الوحدة السابعة — المصفوفات

(٧ - ١) تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر **Elements**.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من الرتبة ٢ × ٣.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

حاول أن تحل ص ٥٧

① **اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:**

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢,٥ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = [-٨ \quad ٣ \quad ١٠]$ ، $\underline{ج} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & -٥ \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$

الحل:

المصفوفة $\underline{أ}$ من الرتبة ٢ × ٣

المصفوفة $\underline{ب}$ من الرتبة ١ × ٣

المصفوفة $\underline{ج}$ من الرتبة ٣ × ٢

حاول أن تحل ص ٥٨

② (أ) وضّح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي أضيفت إليها دول أخرى.

(ب) أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣. ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.

(ج) وضّح الفرق بين المصفوفة التي رتبتها ج × د والمصفوفة التي رتبتها د × ج.

(أ) كل دولة جديدة يكون لها صف جديد فمثلا اذا أضيف دولة واحدة تكون المصفوفة من الرتبة ٤ × ٢

الكويت الإمارات البحرين

(ن) الإنتاج $\begin{bmatrix} ١ & ٧ & ٤٥٠ \\ ١ & ٦٥ & ٤ \end{bmatrix}$
الاستهلاك

(م) المصفوفة التي رتبتها م × ن يكون عدد صفوفها م وعدد أعمدتها ن
أما ... التي رتبتها ن × م فيكون عدد صفوفها ن وعدد أعمدتها م

حاول أن تحل ص ٥٩

٣ اكتب المصفوفة جـ لتمثل النقاط الممنوحة لبعض لاعبي الجمباز.

الرياضة / اللاعب	تمارين أرضية	حصان المقابض	الحلقات الثابتة	العارضتان المتوازيتان
الأول	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
الثاني	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
الثالث	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]

الحل

$$جـ = \begin{bmatrix} ٩{,}٨٣٧ & ٩{,}٥٨٧ & ٩{,}٧٠٠ & ٩{,}٧٢٥ \\ ٩{,}٧٧٥ & ٩{,}٧١٢ & ٩{,}٥٣٧ & ٩{,}٦٥٠ \\ ٩{,}٧١٢ & ٩{,}٦٥٠ & ٩{,}٦٥٠ & ٩{,}٥١٢ \end{bmatrix}$$

ترميز عناصر المصفوفة

ويحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

حاول أن تحل ص ٦٠

٤ في المثال (٤)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب. $ب_{٢٣} = ٢$

حيث أن العنصر $ب_{٢٣}$ يقع في الصف ٣ والعمود ٢

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة

- المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد.
- المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد
- فكر وناقش: هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

المصفوفة من الرتبة ١ × ١ تكون عمودية وأفقية معًا

حاول أن تحل ص ٦١

٥ صنّف المصفوفات في المثال (١).

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix} \quad \text{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

أ مصفوفة مربعة

ب مصفوفة أفقية

جـ مصفوفة عمودية

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

حاول أن تحل ص ٦٢

ملحوظة هامة:

يلزم توافر الشرطان معاً

٦ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ص} = \begin{bmatrix} ٩ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفتان س، ص غير متساويتان

لأن عناصرهما المتناظرة غير متساوية

حاول أن تحل ص ٦٢

٧ (أ) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

(ب) إذا كانت [٣س   س + ص   س - ص] = [-٩   ٤   -١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل (أ) المصفوفتان متساويتان

س + ٨ = ٣٨ | ٤ص - ١٠ = -ص

س = ٣٨ - ٨ | ٤ص + ص = ١٠

س = ٣٠ | ٥ص = ١٠

ص = ٢

(ب) ٣س = -٩ | س + ص = ٤

س = -٣ | -٣ + ص = ٤

ص = ٤ + ٣

ص = ٧

(٧ - ٢) جمع المصفوفات وطرحها

لجمع مصفوفتين أ ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها
ونجمع كل العنصرين المتناظرين معاً

حاول أن تحل ص٦٤

١ أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ٥ & -٣ \\ ١٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٤ & -٥ \\ -٧ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٤-١ & -١٢-٣ \\ ٥+٤ & -٣-٥ \\ ١٠-٧ & -١+١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٣ & -١٥ \\ ٩ & -٨ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل ص٦٦

٢ أ وضّح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.

