frac{\pi}{2}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$ = $\frac{3}{4}$

حاول أن تحل ص ١١٧

❷ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل

$$\text{قا}^2\theta = ١ + \text{ظا}^2\theta$$

$$= ١ + \left(\frac{٣}{٤}\right)^2$$

$$\text{قا}^2\theta = \frac{٢٥}{١٦}$$

$$\text{قا}\,\theta = \frac{٥}{٤} \quad \text{أو} \quad \text{قا}\,\theta = -\frac{٥}{٤}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{٤}{٥} \ \text{مرفوض} \quad \text{أو} \quad \text{جتا}\,\theta = -\frac{٤}{٥}$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$$

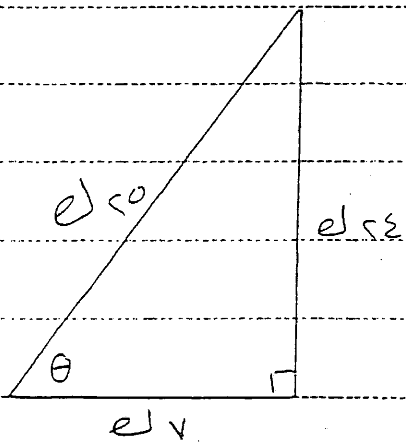
$$\frac{٣}{٤} = \frac{\text{جا}\,\theta}{-\frac{٤}{٥}} \qquad \text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٤} \times -\frac{٤}{٥} = -\frac{٣}{٥}$$

حاول أن تحل ص ١١٨

❸ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل الزاوية θ تقع في الربع الأول



$$\text{جا}\,\theta = \frac{٢٤\text{ل}}{٢٥\text{ل}} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{٧\text{ل}}{٢٥\text{ل}} = \frac{٧}{٢٥}$$

حاول أن تحل ص ١٢٠

٥ أثبت صحة المتطابقة: $جتا^4 س + جا^2 س \times جتا^2 س = جتا^2 س$.

الحل

$جتا^4 س + جا^2 س \times جتا^2 س$

$= جتا^2 س \; (جتا^2 س + جا^2 س)$

$= جتا^2 س \times 1$

$= جتا^2 س$

حاول أن تحل ص ١٢٠

٦ أثبت صحة المتطابقة: $(قا^2 \theta + قتا^2 \theta) - (ظا^2 \theta + ظتا^2 \theta) = 2$.

الحل

$(قا^2 \theta + قتا^2 \theta) - (ظا^2 \theta + ظتا^2 \theta)$

$= 1 + \cancel{ظا^2 \theta} + 1 + \cancel{ظتا^2 \theta} - \cancel{ظا^2 \theta} - \cancel{ظتا^2 \theta}$

$= 2$

حاول أن تحل ص ١٢١

٧ أثبت صحة المتطابقة: $\frac{قا س}{جا س} - \frac{جا س}{جتا س} = ظتا س$ حيث المقام $\neq 0$

الحل

$\frac{قا س}{جا س} - \frac{جا س}{جتا س} = \frac{قا س \; جتا س - جا^2 س}{جا س \times جتا س}$

$= \frac{1 - جا^2 س}{جا س \; جتا س}$

$= \frac{جتا^2 س}{جا س \; جتا س}$

$= \frac{جتا س}{جا س}$

$= ظتا س$

حاول أن تحل صـ ١٢١

٨ حلّ المعادلة: ٢ جا س جتا س − جتا س = ٠ حيث س ∈ [٠، ٢ط[

الحل

٢ جا س جتا س − جتا س = ٠

جتا س (٢ جا س − ١) = ٠

جتا س = ٠ أو ٢ جا س − ١ = ٠

جا س = $\frac{1}{2}$

س = $\frac{\pi}{2}$ أو س = $\frac{3\pi}{2}$ أو س = $\frac{\pi}{6}$ أو س = $\frac{5\pi}{6}$

حاول أن تحل صـ ١٢٢

٩ حل المعادلات التالية:

أ ٤ جتا^2 س − ١ = ٠ حيث جتا س > ٠

ب ٤ جتا^2 س − ٤ جتا س + ١ = ٠

الحل أ ٤ جتا^2 س − ١ = ٠

(٢ جتا س − ١) (٢ جتا س + ١) = ٠

٢ جتا س − ١ = ٠ أو ٢ جتا س + ١ = ٠

جتا س = $\frac{1}{2}$ جتا س = $\frac{-1}{2}$ مرفوض

س = $\frac{\pi}{3}$ + ٢ ن ط

أو س = − $\frac{\pi}{3}$ + ٢ ن ط

ب ٤ جتا^2 س − ٤ جتا س + ١ = ٠

(٢ جتا س − ١)^2 = ٠

٢ جتا س − ١ = ٠

جتا س = $\frac{1}{2}$

س = $\frac{\pi}{3}$ + ٢ ن ط أو س = $\frac{-\pi}{3}$ + ٢ ن ط