ب استخدم جمع المصفوفات لإثبات أنّ العبارة التالية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١١ & ١٠ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١١ & ١٠ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$$

الحل: أ) لأنه عند تساوي الرتبة يكون لكل عنصر في المصفوفة نظير في المصفوفة الأخرى ويمكن جمعهما معاً

ب) الطرف الأيمن $= \begin{bmatrix} -٧-٣ & ٣+٢ \\ ٢+١١ & ٦+١٠ \\ ٠+٦ & ٥+-٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ٥ \\ ١٣ & ١٦ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} \rightarrow (١)$

الطرف الأيسر $= \begin{bmatrix} -٣-٧ & ٢+٣ \\ ١١+٢ & ١٠+٦ \\ ٦+٠ & -٤+٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ٥ \\ ١٣ & ١٦ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} \rightarrow (٢)$

من (١)، (٢) : العبارة صحيحة

خواص جمع المصفوفات

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع
- $\underline{0}_{م×ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{0}_{م×ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{0}_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

حاول أن تحل ص ٦٧

٣ في المثال (٣)، أوجد $\underline{جـ} + \underline{ب}$ ، $(\underline{جـ} + \underline{ب}) + \underline{أ}$.

$$\underline{جـ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$(\underline{جـ} + \underline{ب}) + \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$.

حاول أن تحل ص ٦٨

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦+٤ & -٩-٣ & ٧-٠ \\ -٢-٦ & ١-٥ & ٨-١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -١٢ & ٧ \\ -٨ & -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣+٣ & ٥-١ \\ -١-٢ & ١٠+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية

حاول أن تحل ص ٦٨

٥ أوجد $\underline{س}$ حيث:

$\underline{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$ بإضافة $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ لطرفي المعادلة

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٩ & ٧ \\ -٢ & ٩ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات (٧ - ٣)

ضرب مصفوفة في عدد

مثال (١)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥أ ، ٣ب . ثم ٥أ - ٣ب

الحل:

٥أ = $\begin{bmatrix} 5\times 2 & 5\times 3 & 5\times(-4) \\ 5\times 5 & 5\times 4 & 5\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -20 \\ 25 & 20 & 15 \end{bmatrix}$

٣ب = $\begin{bmatrix} 3\times 0 & 3\times 1 & 3\times 2 \\ 3\times(-2) & 3\times(-1) & 3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

٥أ - ٣ب = $\begin{bmatrix} 10 & 15 & -20 \\ 25 & 20 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & -26 \\ 31 & 23 & 6 \end{bmatrix}$

حاول أن تحل ص ٧٠

١ من المثال (١)، أوجد:

أ ٥ب - ٤أ   ب أ + ٦ب

(أ) ٥ب = $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -10 & -5 & 15 \end{bmatrix}$ ، ٤أ = $\begin{bmatrix} 8 & 12 & -16 \\ 20 & 16 & 12 \end{bmatrix}$

٥ب - ٤أ = $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -10 & -5 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 & -16 \\ 20 & 16 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -8 & -7 & 26 \\ -30 & -21 & 3 \end{bmatrix}$

(ب) أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، ٦ب = $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ -12 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

أ + ٦ب = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ -12 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 9 & 8 \\ -7 & -2 & 21 \end{bmatrix}$

حاول أن تحل صـ ٧١

٢ بعد رفع الأسعار تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

الحل: التخفيض بنسبة ٢٠٪

∴ السعر الجديد = ٠,٨ × السعر القديم

$$٠,٨ \times \begin{bmatrix} ٠,٤٥٠ & ٠,٧٥٠ \\ ٠,٩٠٠ & ١,٣٥٠ \\ ٠,٧٥٠ & ١,٢٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٣٦٠ & ٠,٦٠٠ \\ ٠,٧٢٠ & ١,٠٨٠ \\ ٠,٦٠٠ & ٠,٩٦٠ \end{bmatrix}$$

كوب ليمون ٠,٦٠٠ دينار ، ٠,٣٦٠ دينار

كوب عصير برتقال ١,٠٨٠ دينار ، ٠,٧٢٠ دينار

« « مانجو ٠,٩٦٠ دينار ، ٠,٦٠٠ دينار

حاول أن تحل صـ ٧٢

٣ حل كل معادلة مما يلي:

أ $٢س = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$$٢س = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

ب $-٣س + \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٧ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & -١٨ & -١٩ \end{bmatrix}$

$$-٣س = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & -١٨ & -١٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٧ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$-٣س = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١٥ & -٢١ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{-١}{٣} \times \begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١٥ & -٢١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ & -١ \\ -٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

حاول أن تحل ص ٧٥

٥ بفرض: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعرّف.

ج بفرض أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

الحل (أ)

$\underline{أ} \times \underline{ب}$: (٢×٢) (٢×٤) — تساويتان

$\underline{ب} \times \underline{أ}$: (٢×٤) (٢×٢) — غير تساويتين

$\underline{أ} \times \underline{ب}$ معرفه ورتبتها ٢×٤ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ غير معرفه

(ب) $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٣٢-٤ & ٠+١٠ & -٤-٢ & ٠-١٦ \\ ٤٠-٨ & ٠+٢٠ & -٥-٤ & ٠-٣٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٨ & ١٠ & -٦ & -١٦ \\ ٣٢ & ٢٠ & -٩ & -٣٢ \end{bmatrix}$

(ج) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ رتبتها ٢×٢

$\underline{ب} \times \underline{أ}$ رتبتها ٣×٣

$\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ غير متساويتان

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{أ} \times \underline{أ}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{2}$.
وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{أ}$. وبالمثل $\underline{أ}^{3} = \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ}$، $\underline{أ}^{4} = \underline{أ}^{3} \times \underline{أ}$، ....

مثال (٧)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{أ}^{2}$، $\underline{أ}^{3}$

الحل:

$$\underline{أ}^{2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{3} = \underline{أ}^{2} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

ص ٧٨

٧ إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^{2}$، $\underline{ب}^{3}$.

الحل

$$\underline{ب}^{2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1 & 2+4 \\ -2-4 & -1+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}^{3} = \underline{ب}^{2} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-6 & 3+24 \\ -12-15 & -6+60 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 27 \\ -27 & 54 \end{bmatrix}$$

(٧ - ٤) مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـ $\underline{\text{و}}$

$\underline{\text{و}}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{و}}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

بفرض أن $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{أ}\times١ + \text{ب}\times٠ & \text{أ}\times٠ + \text{ب}\times١ \\ \text{جـ}\times١ + \text{د}\times٠ & \text{جـ}\times٠ + \text{د}\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$

كذلك $\underline{\text{و}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$

أي أن: $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{و}} = \underline{\text{و}} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}}$

$\underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\underline{\text{و}}_{\text{ن}\times\text{ن}}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذ كانت $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{س}}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{و}}$ ، فإن $\underline{\text{س}}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.
ويرمز إليها بـ $\underline{\text{أ}}^{-١}$.

إذًا $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{و}}$

حاول أن تحل ص٨٠

١ (أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

(ب) في المثال (١)، أثبت أن $\underline{\text{أ}}$ هي النظير الضربي لـ $\underline{\text{ب}}$.

(أ) $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤+٥ & ٤-٤ \\ -٥+٥ & ٥-٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\because \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{و}} \quad \therefore$ ب هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$

أو $\therefore$ $\underline{\text{أ}}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{ب}}$

(ب) في المثال (١)

$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\underline{\text{أ}}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{ب}}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى محدد أ ويرمز إلى هذا العدد بالرمز | أ | ويقرأ محدد المصفوفة أ

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{ب جـ}$

حاول أن تحل ص ٨١

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ **ب** $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ **جـ** $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{ك} & ٣ \\ ٣-\text{ك} & -٣ \end{bmatrix}$

الحل

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = (٤ \times ٢) - (٤ \times ٢) = ٠$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{vmatrix} = (٨ \times ١٠) - (٢ \times ٧) = ٦٦$

$|\text{جـ}| = \begin{vmatrix} \text{ك} & ٣ \\ ٣-\text{ك} & -٣ \end{vmatrix} = (\text{ك} \times -٣) - ٣ \times (٣ - \text{ك})$

$= -٣\text{ك} - (٩ - ٣\text{ك})$

$= -٣\text{ك} - ٩ + ٣\text{ك}$

$= -٩$

خاصية

بفرض أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن أ لها نظير ضربي $\text{أ}^{-١}$ حيث:

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ د} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:
المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة منفردة

حاول أن تحل ص ٨٢

٣ **أ** هل $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

ب هل $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

الحل

أ) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$ ∴ ب لها نظير ضربي $\text{ب}^{-١}$

ب) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٢٤ + ٢٤ = ٠$ ∴ ب ليس لها نظير ضربي $\text{ب}^{-١}$

حاول أن تحل ص ٨٢

٤ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

الحل (أ) أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، |أ| = ٦ − ٤ = ٢ ≠ ٠

∴ أ لها نظير ضربي هو $أ^{-1}$

$أ^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(ب) ب = $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$ ، |ب| = ٠,٥ × ٧,٢ − ٣ × ٢,٣

= ٠,٩١ ≠ ٠

∴ ب لها نظير ضربي هو $ب^{-1}$

$ب^{-1} = \frac{١}{٠,٩١} \begin{bmatrix} ٧,٢ & -٢,٣ \\ -٣ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل ص ٨٣

٥ أ إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

ب هل ب = $\begin{bmatrix} ١,٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

الحل (أ) ∵ ب مصفوفة منفردة

∴ ١٠س + ٤٠ = ٠

١٠س = −٤٠

س = −٤

(ب) |ب| = $\begin{vmatrix} ١,٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٦ = ٠

∴ ب ليس لها نظير ضربي

(٧ - ٥) حل نظام من معادلتين خطيتين

أولاً: باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة بطريقة

حاول أن تحل ص ٨٧

(١) حلّ النظام: $\begin{cases} 5\text{س} + 3\text{ص} = 7 \\ 3\text{س} + 2\text{ص} = 5 \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \times \text{ع} = \text{ب} \Leftarrow \text{ع} = \text{أ}^{-1} \times \text{ب}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = -1 ، ص = 4

حاول أن تحل ص ٨٨

(٢) قطعة أرض مستطيلة طولها يساوي ضعف عرضها ومحيطها يساوي ٨٤٠ مترًا. ما أبعادها باستخدام المصفوفات؟

الحل: نفرض أن الطول = س ، العرض = ص

س = ٢ص $\therefore$ س − ٢ص = ٠

٢ × (س + ص) = ٨٤٠ $\therefore$ س + ص = ٤٢٠

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 420 \end{bmatrix}$$

$\underline{أ} \times \underline{ع} = \underline{ب}$

$\underline{ع} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}$

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ + ٢ = ٣$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{ع} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤٢٠ \end{bmatrix}$

$\underline{ع} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ٨٤٠ \\ ٤٢٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٨٠ \\ ١٤٠ \end{bmatrix}$

∴ الطول = ٢٨٠ ، والعرض = ١٤٠

ثانياً باستخدام قاعدة كرامر (المحددات)

حاول أن تحل ص ٨٩

٣ أوجد مجموعة حلّ النظام: $\begin{cases} ٢س + ٧ص = ١ \\ ٣س - ٤ص = ١٦ \end{cases}$ باستخدام المحددات (قاعدة كرامر)

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٨ - ٢١ = -٢٩$

$\Delta_س = \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ ١٦ & -٤ \end{vmatrix} = -٤ - ١١٢ = -١١٦$

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١٦ \end{vmatrix} = ٣٢ - ٣ = ٢٩$

∴ $س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-١١٦}{-٢٩} = ٤$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{٢٩}{-٢٩} = -١$

∴ م.ح = $\{(٤ ، -١)\}$

حاول أن تحل ص ٨٩

٤ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l}\text{٣س + ٢ص = −٦}\\ \text{−٤س − ٣ص − ٧ = ٠}\end{array}\right.$

الحل

٣س + ٢ص = −٦

−٤س − ٣ص = ٧

$\Delta = \begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٢} \\ \text{−٤} & \text{−٣} \end{vmatrix} = \text{−٩ + ٨ = −١}$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{−٦} & \text{٢} \\ \text{٧} & \text{−٣} \end{vmatrix} = \text{١٨ − ١٤ = ٤}$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{٣} & \text{−٦} \\ \text{−٤} & \text{٧} \end{vmatrix} = \text{٢١ − ٢٤ = −٣}$

$\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \dfrac{\text{٤}}{\text{−١}} = \text{−٤}$

$\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \dfrac{\text{−٣}}{\text{−١}} = \text{٣}$

م ح = {(−٤ ، ٣)}